Моделирование финансового риска

Оптимальный портфель ценных бумаг

Основные понятия

- Финансовый рынок – рынок, на котором товарами служат деньги, банковские кредиты и ценные бумаги (облигации, акции, фьючерсы, опционы)

Эффективность финансовых операций

- Предоставление в долг некоторой суммы S(0) с условием, что через время T будет возвращена сумма S(T). Кредитор получит прибыль S(T)-S(0).
- В расчете на единицу кредита $r_T = \frac{S(T)-S(0)}{S(0)}$
- r_T – эффективность операции (с точки зрения кредитора), процентная ставка, интерес
- d_T – дисконт – отношение прибыли к возвращаемой сумме

$$d_T = \frac{S(T)-S(0)}{S(T)}$$

$$r_T = \frac{d_T}{1-d_T} \qquad d_T = \frac{r_T}{1+r_T}$$

$$S(T) = S(0)(1+r_T); \qquad S(0) = S(T)(1-d_T)$$

Эффективная ставка

- Эффективной ставкой называется годичная ставка сложных процентов, которая обеспечивает заданное соотношение между возвращаемой суммой S(T) и суммой кредита S(0):

$$\left(1+r_{ef}\right)^{T}=\frac{S\left(T\right)}{S\left(0\right)}$$

т.е.

$$r_{ef}=\left[\frac{S\left(T\right)}{S\left(0\right)}\right]^{\frac{1}{T}}-1$$

Финансовый риск

- Эффективность R финансовой операции является случайной величиной, а наблюдаемые ее значения r – отдельные реализации этой случайной эффективности
- Под **риском** понимается **вероятность любого нежелательного для инвестора события**
- Риск характеризует дисперсия эффективности финансовой операции
- Если имеется две финансовые операции R_1 и R_2 с $MR_i = m_i$, $DR_i = \sigma_i^2$, $m_1 < m_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, то инвестор, склонный к риску выберет вторую операцию, т.к. она более эффективна ($m_1 < m_2$), а более осторожный инвестор выберет первую, т.к. она менее рискованна ($\sigma_1 < \sigma_2$), хотя и менее эффективна

Оптимизация портфеля ценных бумаг

- Имеется n видов ценных бумаг
- $R_1, R_2, \dots R_n$ – эффективности ценных бумаг с известными $MR_i = m_i$ и известной ковариационной матрицей $B = (\mathrm{cov}(R_i, R_j))$, причем $\mathrm{cov}(R_i, R_i) = DR_i = \sigma_i^2$.
- Если инвестор распределил свой капитал долями θ_i, $\Sigma\, \theta_i = 1$, в разные ценные бумаги, то эффективность сформированного портфеля равна

$$R_p = \Sigma\, R_i \theta_i$$

$$MR_p = M\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i MR_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_i m_i,$$

$$\sigma_p^2 = DR_p = D\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i\right) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i,\ \sum_{j=1}^{n} \theta_j R_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta_i \theta_j \,\mathrm{cov}\left(R_i,\ R_j\right).$$

Оптимизация портфеля ценных бумаг

- Если m_p – выбранное инвестором значение эффективности портфеля, то задача оптимизации имеет вид:

$$\min \sum_{i=1}^{n} b_{i\,j}\theta_i\,\theta_j, \quad b_{i\,j} = \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\theta_i = m_p,$$

$$\theta_1 \geq 0, \ldots, \theta_n \geq 0,$$

Решение задачи оптимизации

- Метод множителей Лагранжа:

$$L(\theta_1, \ldots, \theta_n, \lambda, \mu\ ) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i\,j} \theta_i \theta_j + \lambda \left(-\sum_{i=1}^{n} \theta_i + 1 \right) + \mu \left(-\sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i + m_p \right),$$

- Из системы n+2 уравнений

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_l} = 2 \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \theta_i - \lambda - \mu m_l = 0, \quad l = 1, \ldots, \ n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i \ = \ 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \theta_i \ = \ m_p,$$

находим структуру оптимального портфеля

$$\theta^* = \frac{\left[\left(m'B^{-1}m\right) - m_p\left(e'B^{-1}m\right)\right]B^{-1}e + \left[m_p\left(e'B^{-1}e\right) - \left(m'B^{-1}e\right)\right]B^{-1}m}{\left(e'B^{-1}e\right)\left(m'B^{-1}m\right) - \left(m'B^{-1}e\right)^{2}}$$

Замечание к процессу поиска структуры оптимального портфеля

- Минимальная дисперсия структуры оптимального портфеля

$$\left(\sigma_p^*\right)^2 = \left(\theta^*\right)' B\theta^* = \frac{m_p^2\left(e'B^{-1}e\right) - 2m_p\left(m'B^{-1}e\right) + \left(m'B^{-1}m\right)}{\left(e'B^{-1}e\right)\left(m'B^{-1}m\right) - \left(m'B^{-1}e\right)^2}$$

- Если некоторые $\theta_i \leq 0$, то исключаем из портфеля соответствующие бумаги, и решаем задачу заново.

Случай некоррелированности случайных величин

- Если эффективности некоррелированны, то

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$e'B^{-1}e = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2},$$

$$\left(e'B^{-1}m\right)' = m'B^{-1}e = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i^2},$$

$$m'B^{-1}m = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{\sigma_i^2}.$$

- Оптимальная структура портфеля имеет вид

$$\theta_i^* = \frac{1}{\sigma_i^2 \sum\limits_{i<j} \frac{\left(m_i - m_j\right)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(m_i - m_p\right)\left(m_j - m_i\right)}{\sigma_i^2},$$

- Дисперсия оптимального портфеля рав $\left(\sigma_p^*\right)^2 = \left(\theta^*\right)' B^{-1}\theta^* = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\left(m_i - m_p\right)^2}{\sigma_i^2}}{\sum\limits_{i<j} \frac{\left(m_i - m_j\right)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2}}$

Пример. Оптимизация портфеля ценных бумаг

- Инвестор может составить портфель из трех ценных бумаг, эффективности которых R_1, R_2, R_3 являются некоррелированными случайными величинами с числовыми хар

$$MR_1 = 11, \ \sigma_1 = 4; \quad MR_2 = 10, \ \sigma_2 = 3; \quad MR_3 = 9, \quad \sigma_3 = 1;$$

(все данные в процентах к цене покупки).

- Определить оптимальный портфель бумаг при m_p = 10.

Решение

- Эффективность портфеля $R_p = \Sigma R_i\theta_i$ имеет математическое ожидание

$$MR_p = \sum_{i=1}^{3} \theta_i MR_i = 11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10$$

$$\sigma_p^2 = DR_p = D\left(\sum_{i=1}^{3} \theta_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^2 DR_i = 16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2.$$

и дисперсию

Получаем задачу квадратичного программирования

$$\min_{\theta}\left(16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2\right),$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1,$$

$$11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10,$$

$$\theta_1 \geq 0, \quad \theta_2 \geq 0, \quad \theta_3 \geq 0.$$

Решение

- Составляем функцию Лагранжа

$$L(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\lambda,\mu)=16\theta_1^2+9\theta_2^2+\theta_3^2+\lambda(1-\theta_1-\theta_2-\theta_3)+\mu(10-11\theta_1-10\theta_2-9\theta_3)$$

- Необходимые условия экстремума

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 32\theta_1 - \lambda - 11\mu = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 18\theta_2 - \lambda - 10\mu = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \theta_3} &= 2\theta_3 - \lambda - 9\mu = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1) = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= -(11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 - 10) = 0.
\end{aligned}$$

Решение

- Решаем первые три уравнения систем

$$\theta_1 = \frac{1}{32}(\lambda + 11\mu),$$
$$\theta_2 = \frac{1}{18}(\lambda + 10\mu),$$
$$\theta_3 = \frac{1}{2}(\lambda + 9\mu).$$

- Подставляем в последние два уравнени

$$\begin{cases} 1{,}1736\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 10{,}7986\left(\frac{\mu}{2}\right) = 1, \\ 10{,}7986\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 99{,}6736\left(\frac{\mu}{2}\right) = 10, \end{cases}$$

- Находим $\frac{\lambda}{2} = -22{,}6434; \quad \frac{\mu}{2} = 2{,}5535.$
- Получаем структуру оптимального портфеля

$$\theta_1^* = 0{,}3404; \ \theta_2^* = 0{,}3214; \ \theta_3^* = 0{,}3382.$$

- Дисперсия равна $\left(\sigma_p^*\right)^2 = \left(\theta_1^*\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\theta_2^*\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\theta_3^*\right)^2 \sigma_3^2 = 2{,}8981$

Модификация портфеля ценных бумаг

- Пусть инвестор может наряду с покупкой ценных бумаг делать вложения, не связанные с риском.
- Необходимо определить оптимальную комбинацию рискового и безрискового части портфеля, чтобы минимизировать дисперсию при выбранной им средней эффективности портфеля m_p.

Модификация портфеля ценных бумаг

- Постановка задачи оптимизации

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\theta_i\theta_j, \quad b_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j);$$

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i + \theta_0 = 1, \quad \text{или} \quad e'\theta + \theta_0 = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i + r_0\theta_0 = m_p, \text{ или } m'\theta + r_0\theta_0 = m_p;$$

$$\theta_0 \ge 0, \ \theta_1 \ge 0, \dots, \ \theta_n \ge 0,$$

где r_0 и θ_0 - эффективность и доля безрисковой части портфеля соответственно.

При этом $r_0 < m_n$

Решение модифицированной задачи

- Строим функцию Лагранжа

$$L(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i\,j}\theta_i\theta_j + \lambda\left(-\sum_{i=0}^{n}\theta_i + 1\right) + \mu\left(-\sum_{i=0}^{n} m_i\theta_i + m_p\right),$$

- Приравниваем нулю ее производные по θ_i:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta_0} = -(\lambda + \mu r_0) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_i} = 2\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\theta_i - \lambda - \mu m_i = 0, \end{cases}$$

- Решая полученную систему уравнений с учетом условий ограничений, получаем структуру оптимального портфеля

$$\theta^* = \frac{(m_p - r_0)B^{-1}(m - r_0\mathrm{e})}{(m - r_0\mathrm{e})' B^{-1}(m - r_0\mathrm{e}\ \ )}$$

Замечание к решению

- Дисперсия оптимального портфеля равна

$$(\sigma_p^*)^2 = (\theta^*)'B\theta^* = \frac{(m_p - r_0)^2}{(m - r_0\mathrm{e})'B^{-1}(m - r_0\mathrm{e})}$$

- Если некоторые $\theta_i \leq 0$, то исключаем из портфеля соответствующие бумаги, и решаем задачу заново

Случай некоррелируемости эффективностей

- Если эффективности некоррелируемы, то

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$m'B^{-1}m = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{\sigma_i^2},$$

$$m'B^{-1}m - r_0(m'B^{-1}e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i - r_0)}{\sigma_i^2},$$

$$m'B^{-1}e = e'^{-1}m = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i^2},$$

$$e'^{-1}m - r_0\,(e'B^{-1}e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - r_0}{\sigma_i^2},$$

$$e'B^{-1}e = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2},$$

$$(m - r_0e)'B^{-1}(m - r_0e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}$$

Случай некоррелируемости эффективностей

- Элементы структуры оптимального портфеля имеют вид

$$\theta_0^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - m_p)(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}};$$

$$\theta_i^* = \frac{(m_p - r_0)(m_i - r_0)}{\sigma_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}},$$

- Дисперсия портфеля $\sigma_p^* = \dfrac{(m_p - r_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}}}.$

- Безрисковая часть будет входить в портфель, есл $m_p < \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - r_0}{\sigma_i^2}} = \bar{m}_p(r_0).$

- Если $m_\rho = \overline{m_\rho}$, то в портфеле будет присутствовать только рисковая часть.
- Если $m_\rho = r_0$, то в портфеле будет присутствовать только безрисковая часть

Премия за риск

- Превышение средней эффективности ценной бумаги над эффективностью безрискового вклада называется **премией за риск**
- Премия за риск конкретной ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель, пропорциональна премии за риск всего портфеля в целом

$$m_j - r_0 = \beta_j^* \left(m_\rho - r_0 \right)$$

- Коэффициент $\beta_j^* = \dfrac{\operatorname{cov}\left(R_j, R_\rho^* \right)}{\left(\sigma_\rho^* \right)^2}$ – бета-вклад j-ой ценной бумаги в

оптимальный портфель, т.е. отношение ковариации эффективности ценной бумаги и портфеля к вариации портфеля

Пример

- Определить, с каким наименьшим риском можно достичь 20%-ной эффективности инвестиций, если есть возможность банковских вложений и заимствований по ставке i = 10% годовых, а на рынке ценных бумаг обращаются две акции, их ожидаемые эффективности равны соответственно r_1 = 16% и r_2 = 23%, риски σ_1 = 5%, σ_2 = 14%, а коэффициент корреляции доходностей данных акций равен ρ_{12} = 0,36.

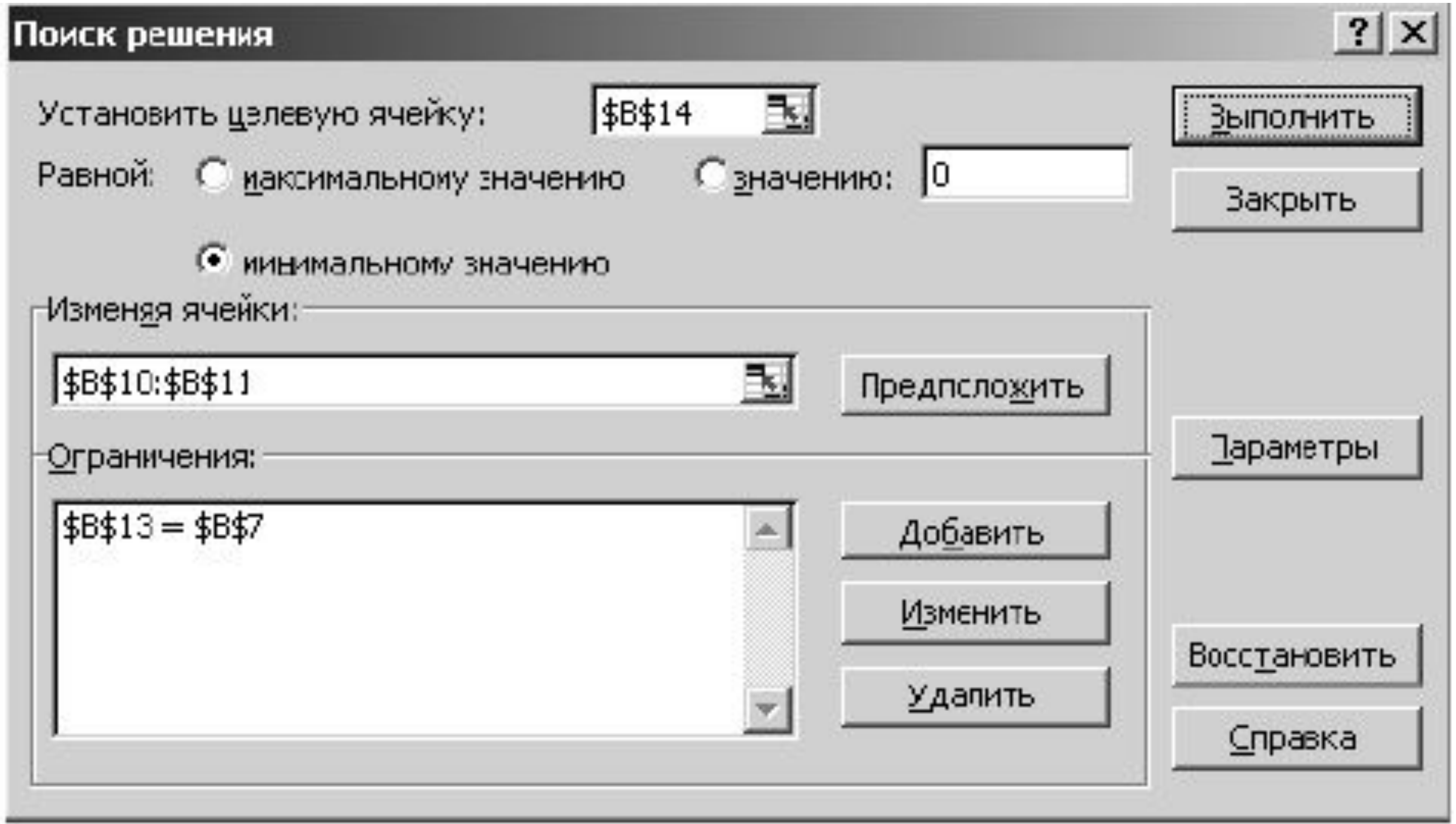
Решение с помощью Excel

- Вводим данные в рабочий лист. Для вычисления дисперсии портфеля учтем, что $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$

	A	B
1	$i =$	0,10
2	$r_1 =$	0,16
3	$r_2 =$	0,23
4	$\sigma_1 =$	0,05
5	$\sigma_2 =$	0,14
6	$\rho_{12} =$	0,36
7	$r_\pi =$	0,20
8		
9	$x_0 =$	=1-B10-B11
10	$x_1 =$	
11	$x_2 =$	
12		
13	$\mathbf{M}E_\pi=$	=B9*B1+B10*B2+B11*B3
14	$\mathbf{D}E_\pi=$	=B10^2*B4^2+B11^2*B5^2+2*B10*B11*B6*B4*B5

Решение с помощью Excel

- Для нахождения структуры оптимального портфеля воспользуемся надстройкой «Поиск решения»



Решение с помощью Excel

- Получаем следующие результаты

	A	B
1	$i =$	0,10
2	$r_1 =$	0,16
3	$r_2 =$	0,23
4	$\sigma_1 =$	0,05
5	$\sigma_2 =$	0,14
6	$\rho_{12} =$	0,36
7	$r_{\pi} =$	0,20
8		
9	$x_0 =$	−0,3908
10	$x_1 =$	1,1543
11	$x_2 =$	0,2365
12		
13	$\mathbf{M}E_{\pi} =$	0,2000
14	$\mathbf{D}E_{\pi} =$	0,0058

Экономическая интерпретация решения

- Риск портфеля равен $\sigma_{\pi} = \sqrt{0,0058} \approx 0,076 = 7,6\%$
- Оптимальное решени $x_0^* = -0,3908, \quad x_1^* = 1,1543, \quad x_2^* = 0,2365$

- Необходимо 23,65% потратить на приобретение акций второго вида, взять банковский кредит в размере 39,08% от общей суммы собственных средств, после чего все оставшиеся после покупки акций второго вида собственные средства вместе со средствами, полученными в кредит, вложить в покупку акций первого вида.
- Множитель Лагранжа, который приводится в «Отчете по устойчивости», равен λ = 0,116; это означает, что увеличен $\tilde{r}_{\pi}$ е эффективности заданного портфеля на 1% приведет к тому, что риск оптимального портфеля, обладающего такой эффективностью, у $\sqrt{0,1161} \approx 0,341\%$ близительно на