14.4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление площадей плоских фигур

1 **Пусть функция y=*f(x)* –неотрицательная и непрерывна на [*a,b*]. Тогда площадь под кривой y=*f(x)* численно равна определенному интегралу от этой функции на [*a,b*].**

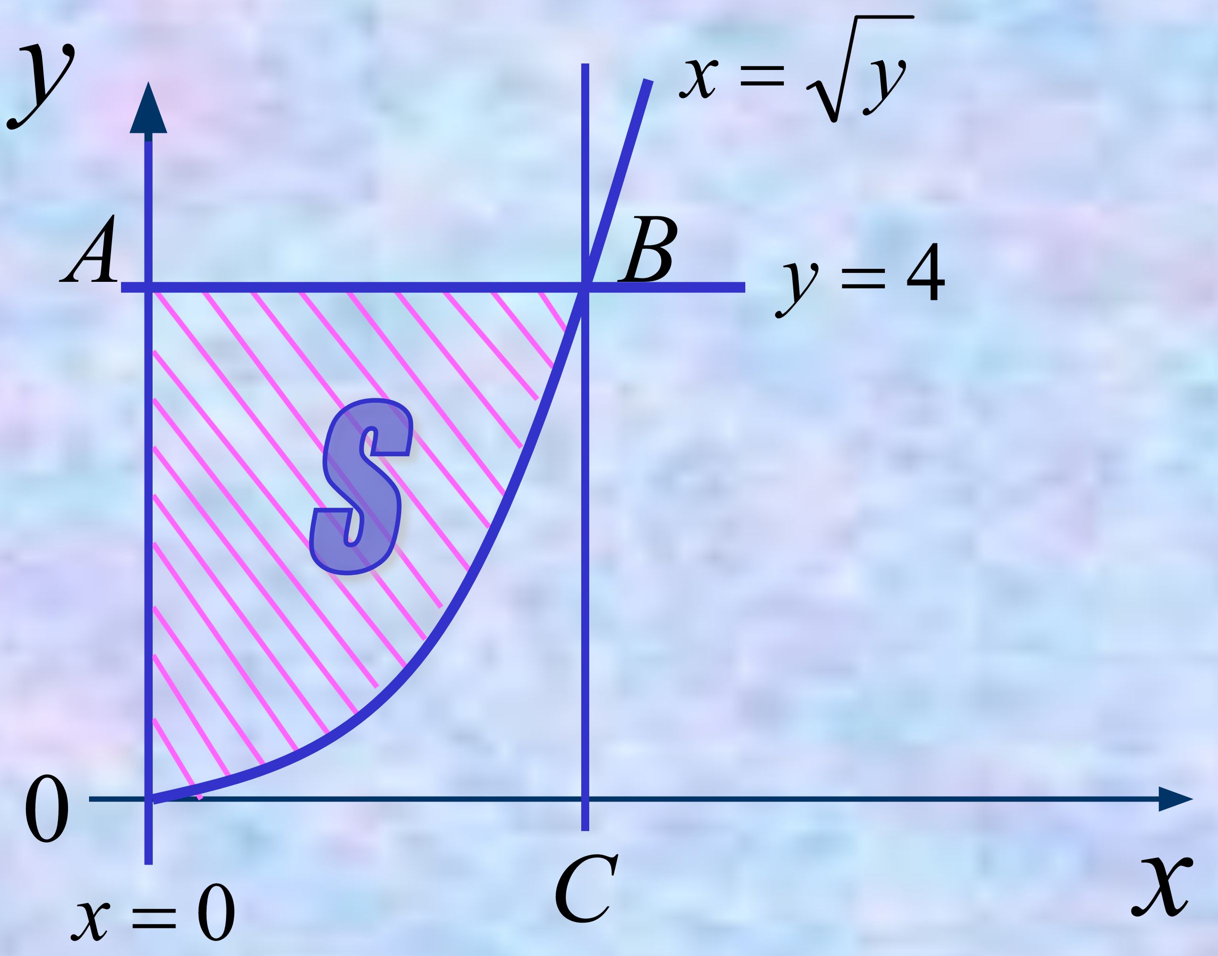
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 4$$

Решение:



$$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OBC}$$

Находим координаты точки *B*:

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2,4)$$

Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4dx = 4x\Big|_0^2 = 8$$

$$S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S_{ABC} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\ (кв.единиц)$$

2 **Пусть функция y=*f(x)* – неположительная и непрерывна на [*a,b*]. Отражая кривую y=*f(x)* относительно оси абсцисс, получаем кривую с уравнением y=-*f(x)*.**

Функция y=-*f(x)* – уже неотрицательна на [*a,b*] и площадь под этой кривой на [*a,b*] равна искомой площади.

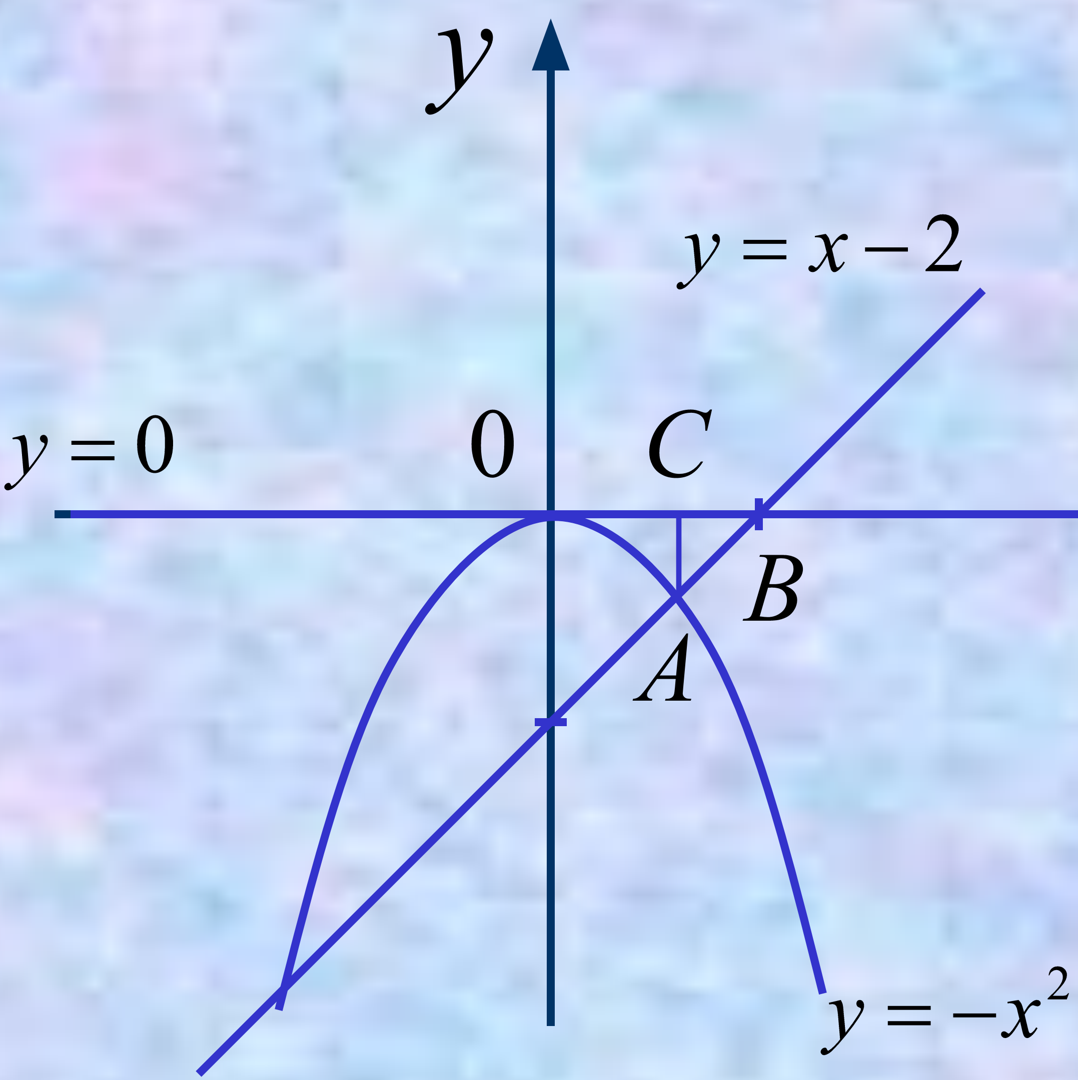
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x^2, \quad y = 0, \quad y = x - 2$$

Решение:



S_{OAB} – это площадь над кривой *OAB* на отрезке *[0;2]*. Но эта кривая задается не одним уравнением, поэтому разбиваем площадь *OAB* на части, проецируя точку *A* на ось *x*.

$$S_{OBA} = S_{OAC} + S_{CAB}$$

Находим координаты точек *O(0,0), B(2,0), A(1,-1).*

$$S_{OAC} = -\int_0^1 (-x^2)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

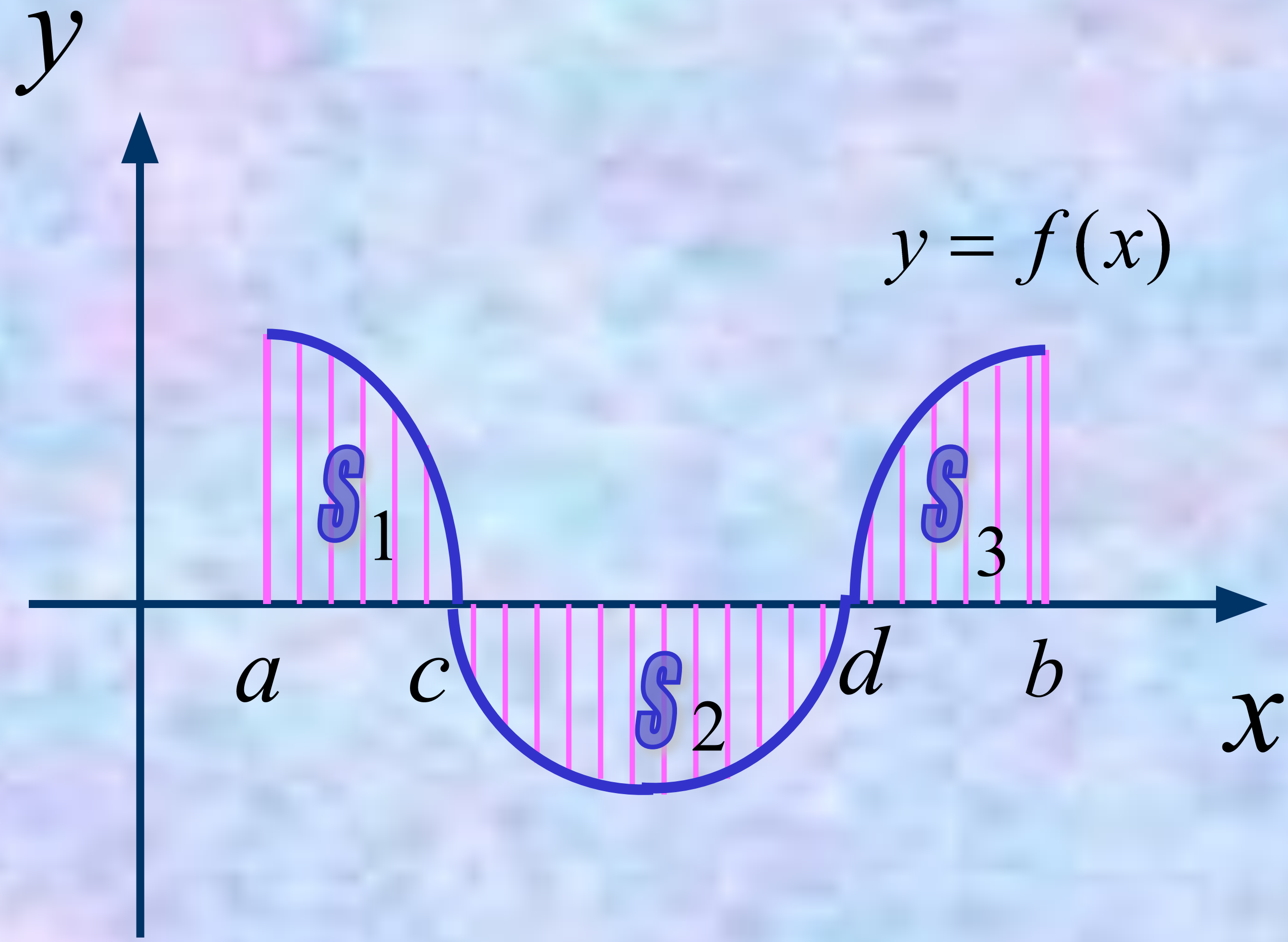
$$S_{ABC} = -\int_1^2 (x-2)dx = \left.\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\right|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$S_{OBA} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\ (\text{кв.единиц})$$

3 **Пусть функция y=*f(x)* – непрерывна на [*a,b*] и исходный отрезок можно разбить на определенное число интервалов, таких что на каждом из них y=*f(x)* знакопостоянна или равна 0.**

Тогда общая площадь под кривой будет равна сумме площадей на каждом из отрезков разбиения:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$


y
y = f(x)
S 1
S 2
S 3
a
c
d
b
x

$$S = S_1 + S_2 + S_3 =$$

$$= \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

4

Теорема.

Пусть на [a,b] заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, такие что

$$f_2(x) \geq f_1(x)$$

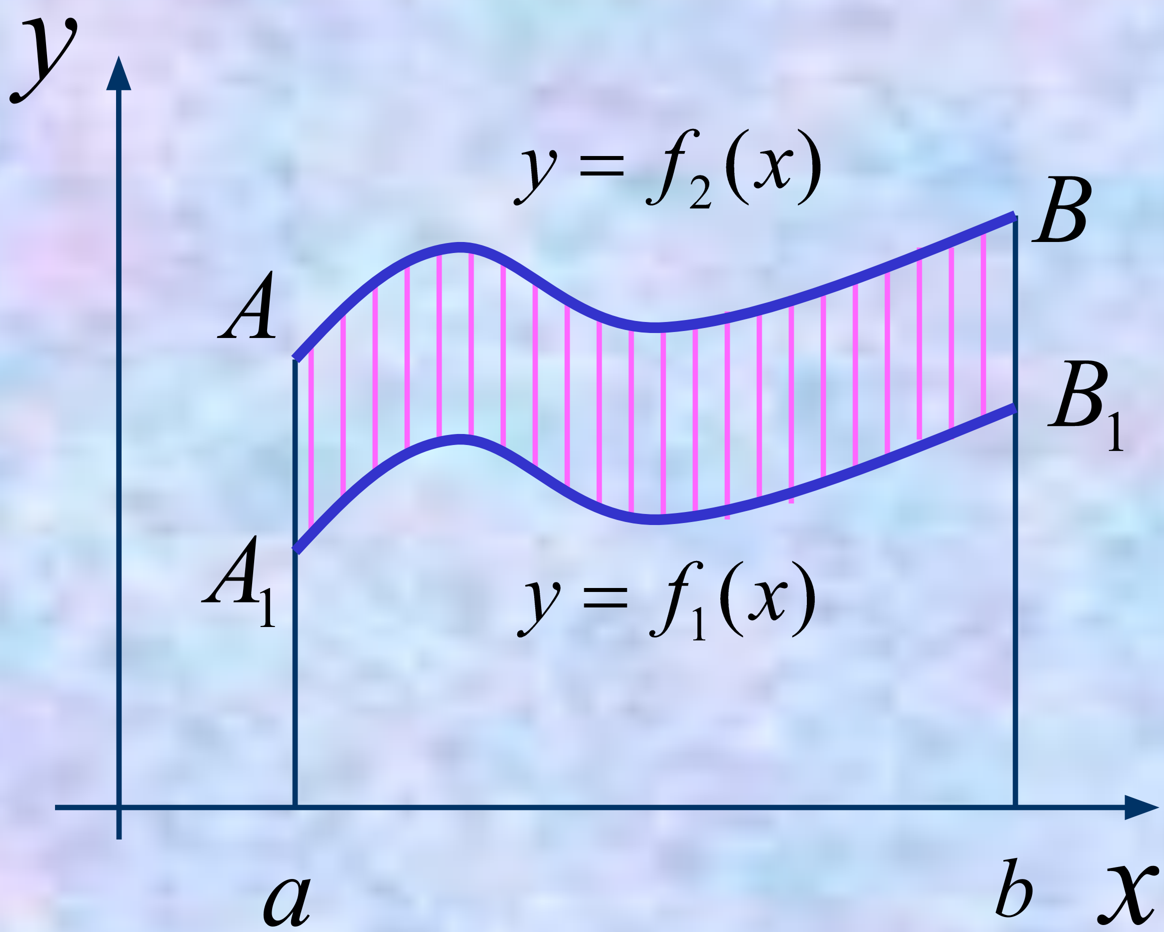
Тогда площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ на [a,b] находится по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

Проиллюстрируем эту теорему графически. Рассмотрим несколько случаев.

1

$$f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$$



y
$y = f_2(x)$
B
A
B_1
A_1
$y = f_1(x)$
a
b
x

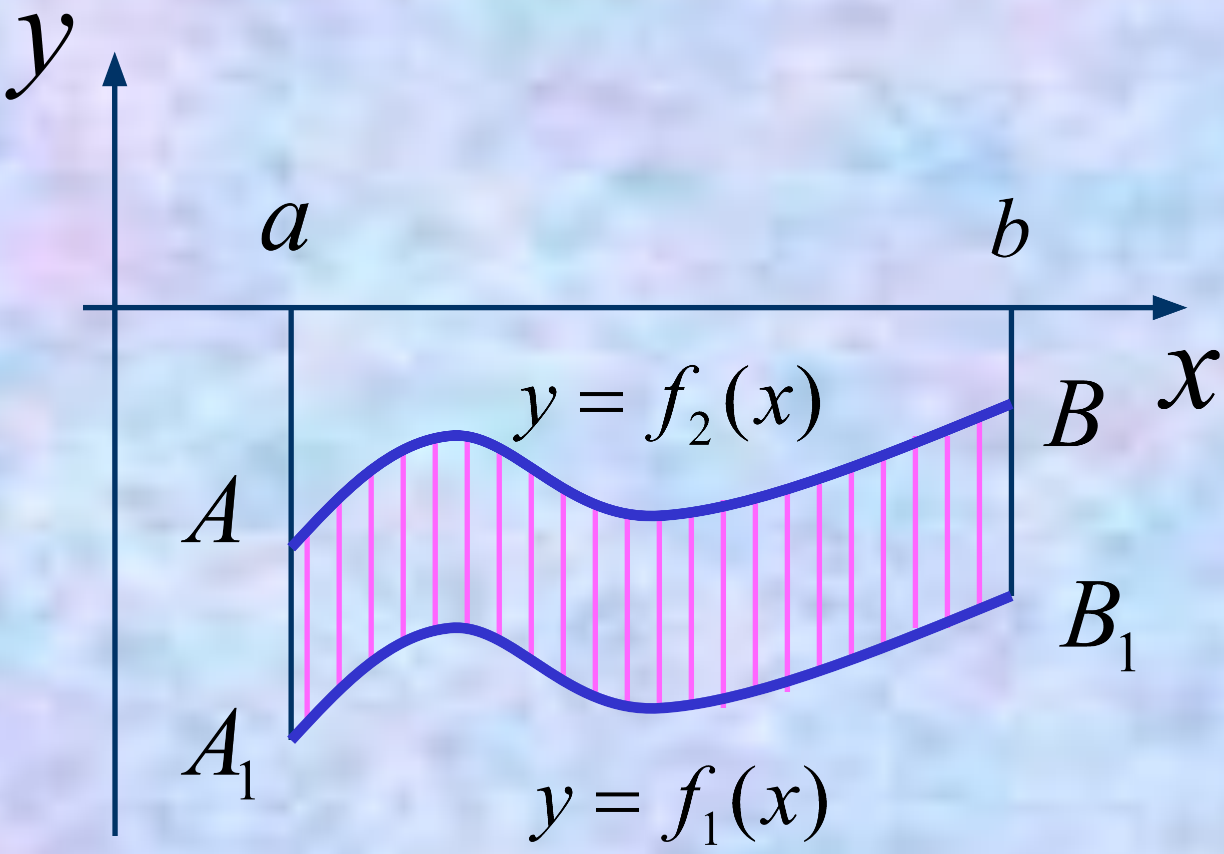
$$S = S_{aABb} - S_{aA_1B_1b} =$$

$$= \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

2

$$0 \geq f_2(x) \geq f_1(x)$$



y
a
b
x
$y = f_2(x)$
B
A
B_1
A_1
$y = f_1(x)$

$$S = S_{aA_1B_1b} - S_{aABb} =$$

$$= -\int_a^b f_1(x)dx - \left(-\int_a^b f_2(x)dx \right) =$$

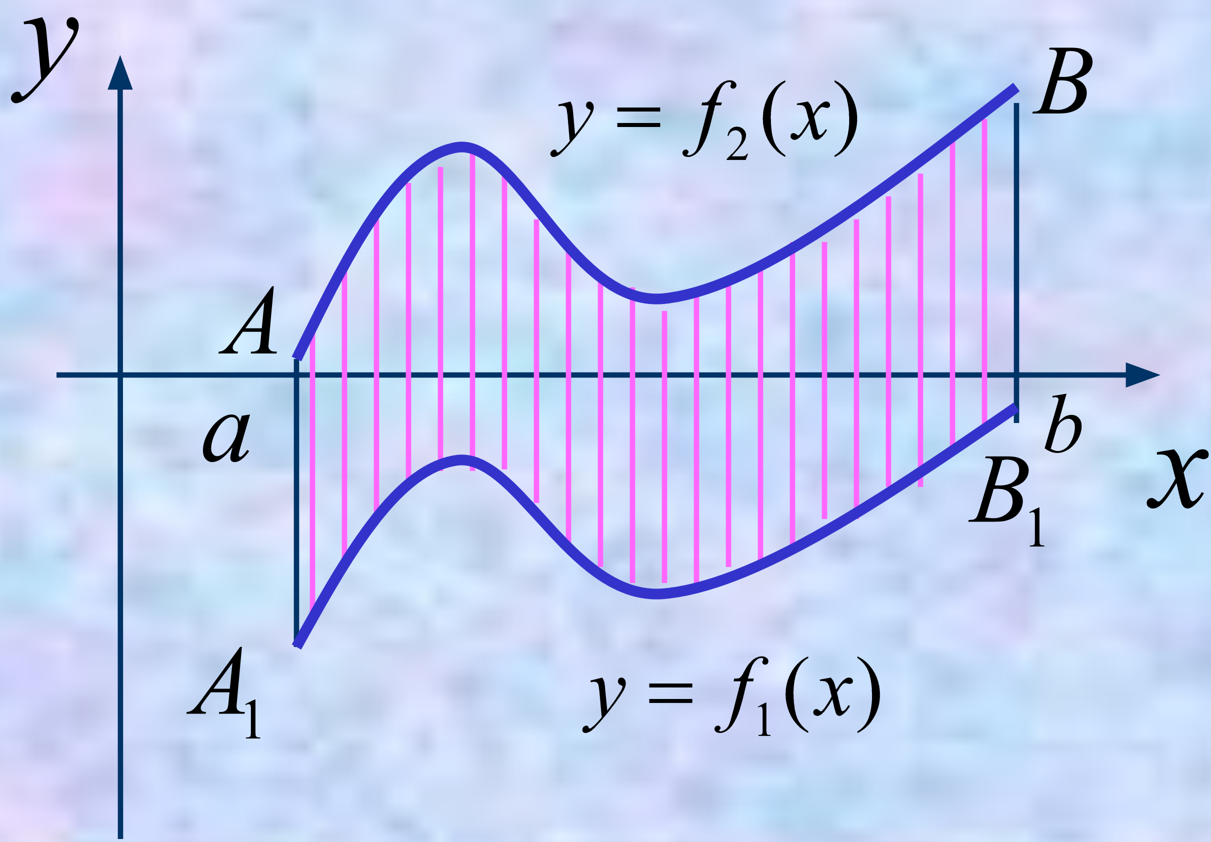
$$= \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$$

3

$$f_2(x) \geq f_1(x)$$

$$f_2(x) \geq 0$$

$$f_1(x) \leq 0$$


y
B
$y = f_2(x)$
A
a
b
x
B_1
A_1
$y = f_1(x)$

$$S = S_{aABb} + S_{aA_1B_1b} =$$

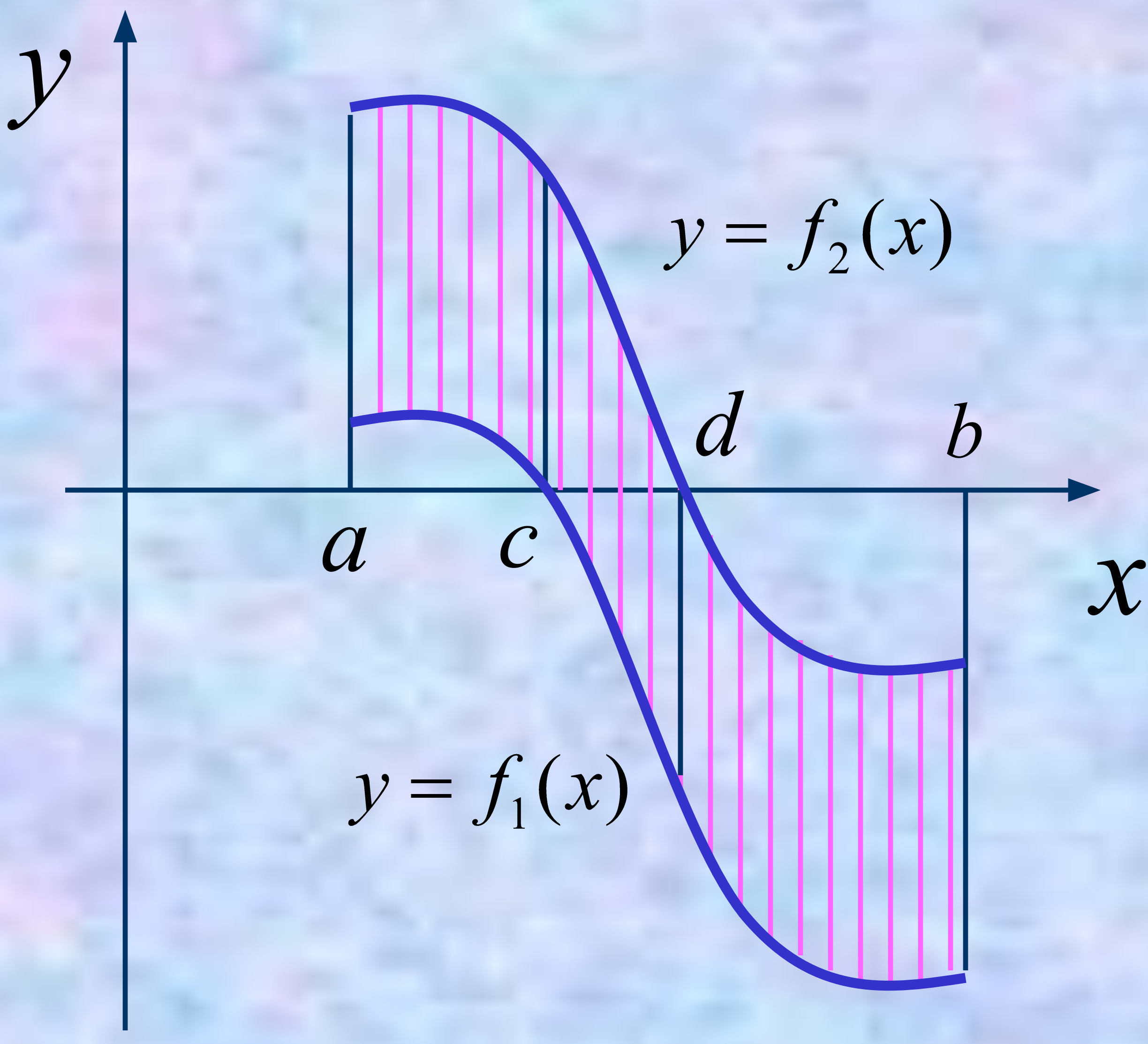
$$= \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

4

***Общий случай*.**

Этот случай сводится к рассмотренным случаям 1-3, если разбить отрезок [a,b] на элементарные отрезки.

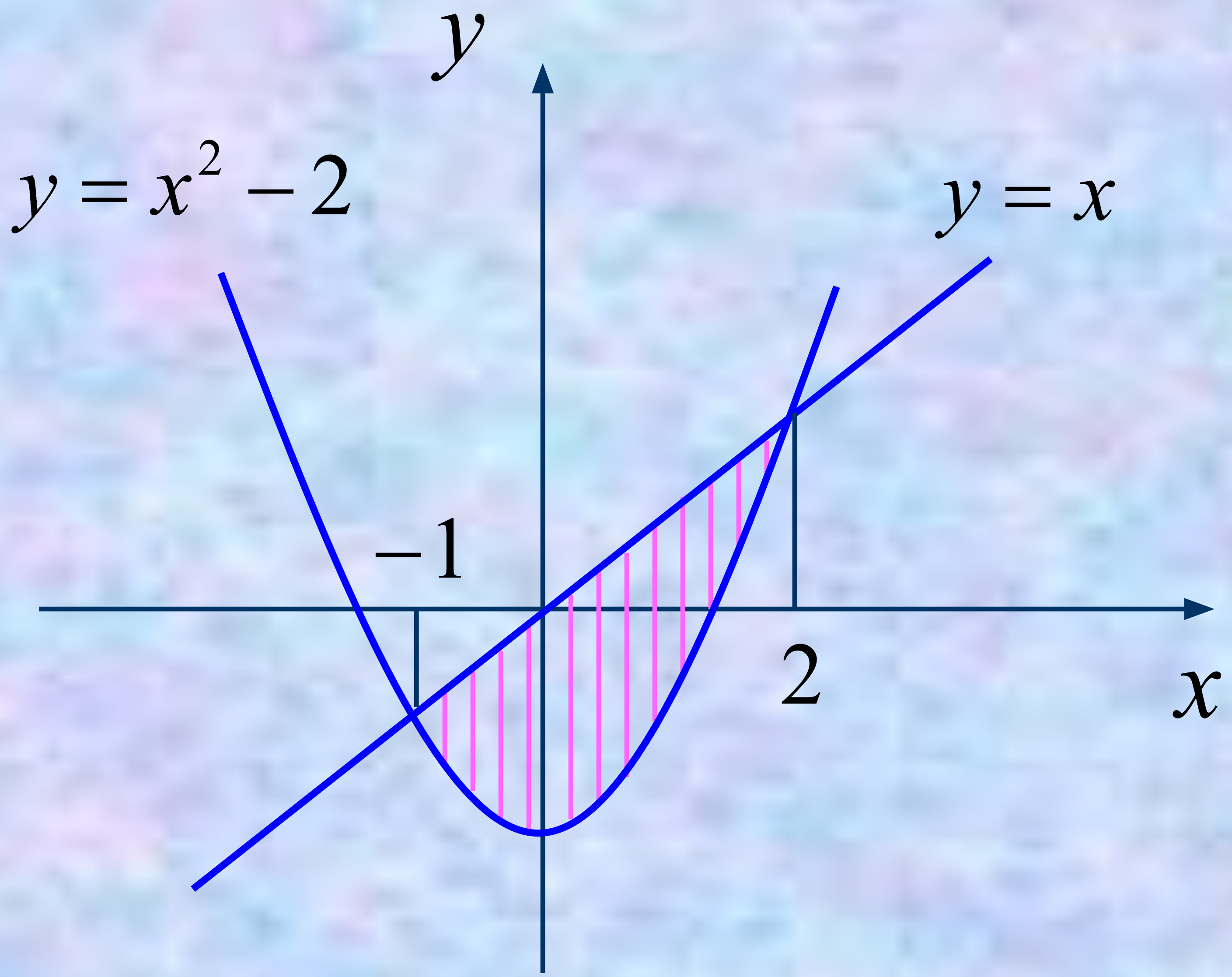


y
$y = f_2(x)$
d
b
a
c
x
$y = f_1(x)$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = x$$



y
$y = x^2 - 2$
$y = x$
-1
2
x

Решение:

Находим координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\, x_2 = 2$$

Следовательно, линии пересекаются в точках

$$(-1,-1), \quad (2,2)$$

$$f_1(x) = x^2 - 2, \quad f_2(x) = x$$

$$S = \int_1^2 (x - x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right)\Bigg|_1^2 = 4{,}5 \quad (\text{кв.ед.})$$

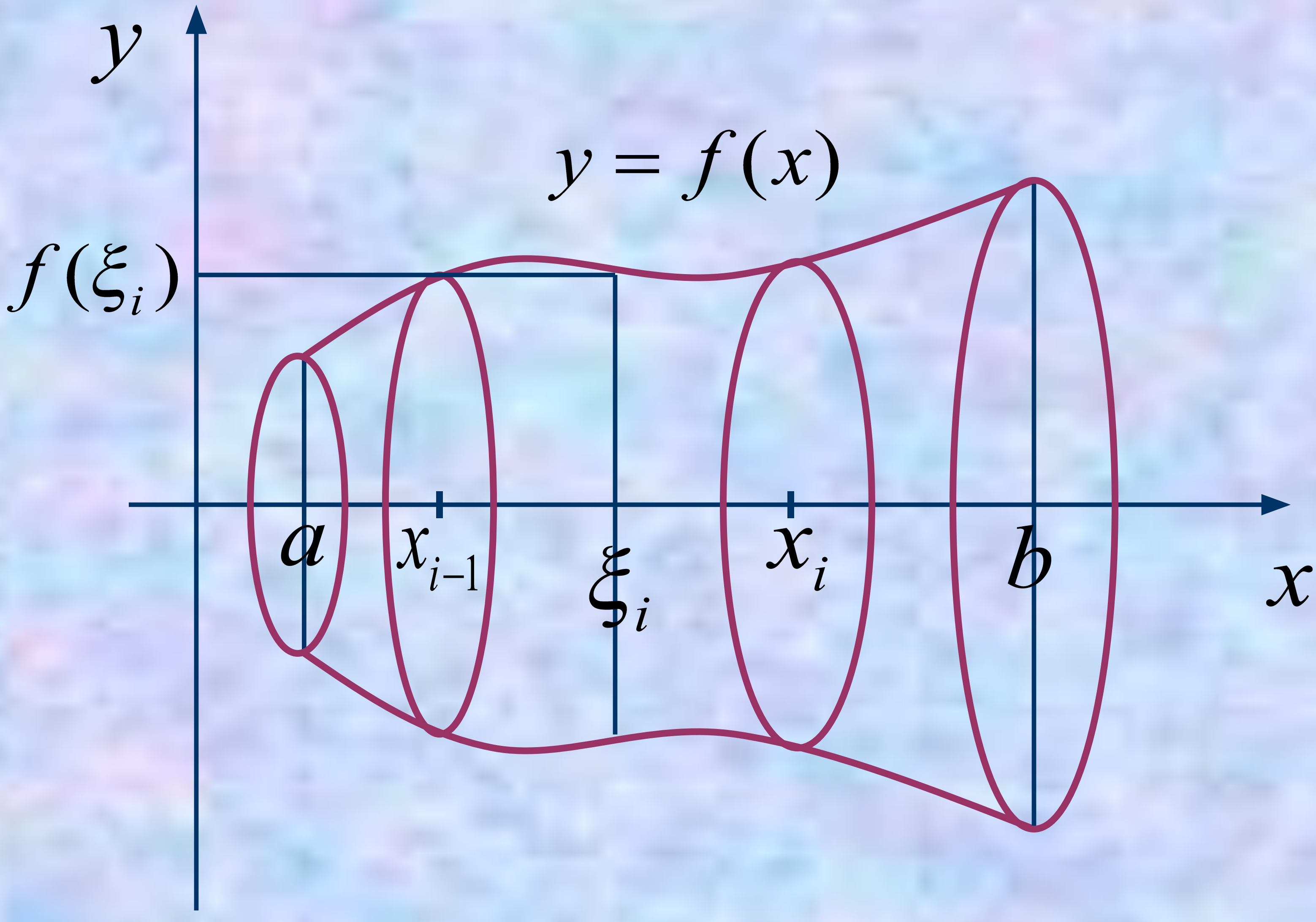
2. Вычисление объемов тел вращения

Пусть функция у=*f(x)* –знакопостоянная и непрерывна на [*a,b*]. Найти объем тела V_x, образованного вращением вокруг оси *х* криволинейной трапеции, ограниченной линиями: *y=f(x), y=0, x=a, x=b.*

Разобьем [*a,b*] на элементарные отрезки точками

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

и на каждом из отрезков выберем точку ξ_i. Найдем значение функции в этой точке $f(\xi_i)$



y
$y = f(x)$
$f(\xi_i)$
a
x_{i-1}
ξ_i
x_i
b
x

Тогда некоторое приближение для искомого объема даст сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^{2}(\xi_i)\Delta x_i$$

Так как каждое слагаемое это объем цилиндра с высотой

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

и радиусом основания $f(\xi_i)$

Искомый объем будет тем точнее, чем меньше длина отрезков разбиения Δx_i

Поэтому за объем естественно выбрать

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

Правая часть выражения представляет собой предел интегральной суммы функции

$$\pi f^2(x)$$

Поэтому

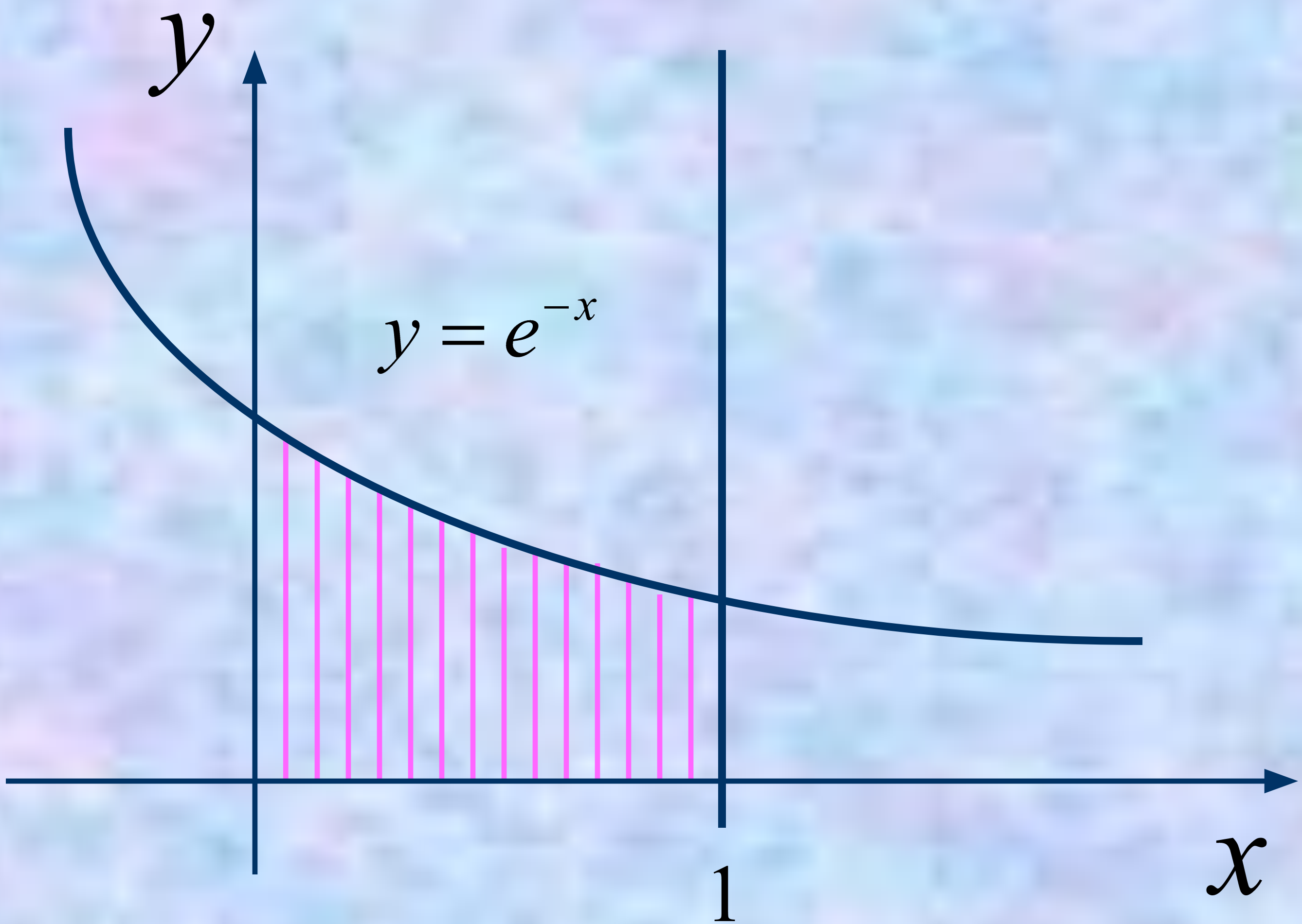
$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

Решение:



$$V_x = \pi \int_0^1 e^{-2x} dx = -\pi \cdot \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = 1.36 \quad (\textit{куб.единиц})$$

Если заменить *x* на *y*, то получим формулу для вычисления объема тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси *y*.

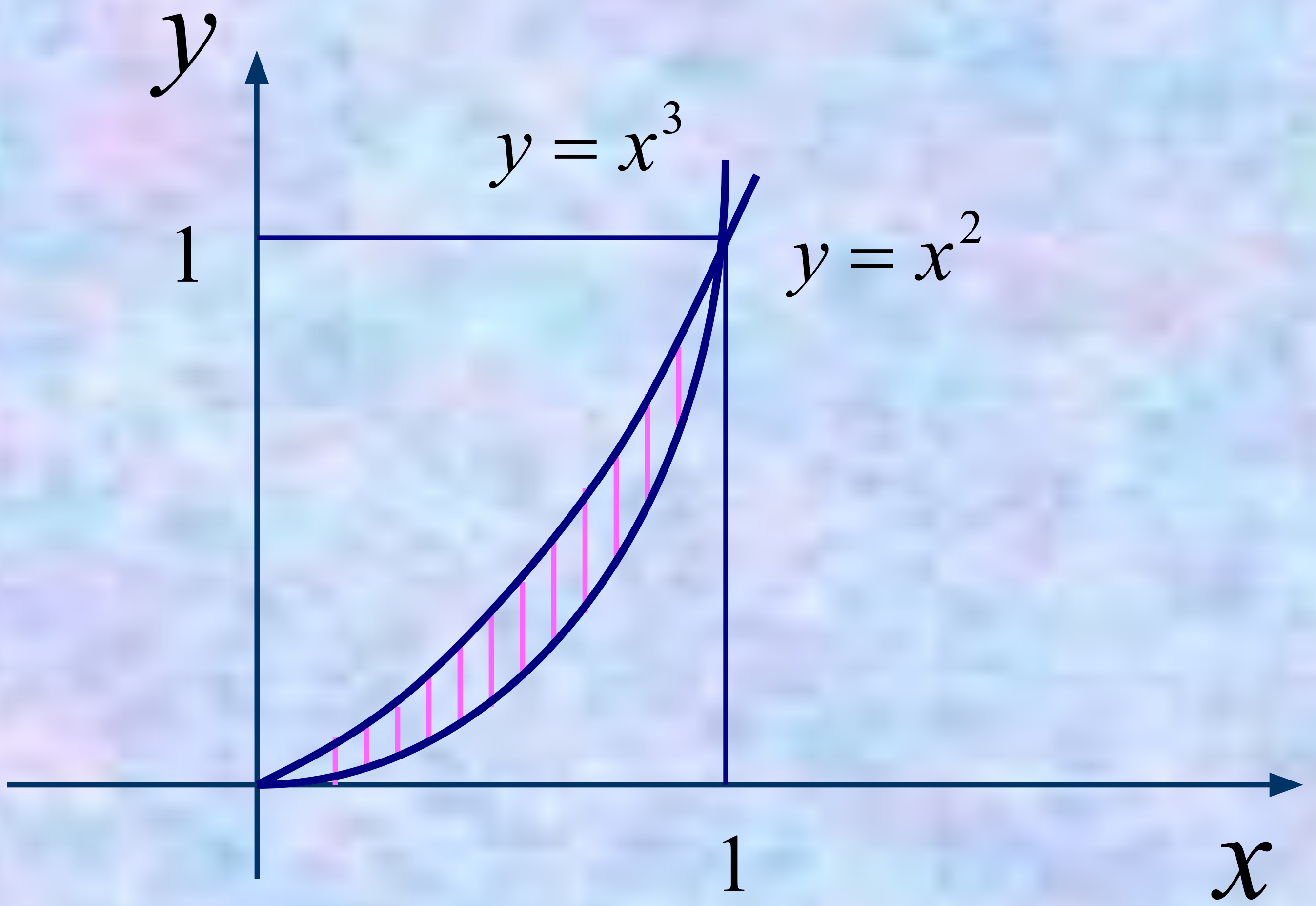
$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, \quad y = x^3$$

Решение:



$$V_y = V_{y1} - V_{y2}$$

V_{y1} **ограничен линиями** $x = \sqrt[3]{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

V_{y2} **ограничен линиями** $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

$$V_{y1} = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{5}\pi$$

$$V_{y2} = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_y = \frac{3}{5}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0.1\pi \ (куб.единиц)$$