

ДУ и численные методы 2 семестр

Лекция 8 Системы дифференциальных уравнений

Введение

- Во многих задачах математики, физики и техники требуется определить несколько функций, связанных между собой несколькими дифференциальными уравнениями.
- Для этого необходимо располагать, вообще говоря, таким же числом уравнений. Если каждое из этих уравнений является дифференциальным, то есть имеет вид соотношения, связывающего неизвестные функции и их производные, то говорят о *системе дифференциальных уравнений*.

Основные понятия теории СДУ

Определение. Система уравнений вида

$$F_i\left(t, x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(m_1)}(t), \dots, x_k(t), x_k'(t), \dots, x_k^{(m_k)}(t)\right) = 0,$$

$$i = \overline{1, s} \quad t \in (a, b)$$

связывающих независимую переменную t ,

неизвестные функции $x_1(t), \dots, x_k(t)$ и их

производные до порядков m_1, m_2, \dots, m_k соответственно,

называется *системой обыкновенных*

дифференциальных уравнений в общей форме.

Сумма порядков старших производных неизвестных функций, входящих в СДУ, называется *порядком СДУ*.

Определение. Совокупность непрерывно дифференцируемых на (a, b)

функций $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)) = \bar{\varphi}(t), \quad t \in (a, b),$

называется *решением* СДУ, если она обращает на интервале (a, b) каждое уравнение этой системы в тождество.

Способы представления СДУ

1. Канонический вид.

Определение. Система, которая может быть разрешена относительно старших производных неизвестных функций, называется *канонической*:

$$x_j^{(m_j)}(t) = f_j \left(t; x_1(t), \dots, x_1^{(m_1-1)}, \dots, x_k(t), \dots, x_k^{(m_k-1)} \right).$$

2. Нормальный вид.

Определение. Система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных первого порядка всех искомых функций, называется *нормальной*:

$$x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Замечание:

Для неизвестных функций

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ СДУ

примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Если СДУ задана в канонической форме, то ее можно записать в нормальной форме, обозначив производные искомых функций через дополнительные неизвестные функции.

Пример: записать СДУ в нормальной форме.

$$\begin{cases} y'' = x' + y + 2 \\ x' = y' - x \end{cases}$$

Обозначим $y' = z$, тогда

$$\begin{cases} y' = z \\ x' = z - x \\ z' = z - x + y + 2 \end{cases} .$$

Определение. *Интегралом* нормальной системы дифференциальных уравнений называется функция $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.

Равенство $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, где $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – интеграл нормальной системы, C – произвольная постоянная, называется *первым интегралом системы*.

Геометрическая интерпретация СДУ в нормальной форме

Рассмотрим для определенности нормальную систему:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид:
$$\begin{cases} y = y(x, C_1, C_2), \\ z = z(x, C_1, C_2). \end{cases}$$

Каждая из функций - уравнение цилиндрической поверхности в трехмерном пространстве, их совокупность – кривую в $Oxyz$, которая является интегральной кривой исходной системы.

СДУ определяет в каждой точке (x, y, z) некоторой области

пространства значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, задающие направление, которого касается интегральная кривая.

Нормальная система дифференциальных уравнений задает поле направлений в пространстве.

Нахождение общего решения этой системы геометрически означает нахождение двухпараметрического семейства кривых, в каждой своей точке касающихся направления, задаваемого полем.

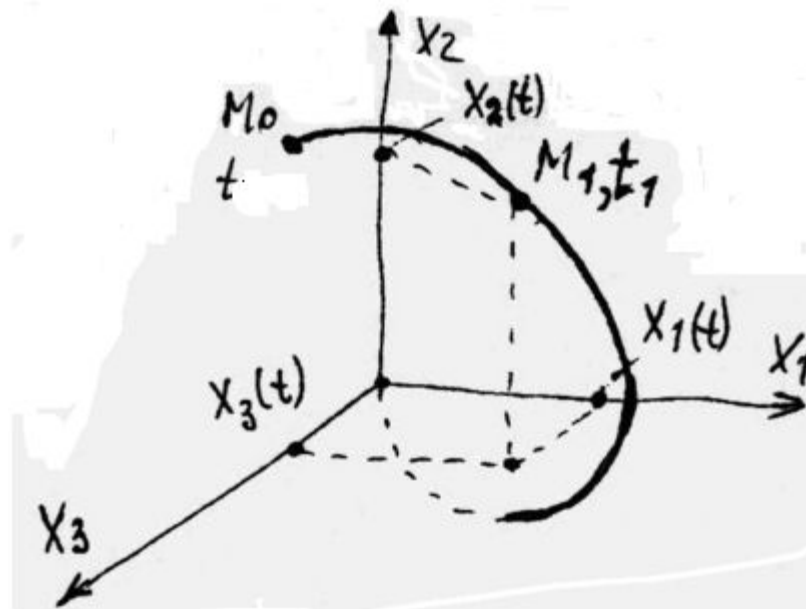
Механическая интерпретация СДУ в нормальной форме

Определение. Пространство переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) системы дифференциальных уравнений в нормальной форме называется *фазовым пространством системы*.

Уравнения системы задают значения скоростей изменения координат изображающей точки $M(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $a < t < b$.

Решение СДУ эквивалентно восстановлению координат движущейся в пространстве \mathbb{R}^n точки по известным скоростям их изменения.

Ориентированная кривая, описываемая при этом изображающей точкой $M(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $a \rightarrow t \rightarrow b$, называется *фазовой траекторией* системы в фазовом пространстве.



Задача Коши для системы дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы найти такое решение, которое при $x=x_0$ принимало бы заданные значения:

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Записывается задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \end{array} \right.$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема. Пусть правые части уравнений системы в НФ, т.е. функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, ($i=1, 2, \dots, n$) непрерывны по всем переменным в некоторой области D и имеет в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_n}$.

Тогда каковы бы ни были значения $x = x_0, y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}, \dots, y_n = y_{n0}$, принадлежащие области D , существует единственное решение системы $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$.

Некоторые приемы аналитического решения СДУ

Сведение к одному уравнению (исключения

неизвестных)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad \text{или в векторном виде}$$

$$y_i'(t) = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n$$

Дифференцируем по x первое уравнение системы

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{df_1}{dy_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}$$

Заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями f_1, f_2, \dots, f_n из исходной системы уравнений, будем иметь

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Дифференцируем полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдём

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Продолжая далее таким же образом, получим уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Итак, получили систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right.$$

Из первых $n-1$ уравнений определим y_2, y_3, \dots, y_n , выразив

их через x, y и $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$.

Подставляя эти выражения в последнее из уравнений системы, получим уравнения n -го порядка для определения y_1

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$$

Решив это уравнение, найдём y_1

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Дифференцируя последнее выражение $n-1$ раз, найдём

производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от x, C_1, C_2, \dots, C_n .

Подставляя эти функции в равенства, определяющие y_2, y_3, \dots

, y_n , получим:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

Таким образом, найдено решение системы:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y , выраженное из первого уравнения:

Получим ОЛДУ: $x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{6t}; \quad x' = C_1 e^t + 6C_2 e^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = C_1 e^t + 6C_2 e^{6t} - 5C_1 e^t - 5C_2 e^{6t};$$

$$y = -2C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{6t};$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{6t} \end{cases}$$

Домашнее задание

Решить СДУ сведением к одному ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t; \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

Метод интегрируемых комбинаций

Законспектируйте материал из прикрепленной лекции 11 и по аналогии с примером выполните задание:

Записать СДУ в симметричной форме.

Решить методом сведения к одному ДУ
и методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z; \\ \dot{y} = -x; \\ \dot{z} = -x. \end{cases}$$