

14.4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление площадей плоских фигур

1 → Пусть функция $y=f(x)$ — неотрицательная и непрерывна на $[a,b]$. Тогда площадь под кривой $y=f(x)$ численно равна определённому интегралу от этой функции на $[a,b]$.

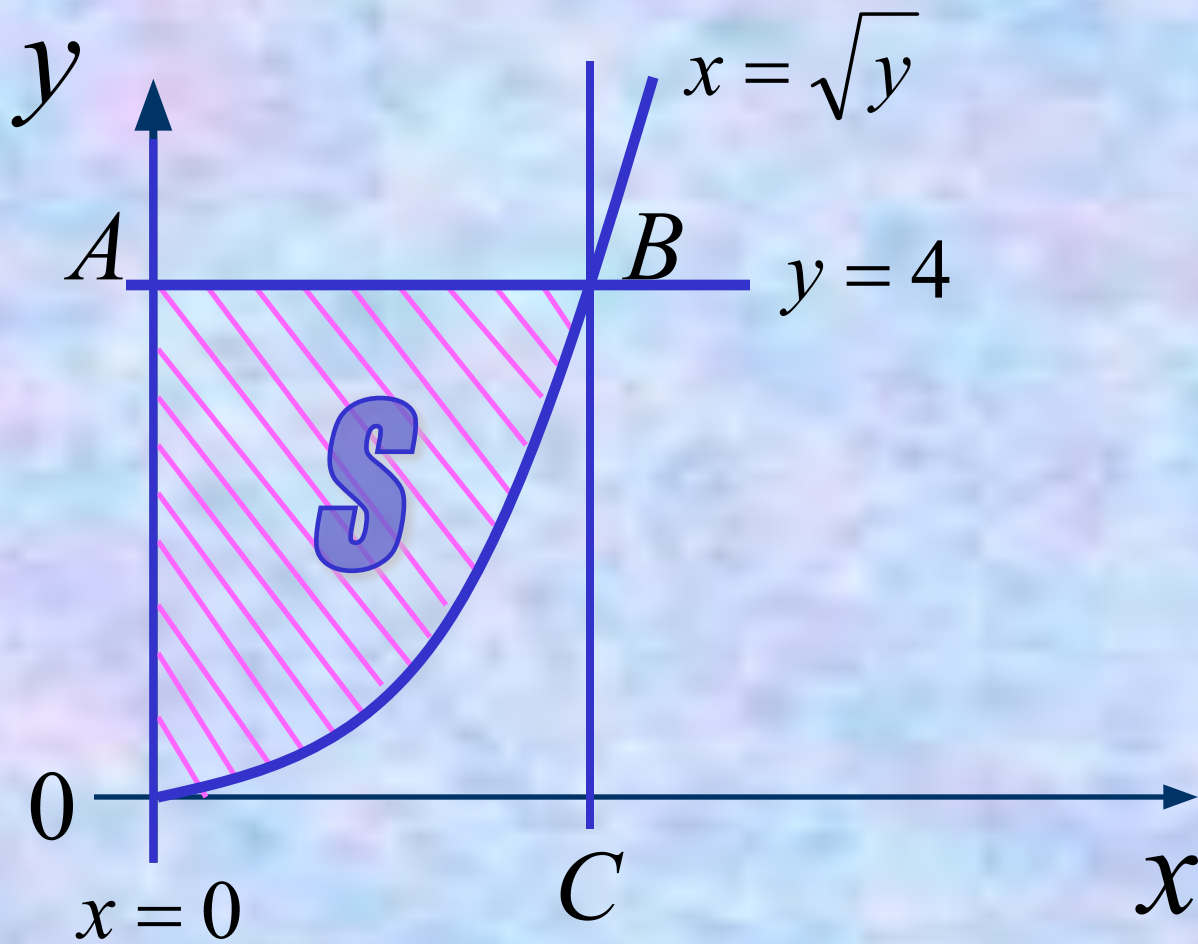
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Пример.

*Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями:*

$$x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 4$$

Решение:



$$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OBC}$$

Находим координаты точки B :

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2,4)$$

Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4 dx = 4x \Big|_0^2 = 8$$

$$S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S_{ABC} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ (кв.единиц)}$$

2 → Пусть функция $y=f(x)$ – неположительная и непрерывна на $[a,b]$. Отражая кривую $y=f(x)$ относительно оси абсцисс, получаем кривую с уравнением $y=-f(x)$.

Функция $y=-f(x)$ – уже неотрицательна на $[a,b]$ и площадь под этой кривой на $[a,b]$ равна искомой площади.

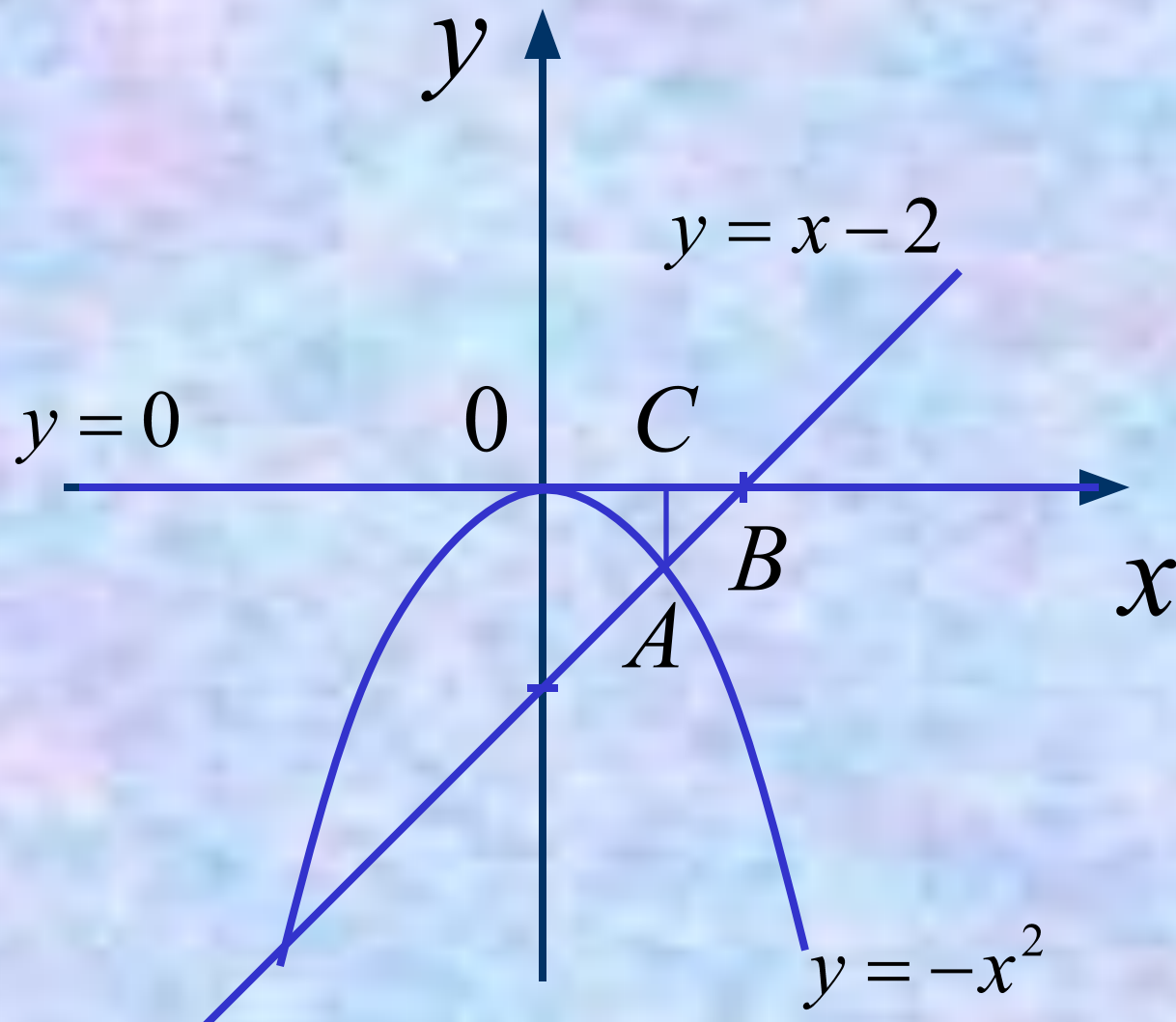
$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями:

$$y = -x^2, \quad y = 0, \quad y = x - 2$$

Решение:



S_{OAB} – это площадь над кривой OAB на отрезке $[0;2]$. Но эта кривая задается не одним уравнением, поэтому разбиваем площадь OAB на части, проецируя точку A на ось x .

$$S_{OBA} = S_{OAC} + S_{CAB}$$

Находим координаты точек $O(0,0)$, $B(2,0)$, $A(1,-1)$.

$$S_{OAC} = -\int_0^1 (-x^2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

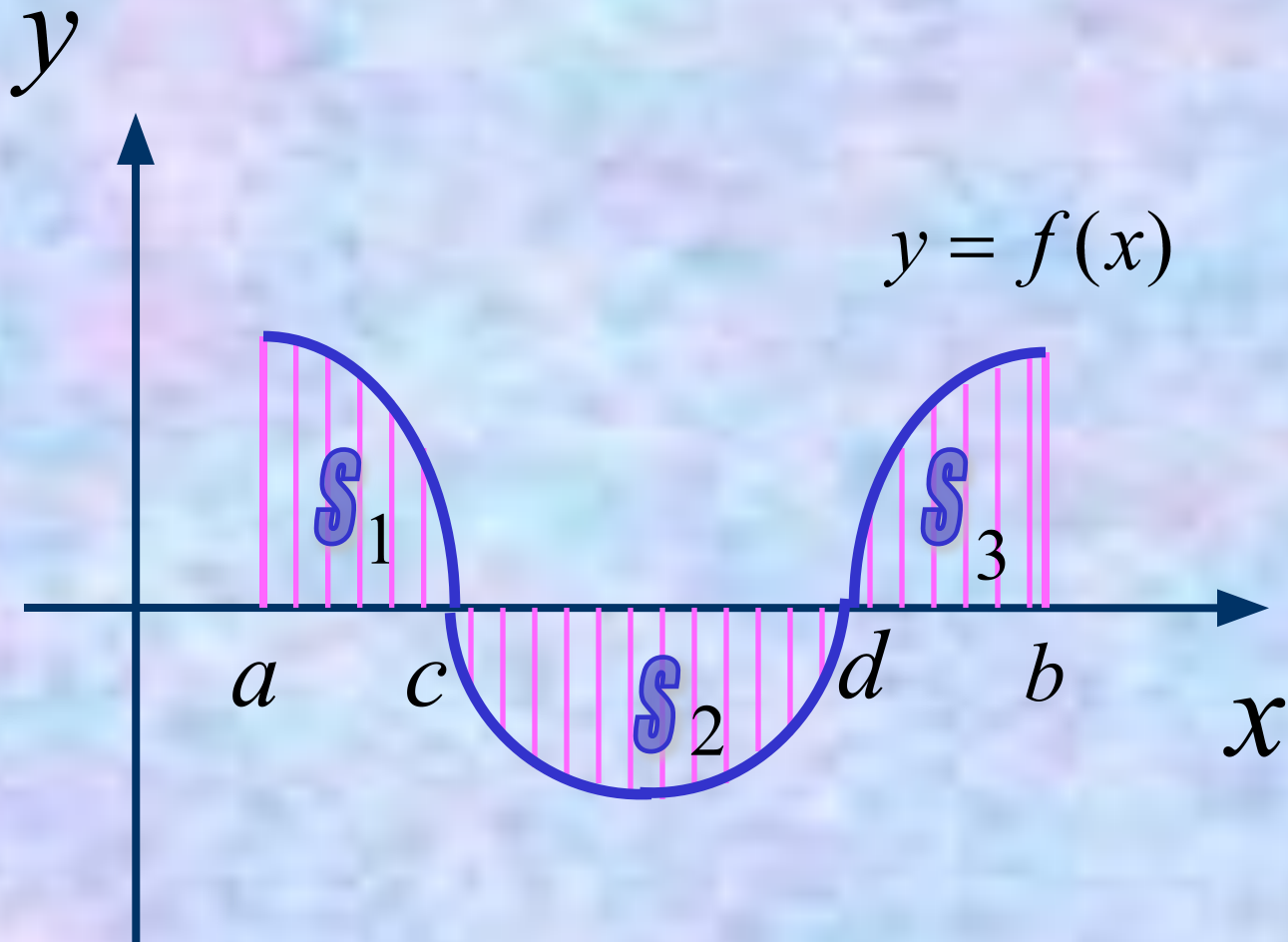
$$S_{ABC} = -\int_1^2 (x-2) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$S_{OBA} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (кв.единиц)}$$

3 → Пусть функция $y=f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$ и исходный отрезок можно разбить на определенное число интервалов, таких что на каждом из них $y=f(x)$ знакопостоянна или равна 0.

Тогда общая площадь под кривой будет равна сумме площадей на каждом из отрезков разбиения:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$



$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 = \\ &= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \end{aligned}$$



Теорема.

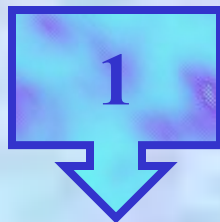
Пусть на $[a,b]$ заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, такие что

$$f_2(x) \geq f_1(x)$$

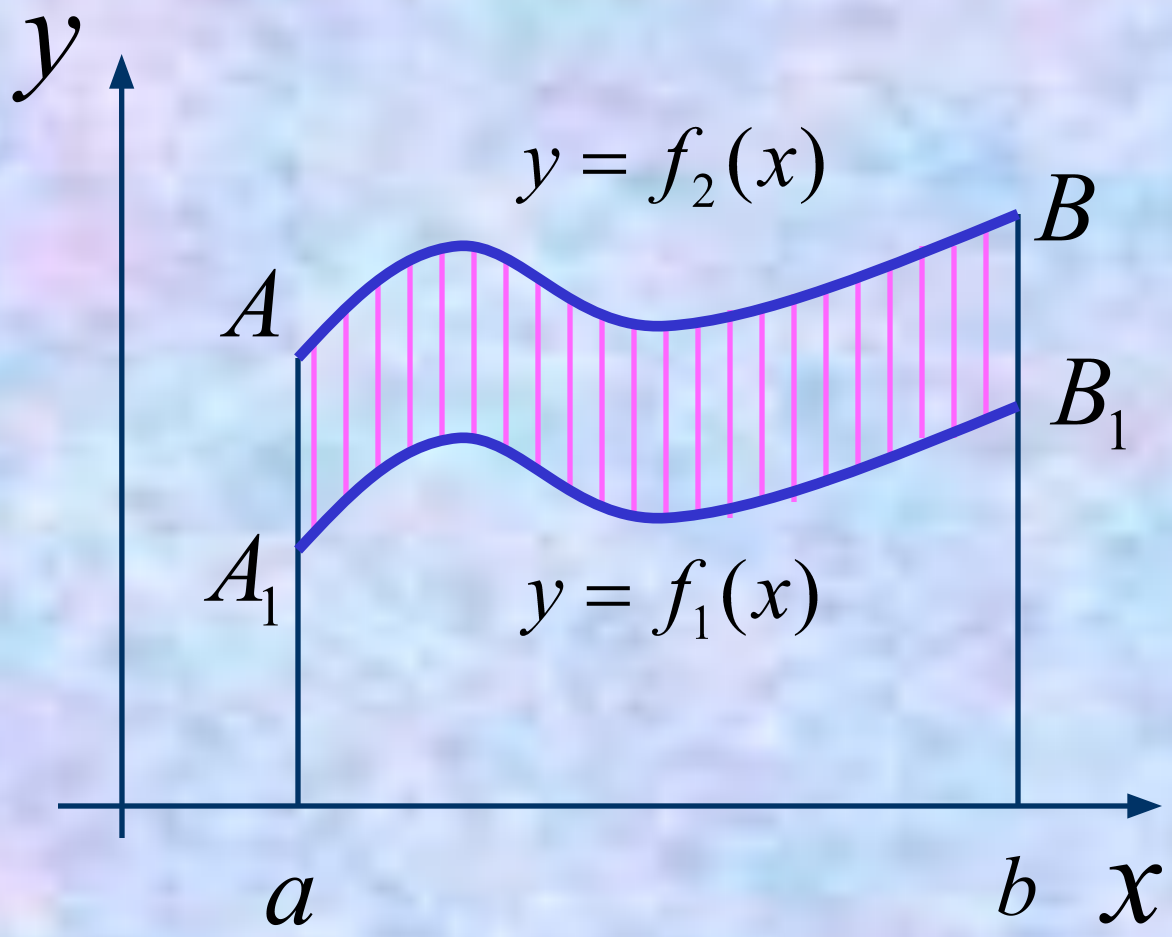
Тогда площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ на $[a,b]$ находится по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

Проиллюстрируем эту теорему графически.
Рассмотрим несколько случаев.



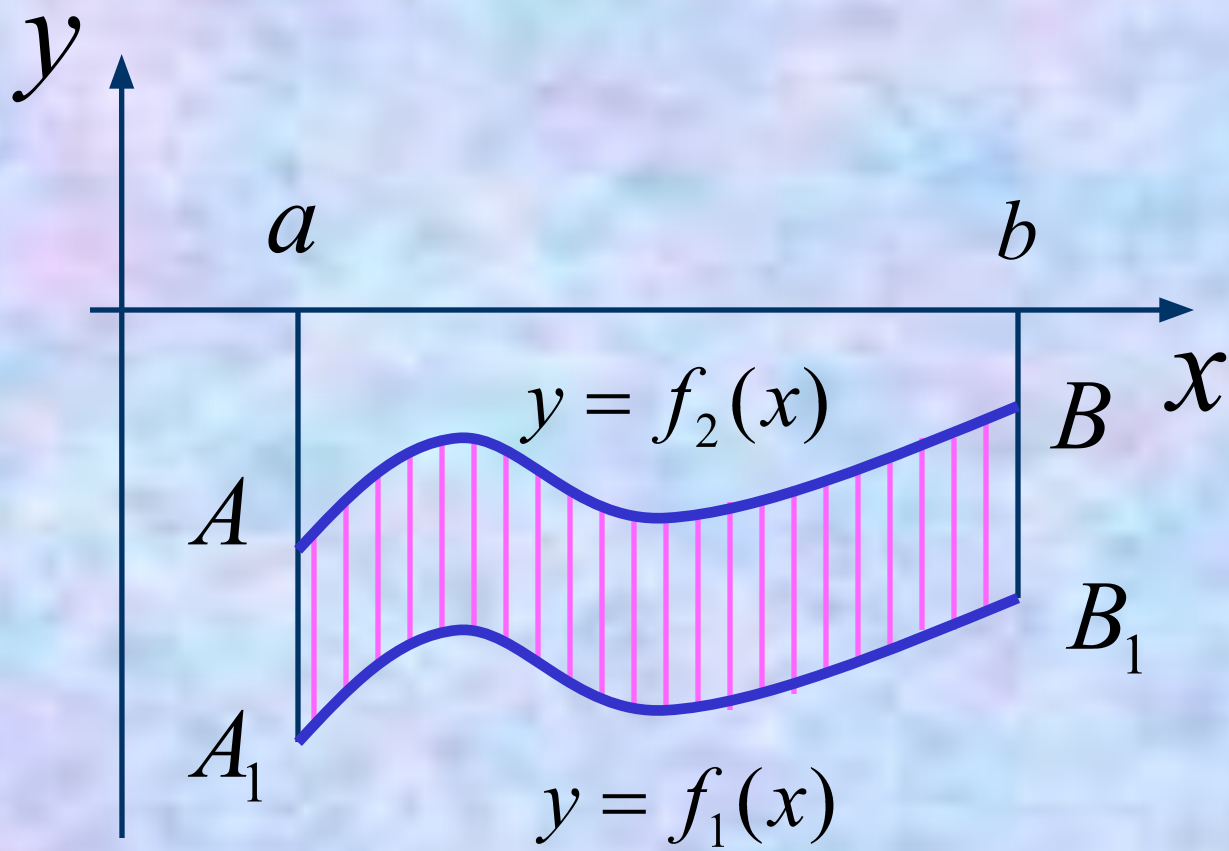
$$f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$$



$$\begin{aligned} S &= S_{aABb} - S_{aA_1B_1b} = \\ &= \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \\ &= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \end{aligned}$$

2

$$0 \geq f_2(x) \geq f_1(x)$$



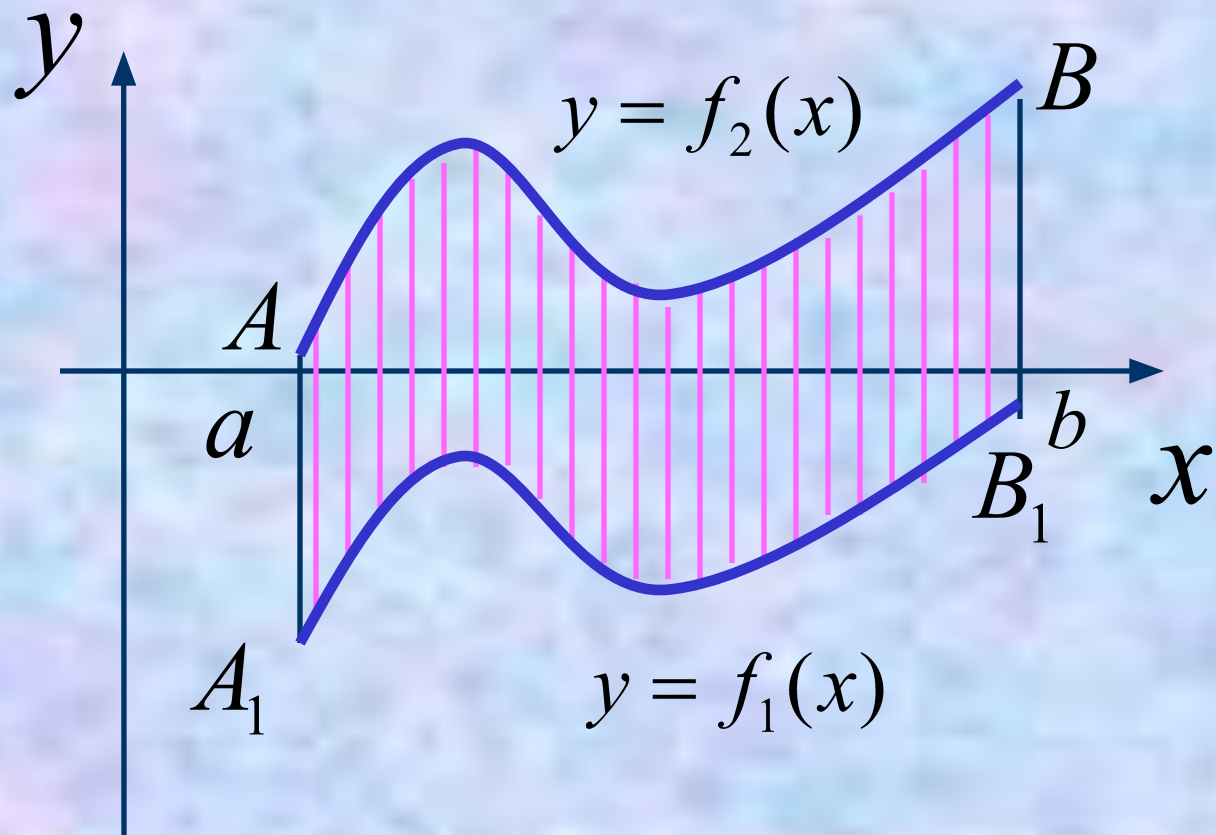
$$\begin{aligned} S &= S_{aA_1B_1b} - S_{aABb} = \\ &= -\int_a^b f_1(x)dx - \left(-\int_a^b f_2(x)dx \right) = \\ &= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \end{aligned}$$

3

$$f_2(x) \geq f_1(x)$$

$$f_2(x) \geq 0$$

$$f_1(x) \leq 0$$



$$S = S_{aABb} + S_{aA_1B_1b} =$$

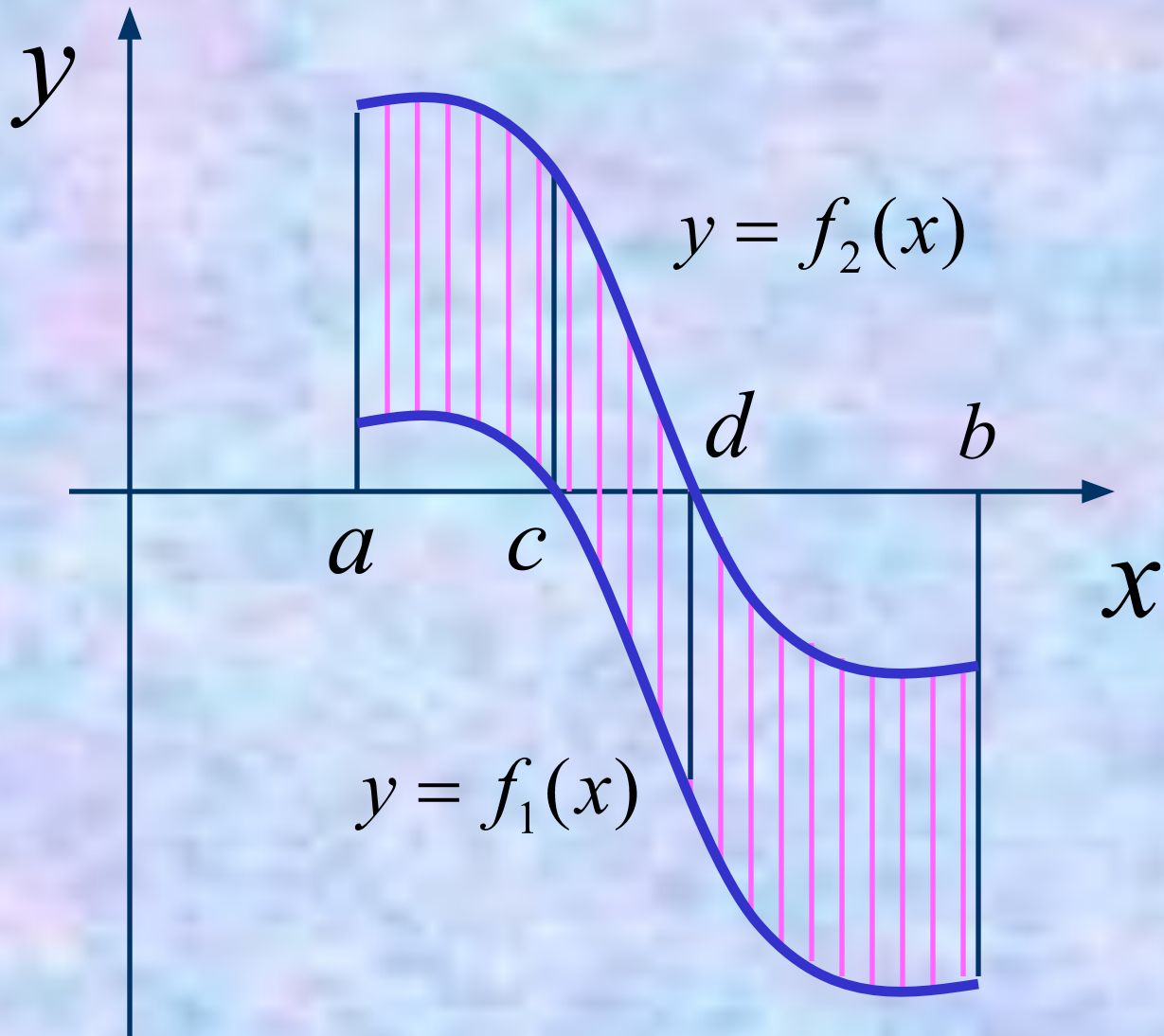
$$= \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx =$$

$$= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

4

Общий случай.

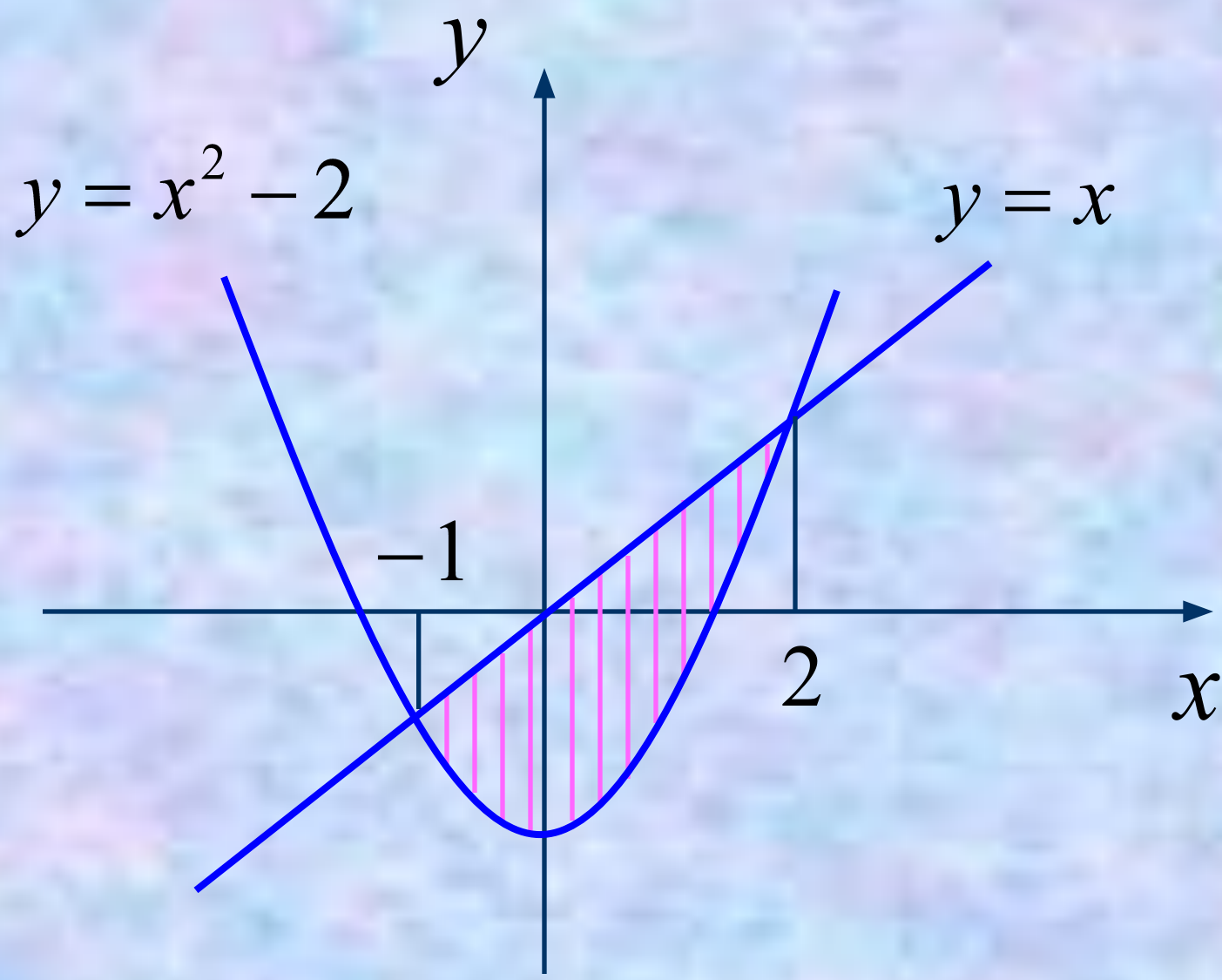
Этот случай сводится к рассмотренным случаям 1-3, если разбить отрезок $[a,b]$ на элементарные отрезки.



Пример.

*Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями:*

$$y = x^2 - 2, \quad y = x$$



Решение:

Находим координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$$

Следовательно, линии пересекаются в точках

$$(-1, -1), \quad (2, 2)$$

$$f_1(x) = x^2 - 2, \quad f_2(x) = x$$

$$S = \int_1^2 (x - x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_1^2 = 4,5 \quad (\text{кв.ед.})$$

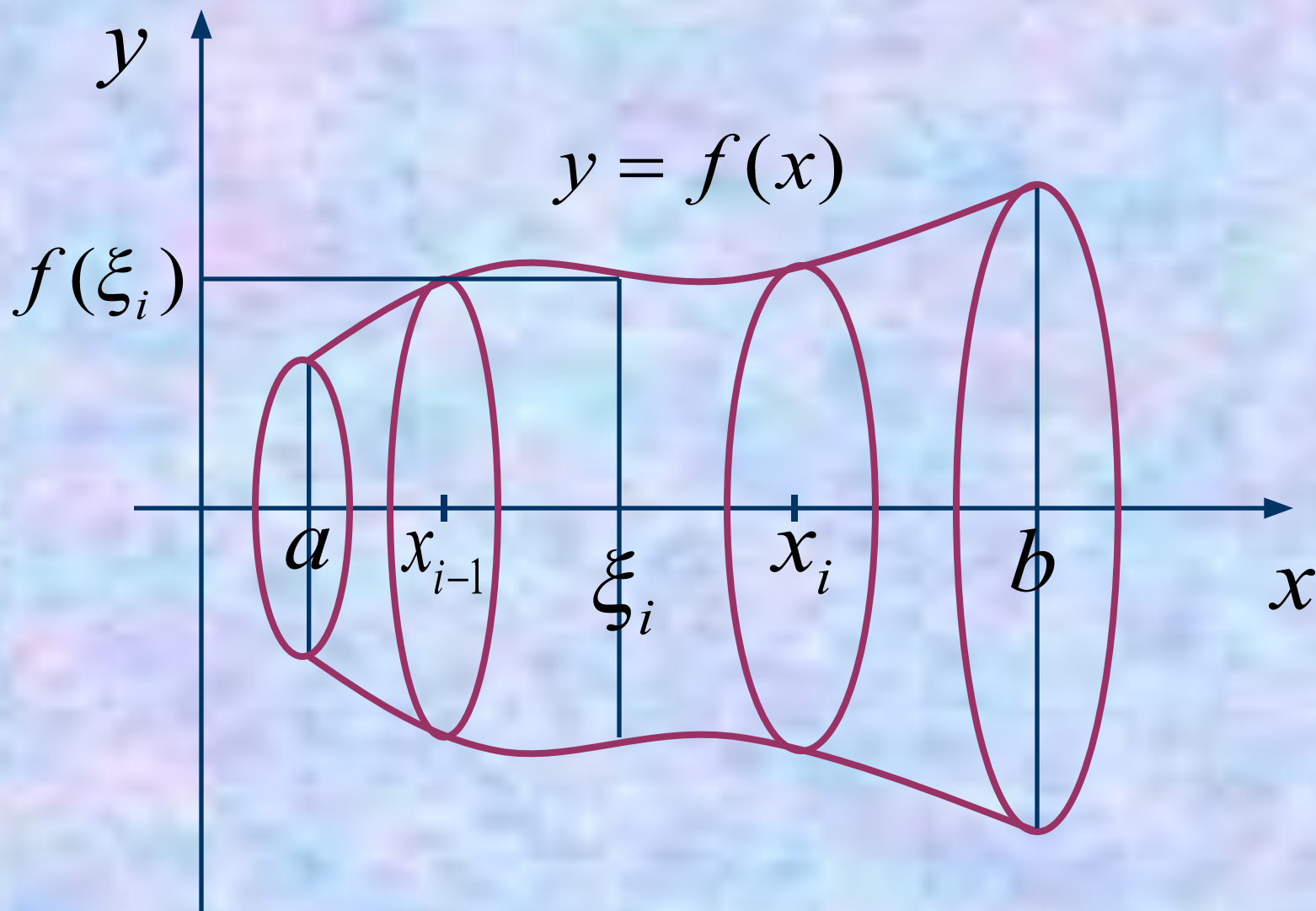
2. Вычисление объемов тел вращения

Пусть функция $y=f(x)$ – знакопостоянная и непрерывна на $[a,b]$. Найти объем тела V_x , образованного вращением вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$.

Разобьем $[a,b]$ на элементарные отрезки точками

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

и на каждом из отрезков выберем точку ξ_i . Найдем значение функции в этой точке $f(\xi_i)$



Тогда некоторое приближение для искомого объема даст сумма

$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i$$

Так как каждое слагаемое это объем цилиндра с высотой

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

и радиусом основания $f(\xi_i)$

Искомый объем будет тем точнее, чем меньше длина отрезков разбиения Δx_i

Поэтому за объем естественно выбрать

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i$$

Правая часть выражения представляет собой предел интегральной суммы функции

$$\pi f^2(x)$$

Поэтому

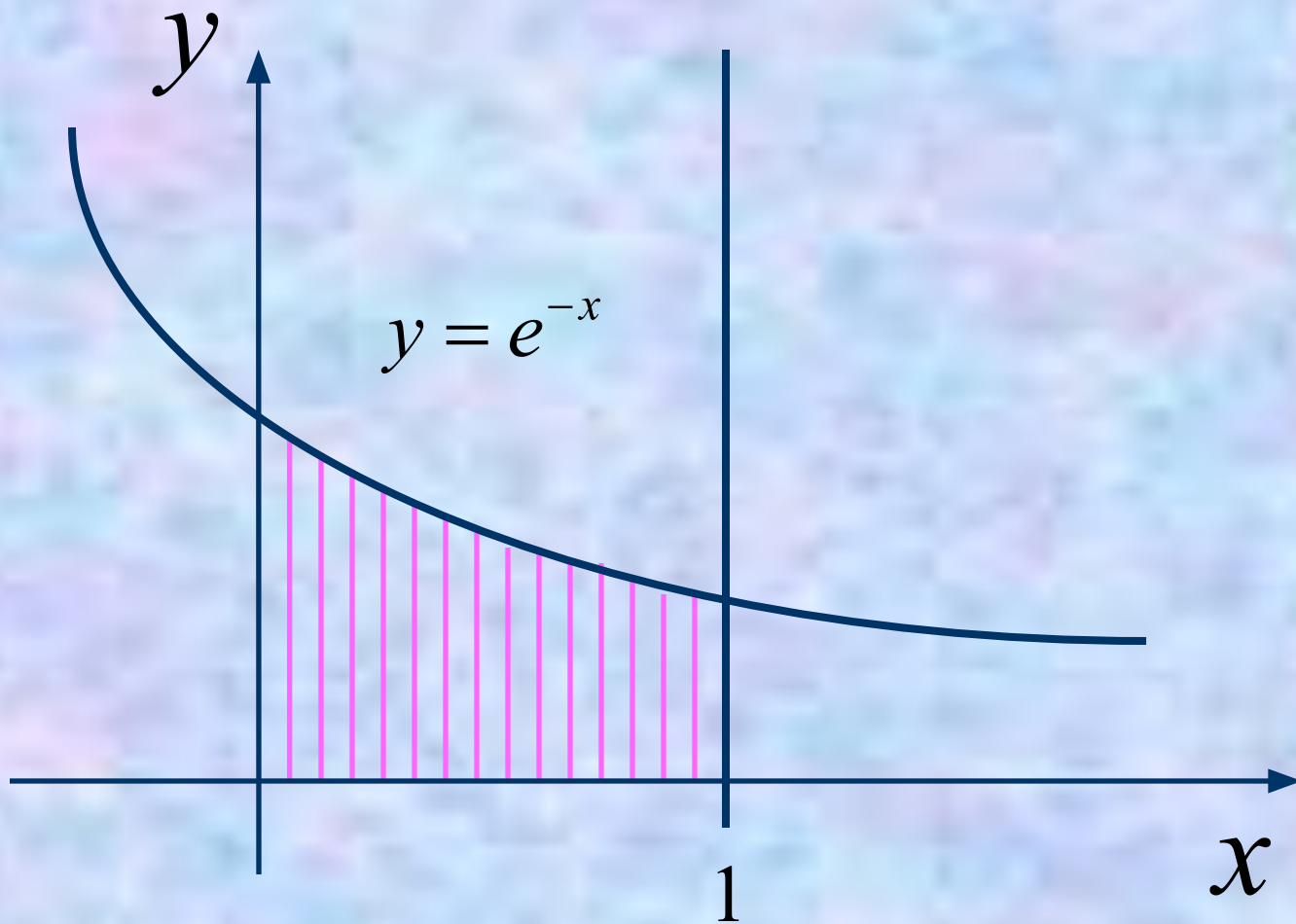
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример.

*Вычислить объем тела,
полученного от вращения вокруг оси
абсцисс фигуры, ограниченной линиями:*

$$y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

Решение:



$$V_x = \pi \int_0^1 e^{-2x} dx = -\pi \cdot \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) = 1.36 \quad (\text{куб.единиц})$$

Если заменить x на y , то получим формулу для вычисления объема тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси y .

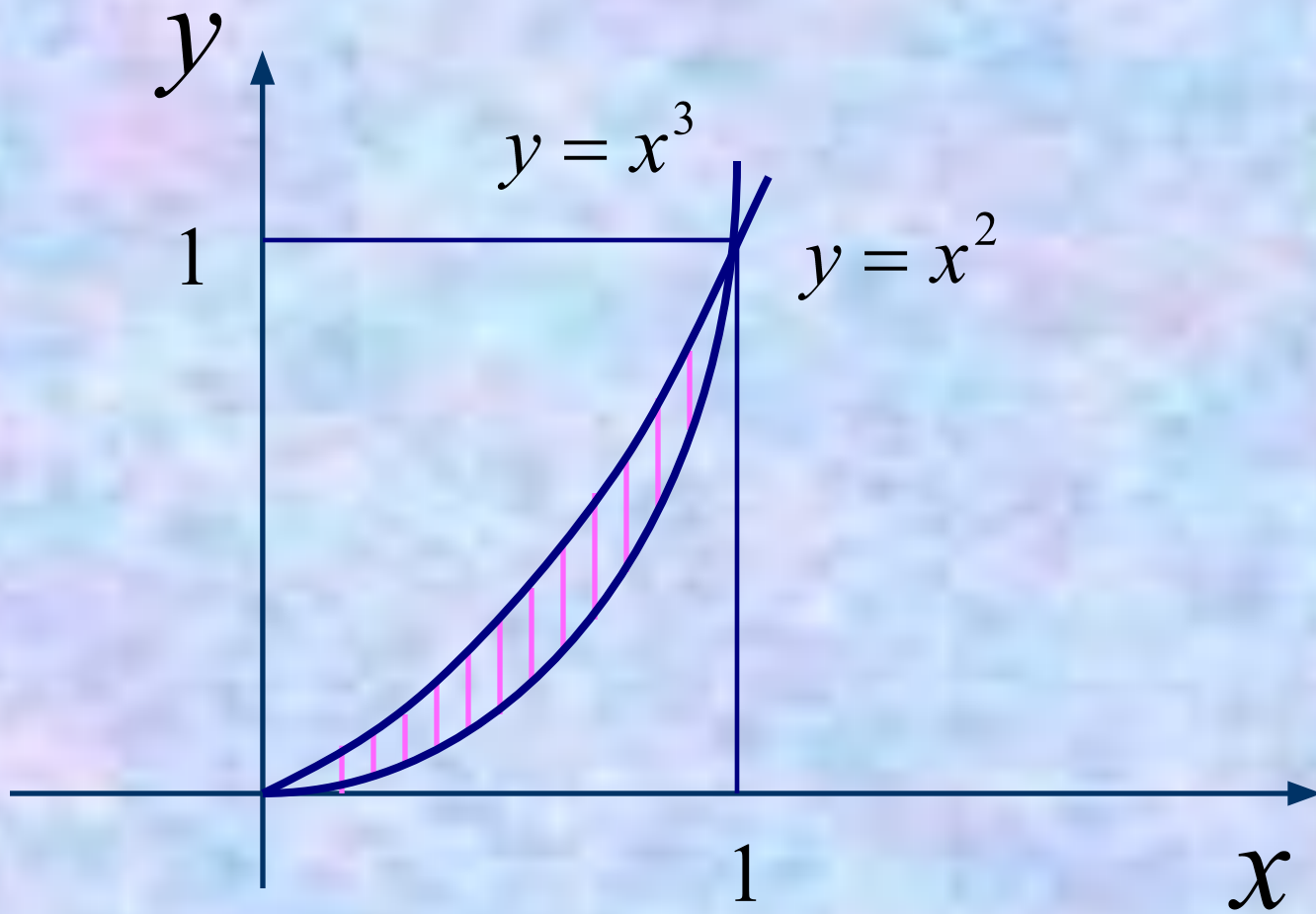
$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$$

Пример.

*Вычислить объем тела,
полученного от вращения вокруг оси
ординат фигуры, ограниченной линиями:*

$$y = x^2, \quad y = x^3$$

Решение:



$$V_y = V_{y1} - V_{y2}$$

V_{y1} **ограничен линиями** $x = \sqrt[3]{y}$, $x = 0$, $y = 1$

V_{y2} **ограничен линиями** $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 1$

$$V_{y1} = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{5} \pi$$

$$V_{y2} = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_y = \frac{3}{5} \pi - \frac{1}{2} \pi = 0.1\pi \text{ (куб.единиц)}$$