25.05.20

Производная

функции

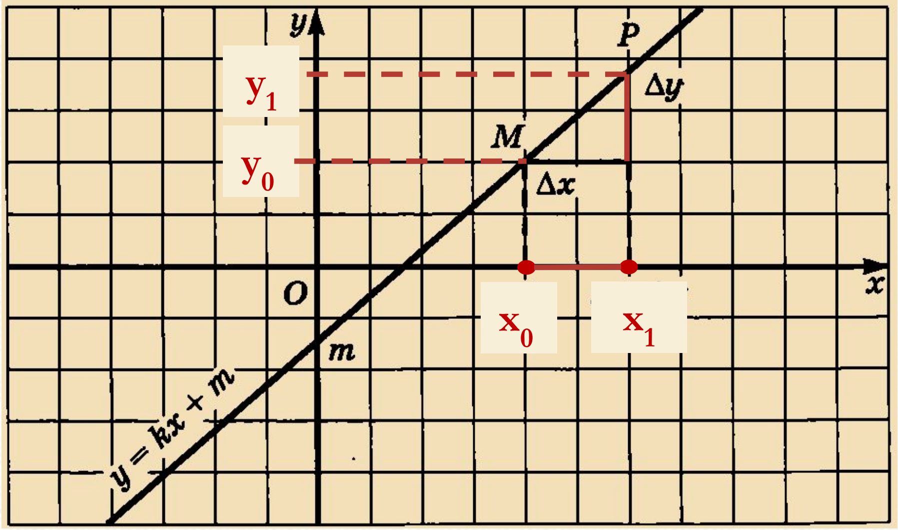
I. Приращение аргумента и приращение функции

Пусть f(x) определена в точках x_0 и x_1.

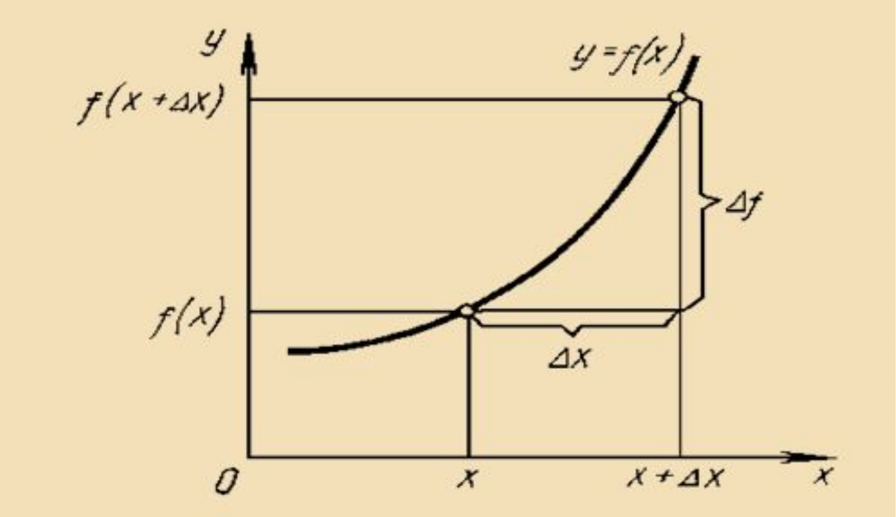
1) Разность x_1 - x_0 называется **приращением аргумента (независимой переменной)** в точке x_0 и обозначается Δx.

$\Delta x = x_1 - x_0$ – «дельта x» (*приращение независимой переменной*)

Тогда **$x_1 = x_0 + \Delta x$**.



2) Разность между значениями функции в точках x_1 и x_0, т.е. между $f(x_1)$ и $f(x_0)$, называется **приращением функции** f в точке x_0 и обозначается Δf или Δy.



$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ – «дельта f » (*приращение функции f*)

Тогда **$f(x_1) = f(x_0)$** + **Δf** .

Или: **$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.** Тогда **$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.**

Или: **$\Delta y = y(x_1) - y(x_0)$.** Тогда **$y(x_1) = y(x_0)$** + **Δy**.

Проще: **$\Delta y = y_1 - y_0$.** Тогда **$y_1 = y_0$** + **Δy**.

I. Приращение аргумента и приращение функции

3) Основные формулы

$\Delta x = x_1 - x_0$

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta y = y_1 - y_0$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

Примеры.

1. **Дано: $y = x^2 - 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$.**

   Найти: приращения аргумента и функции.

Решение:

1) $\Delta x = x_1 - x_0$

$\Delta x = 0{,}1 - 0 = 0{,}1$

2) $\Delta y = y(x_1) - y(x_0)$

$\Delta y = (0{,}1^2 - 1) - (0^2 - 1) = 0{,}01 - 1 + 1 = 0{,}01$

2. Дано: $y = x^2 - 1$, $x \to x+\Delta x$.

Найти: приращение функции (Δy).

Решение:

1) $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x+\Delta x) - y(x)$

Это подстановка в формулу функции.

$\Delta y = ((x+\Delta x)^2 - 1) - (x^2 - 1) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 -$

$- 1 - x^2 + 1 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$

I. Приращение аргумента и приращение функции

3) Основные формулы

$\Delta x = x_1 - x_0$

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta y = y_1 - y_0$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

Примеры.

3. Дано: $y = x^3$, $x \to x + \Delta x$.

Найти: Δy.

Решение:

1) $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x+\Delta x) - y(x)$

Это подстановка в формулу функции.

$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$

$= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$

4. Дано: $y = kx + b$, $x \to x + \Delta x$.

Найти: Δy.

Решение:

1) $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x+\Delta x) - y(x)$

$\Delta y = (k(x+\Delta x) + b) - (kx + b) = kx + k\Delta x + b - kx -$

$- b = k\Delta x$

I. Приращение аргумента и приращение функции

3) Основные формулы

$\Delta x = x_1 - x_0$

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta y = y_1 - y_0$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

Примеры.

5. Дано: $y = x^3$, $x \to x + \Delta x$.

Найти: отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Решение:

1) Найдем Δy (воспользуемся примером 3).

$\Delta y = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

6. Дано: $y = kx + b$, $x \to x + \Delta x$.

Найти: отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Решение:

1) Найдем Δy (воспользуемся примером 4).

$\Delta y = k\Delta x$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$.

I. Приращение аргумента и приращение функции

3) Основные формулы

$\Delta x = x_1 - x_0$

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta y = y_1 - y_0$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

Примеры.

7. Дано: $y = ax^2$, $x \to x + \Delta x$.

Найти: отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Решение:

1) Найдем Δy: $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x+\Delta x) - y(x)$

$\Delta y = a(x+\Delta x)^2 - ax^2 = ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2 =$

$= 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 = a\Delta x(2x + \Delta x)$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{a\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = a(2x + \Delta x)$

Дальнейшая мысль:
Если $\Delta x \to 0$, то $a(2x + \Delta x) \to 2ax$.

Из примера 5:
Если $\Delta x \to 0$, то $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 \to 3x^2$
…. и т.д.