ДУ и численные методы
2 семестр

Лекция 8

Системы дифференциальных уравнений

Введение

- Во многих задачах математики, физики и техники требуется определить несколько функций, связанных между собой несколькими дифференциальными уравнениями.
- Для этого необходимо располагать, вообще говоря, таким же числом уравнений. Если каждое из этих уравнений является дифференциальным, то есть имеет вид соотношения, связывающего неизвестные функции и их производные, то говорят *о системе дифференциальных уравнений.*

Основные понятия теории СДУ

Определение. Система уравнений вида

$$F_i\left(t, x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(m_1)}(t), \dots, x_k(t), x_k'(t), \dots, x_k^{(m_k)}(t)\right) = 0,$$

$$i = \overline{1, s} \qquad t \in (a, b)$$

связывающих независимую переменную t, неизвестные функции $x_1(t), \dots, x_k(t)$ и их производные до порядков $m_1, m_2, \dots m_k$ соответственно, называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений* в общей форме.

Сумма порядков старших производных неизвестных функций, входящих в СДУ, называется *порядком СДУ*.

Определение. Совокупность непрерывно дифференцируемых на (a,b) функций $\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\ , \varphi_k(t)\right) = \overline{\varphi}(t), \quad t \in (a,b),$ называется *решением* СДУ, если она обращает на интервале (a,b) каждое уравнение этой системы в тождество.

Способы представления СДУ

1. Канонический вид.

Определение. Система, которая может быть разрешена относительно старших производных неизвестных функций, называется *канонической:*

$$x_j^{(m_j)}(t) = f_j\left(t; x_1(t), \ldots, x_1^{(m_1-1)}, \ldots, x_k(t), \ldots, x_k^{(m_k-1)}\right).$$

2. Нормальный вид.

Определение. Система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных первого порядка всех искомых функций, называется *нормальной*:

$$x_i'(t) = f_i\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\big).$$

Замечание:

Для неизвестных функций $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ СДУ примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Если СДУ задана в канонической форме, то ее можно записать в нормальной форме, обозначив производные искомых функций через дополнительные неизвестные функции.

Пример: записать СДУ в нормальной форме.

$$\begin{cases} y'' = x' + y + 2 \\ x' = y' - x \end{cases}$$

Обозначим $y' = z$, тогда $\begin{cases} y' = z \\ x' = z - x \\ z' = z - x + y + 2 \end{cases}$.

Определение. *Интегралом* нормальной системы дифференциальных уравнений называется функция $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a,b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.

Равенство $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$, где $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – интеграл нормальной системы, c – произвольная постоянная, называется *первым интегралом системы*.

Геометрическая интерпретация СДУ в нормальной форме

Рассмотрим для определенности нормальную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид: $\begin{cases} y = y(x, C_1, C_2), \\ z = z(x, C_1, C_2). \end{cases}$

Каждая из функций - уравнение цилиндрической поверхности в трехмерном пространстве,

их совокупность – кривую в Oxyz, которая является интегральной кривой исходной системы.

СДУ определяет в каждой точке (x, y, z) некоторой области пространства значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, задающие направление, которого касается интегральная кривая.

Нормальная система дифференциальных уравнений задает поле направлений в пространстве.

Нахождение общего решения этой системы геометрически означает нахождение двухпараметрического семейства кривых, в каждой своей точке касающихся направления, задаваемого полем.

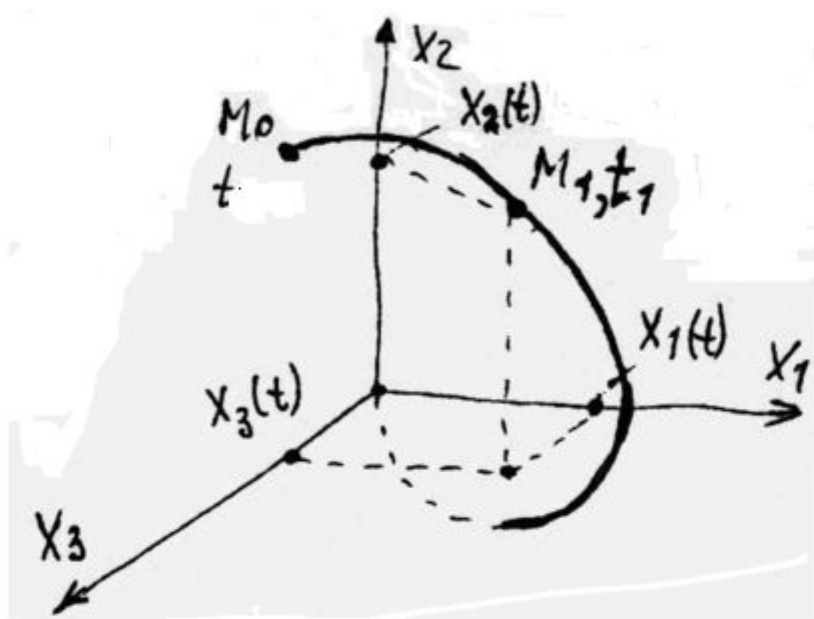
Механическая интерпретация СДУ в нормальной форме

Определение. Пространство переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы дифференциальных уравнений в нормальной форме называется *фазовым пространством системы.*

Уравнения системы задают значения скоростей изменения координат изображающей точки $M(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $a < t < b$.

Решение СДУ эквивалентно восстановлению координат движущейся в пространстве R точки по известным скоростям их изменения.

Ориентированная кривая, описываемая при этом изображающей точкой $M(t)=\left(x_1(t),\ldots,x_n(t)\right)$, $a\to t\to b$, называется *фазовой траекторией* системы в фазовом пространстве.



Задача Коши для системы дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы найти такое решение, которое при $x=x_0$ принимало бы заданные значения:

$$y_1(x_0)=y_{10},\, y_2(x_0)=y_{20},\ldots,y_n(x_0)=y_{n0}.$$

Записывается задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \\ y_1(x_0)=y_{10},\, y_2(x_0)=y_{20},\ldots,y_n(x_0)=y_{n0} \end{cases}$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема. Пусть правые части уравнений системы в НФ, т.е. функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(i=1,2,\dots,n)$ непрерывны по всем переменным в некоторой области D и имеет в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_n}$.

Тогда каковы бы ни были значения $x = x_0 \quad y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}, \dots, y_n = y_{n0}$, принадлежащие области D, существует единственное решение системы $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Некоторые приемы аналитического решения СДУ

Сведение к одному уравнению (исключения неизвестных)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \end{cases}$$

или в векторном виде

$$\dot{y}_i(t) = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \; i = 1, \ldots, n$$

Дифференцируем по x первое уравнение системы

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{df_1}{dy_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}$$

Заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из исходной системы уравнений, будем иметь

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Дифференцируем полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдём

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Продолжая далее таким же образом, получим уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Итак, получили систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Из первых *n-1* уравнений определим y_2 , y_3 , ... , y_n , выразив их через *x*, *y* и $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$.

Подставляя эти выражения в последнее из уравнений системы, получим уравнения *n-го* порядка для определения y_1

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right)$$

Решив это уравнение, найдём y_1

$$y_1 = \varphi_1\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$$

Дифференцируя последнее выражение *n-1* раз, найдём производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Подставляя эти функции в равенства, определяющие y_2, y_3, … , y_n, получим:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \end{cases}.$$

Таким образом, найдено решение системы:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \\ y_2 = \varphi_2\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \end{cases}$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

Получим ОЛДУ: $x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$x = C_1e^t + C_2e^{6t}; \qquad x' = C_1e^t + 6C_2e^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = C_1e^t + 6C_2e^{6t} - 5C_1e^t - 5C_2e^{6t};$$

$$y = -2C_1e^t + \frac{1}{2}C_2e^{6t};$$

$$\boxed{\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + \frac{1}{2}C_2e^{6t} \end{cases}}$$

Домашнее задание

Решить СДУ сведением к одному ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^{t}; \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

Метод интегрируемых комбинаций

Законспектируйте материал из прикрепленной лекции 11 и по аналогии с примером выполните задание:

Записать СДУ в симметричной форме.

Решить методом сведения к одному ДУ

и методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z; \\ \dot{y} = -x; \\ \dot{z} = -x. \end{cases}$$