

25.05.20

**Производная**

---

**функции**

# I. Приращение аргумента и приращение функции

Пусть  $f(x)$  определена в точках  $x_0$  и  $x_1$ .

1) Разность  $x_1 - x_0$  называется **приращением аргумента** (**независимой переменной**) в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta x$ .

$\Delta x = x_1 - x_0$  — «дельта x» (приращение независимой переменной)

Тогда  $x_1 = x_0 + \Delta x$ .

2) Разность между значениями функции в точках  $x_1$  и  $x_0$ , т.е. между  $f(x_1)$  и  $f(x_0)$ , называется **приращением функции**  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta f$  или  $\Delta y$ .

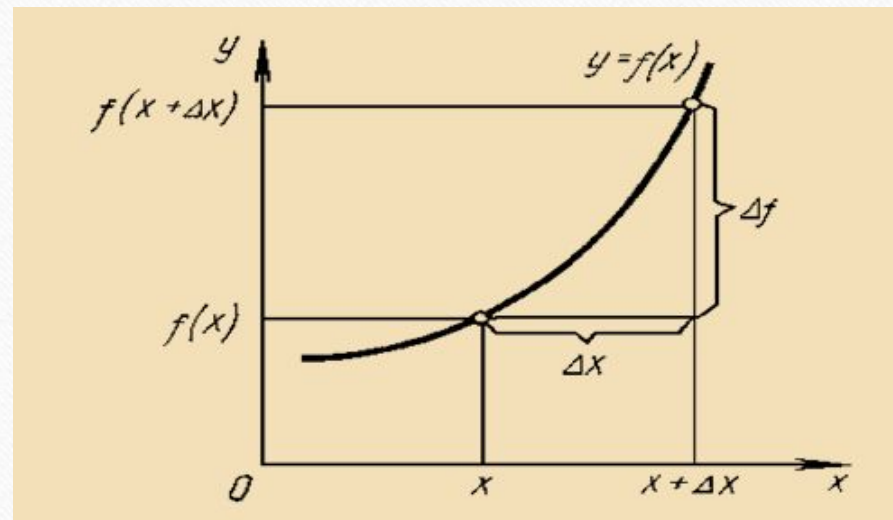
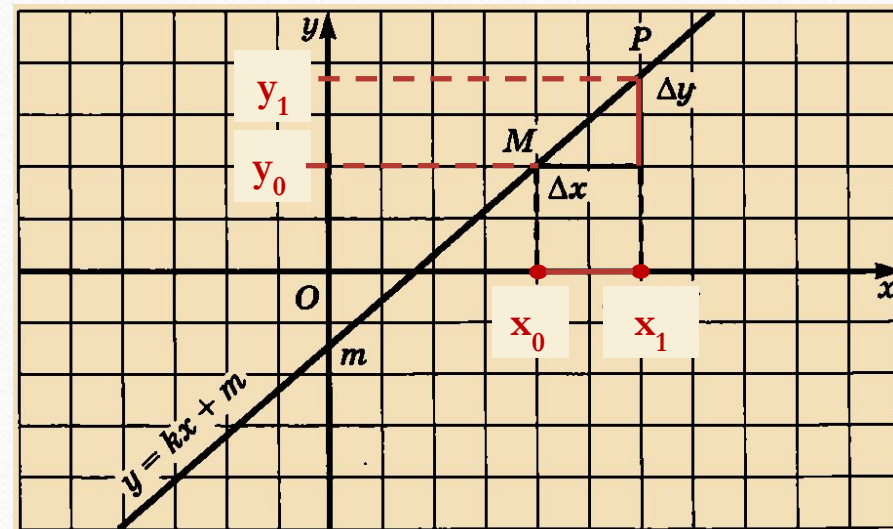
$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$  — «дельта f» (приращение функции  $f$ )

Тогда  $f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$ .

Или:  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . Тогда  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ .

Или:  $\Delta y = y(x_1) - y(x_0)$ . Тогда  $y(x_1) = y(x_0) + \Delta y$ .

Проще:  $\Delta y = y_1 - y_0$ . Тогда  $y_1 = y_0 + \Delta y$ .



# I. Приращение аргумента и приращение функции

## 3) Основные формулы

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

## Примеры.

1. Дано:  $y = x^2 - 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0,1$ .

Найти: приращения аргумента и функции.

Решение:

1)  $\Delta x = x_1 - x_0$

$$\Delta x = 0,1 - 0 = 0,1$$

2)  $\Delta y = y(x_1) - y(x_0)$

$$\Delta y = (0,1^2 - 1) - (0^2 - 1) = 0,01 - 1 + 1 = 0,01$$

2. Дано:  $y = x^2 - 1$ ,  $x \rightarrow x + \Delta x$ .

Найти: приращение функции ( $\Delta y$ ).

Решение:

1)  $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x + \Delta x) - y(x)$

Это подстановка в формулу функции.

$$\begin{aligned} \Delta y &= ((x + \Delta x)^2 - 1) - (x^2 - 1) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - x^2 + 1 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x) \end{aligned}$$

# I. Приращение аргумента и приращение функции

## 3) Основные формулы

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Примеры.

3. Дано:  $y = x^3$ ,  $x \rightarrow x + \Delta x$ .

Найти:  $\Delta y$ .

Решение:

$$1) \Delta y = y_1 - y_0 = y(x + \Delta x) - y(x)$$

Это подстановка в формулу функции.

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \\ &= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) \end{aligned}$$

4. Дано:  $y = kx + b$ ,  $x \rightarrow x + \Delta x$ .

Найти:  $\Delta y$ .

Решение:

$$1) \Delta y = y_1 - y_0 = y(x + \Delta x) - y(x)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= (k(x + \Delta x) + b) - (kx + b) = kx + k\Delta x + b - kx - \\ &- b = k\Delta x \end{aligned}$$

# I. Приращение аргумента и приращение функции

## 3) Основные формулы

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Примеры.

5. Дано:  $y = x^3$ ,  $x \rightarrow x + \Delta x$ .

Найти: отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Решение:

1) Найдем  $\Delta y$  (воспользуемся примером 3).

$$\Delta y = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

6. Дано:  $y = kx + b$ ,  $x \rightarrow x + \Delta x$ .

Найти: отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Решение:

1) Найдем  $\Delta y$  (воспользуемся примером 4).

$$\Delta y = k\Delta x$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

# I. Приращение аргумента и приращение функции

## 3) Основные формулы

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Примеры.

7. Дано:  $y = ax^2$ ,  $x \rightarrow x + \Delta x$ .

Найти: отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Решение:

1) Найдем  $\Delta y$ :  $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$\begin{aligned} \Delta y &= a(x + \Delta x)^2 - ax^2 = ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2 = \\ &= 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 = a\Delta x(2x + \Delta x) \end{aligned}$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = a(2x + \Delta x)$$

Дальнейшая мысль:

Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $a(2x + \Delta x) \rightarrow 2ax$ .

Из примера 5:

Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 \rightarrow 3x^2$   
..... и т.д.