

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

(повторяем формулы)

ОСНОВНЫЕ
ФОРМУЛЫ
КОМБИНАТОРИКИ

ПЕРЕСТАНОВКИ

$$P_n = n!$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

СОЧЕТАНИЯ

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Уважаемые студенты!

- Изучите тему : Основные понятия комбинаторики. Конспект отправить до 10 час. 12.12
- Решите по одной задаче на темы:
 - - перестановки;
 - - размещения;
 - - сочетания.

История

- Появление комбинаторики как самостоятельной ветви математики — Г.В. Лейбниц (1666 — «Об искусстве комбинаторики»)
- Никколо Тарталья (1499 – 1557)
- Джероламо Кардано (1501 – 1576)
- Галилео Галилей (1564 – 1642)
- Блез Паскаль (1623 – 1662)
- Якоб Бернулли (1654 – 1705)
- Пьер Ферма (1601 – 1665)
- Леонард Эйлер (1707 – 1783)

КОМБИНАТОРИКА

- это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов.
- происходит от латинского слова «**combinare**», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».

○ **КОМБИНАТОРИКА** – это раздел математики, посвященный задаче выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами.



Основные задачи комбинаторики

- Основными задачами комбинаторики считаются следующие:
 - составление упорядоченных множеств (перестановки);
 - составление подмножеств данного множества (сочетания)
 - составление упорядоченных подмножеств данного множества (размещения).

- Чтобы отличать задачи на подсчёт числа размещений от задач на подсчёт числа сочетаний, определим, важен или нет порядок в следующих выборках:
 - а) судья хоккейного матча и его помощник;
 - б) три ноты в аккорде;
 - в) «Шесть человек останутся убирать класс!»
 - г) две серии для просмотра из многосерийного фильма.

Ответ: а)да; б)нет; в)нет; г)да.



Комбинаторика

раздел математики, изучающий количество комбинаций, которые можно составить из элементов, заданного конечного множества.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

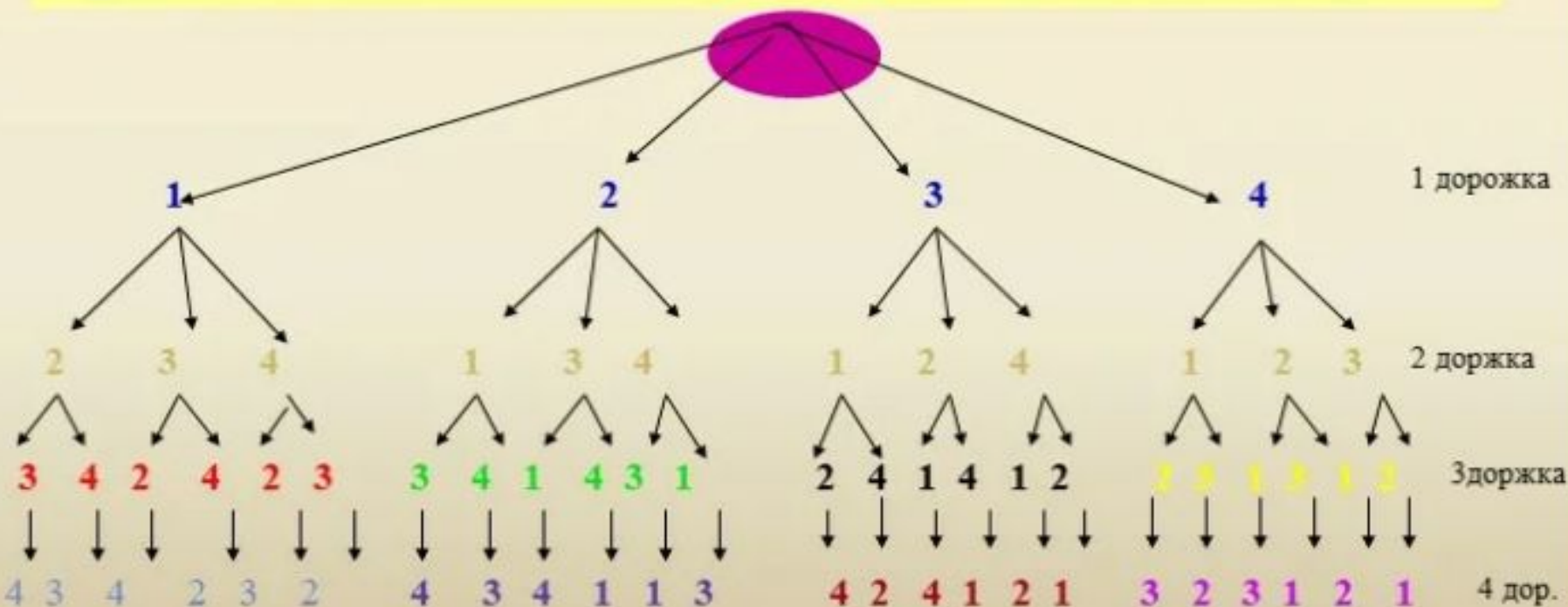
$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$. Читается как “ n факториал”.
Заметим, что $0! = 1$.

«Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило суммы, правило умножения».

1. Сколькими способами могут быть расставлены 4 участниц финального забега на четырёх беговых дорожках?

$P_n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа (перестановки из 4-х элементов)



Решено перебором вариантов

	Перестановки	Размещения	Сочетания
Определение	Соединения n элементов из n с учётом их порядка	Соединения k элементов из n с учётом их порядка	Соединения k элементов из n без учёта их порядка
Обозначение	P_n	A_n^k	C_n^k
Пример	123, 132, 213, 231, 312, 321	12, 21, 13, 31, 23, 32	12, 13, 23
Формулы	$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Задача	Сколькими способами можно развесить 5 цветных шаров на гирлянде? Ответ: 120	Сколько различных двухзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4 при условии, что ни одна цифра не повторяется? Ответ: 12	В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать 2 для участия в олимпиаде? Ответ: 21

Учитывается ли порядок размещения элементов?

Да

Нет

Все ли элементы
входят в комбинацию?

Сочетания

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Да

Нет

Перестановки

$$P_n = n!$$

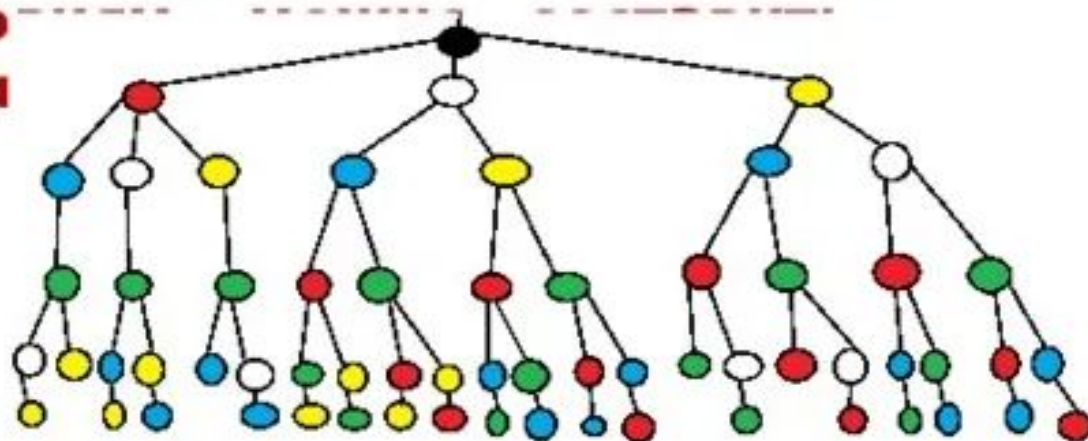
Размещения

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Тема урока: **Комбинаторика.**

Комбинаторные конструкции

Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных



ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

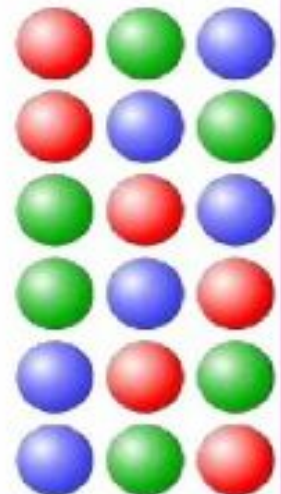
- **Комбинаторика** - раздел математики, в котором решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.
- Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются **перестановками** (P_n - от фр. *permutation*- перестановка, где n - число элементов, входящих в каждую перестановку).
- Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$0! = 1 \text{ и } 1! = 1.$$

$$P_n = n!$$



Открываем новое Факториал



Определение.

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n .



Обозначение $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Пример:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$


Запомни: $0! = 1$ $1! = 1$ 

Таблица факториалов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

Основные правила комбинаторики

Правило сложения (суммы)

Если объект A может быть выбран n способами, а объект B – m способами, то выбор «или A , или B » может быть осуществлен $n+m$ способами.

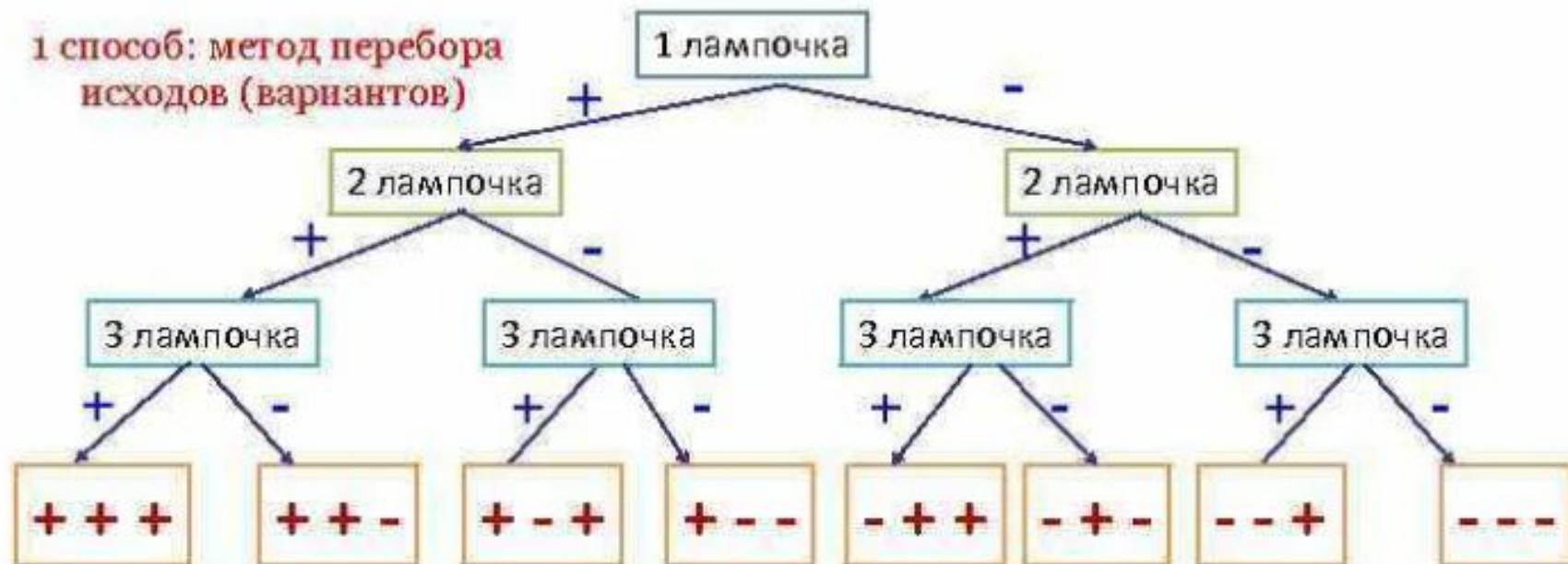
Задача. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение: $5 + 4 = 9$

УПРАЖНЕНИЕ

В комнате 3 лампочки. Сколько имеется различных вариантов освещения комнаты, включая случай, когда все лампочки не горят.

1 способ: метод перебора исходов (вариантов)

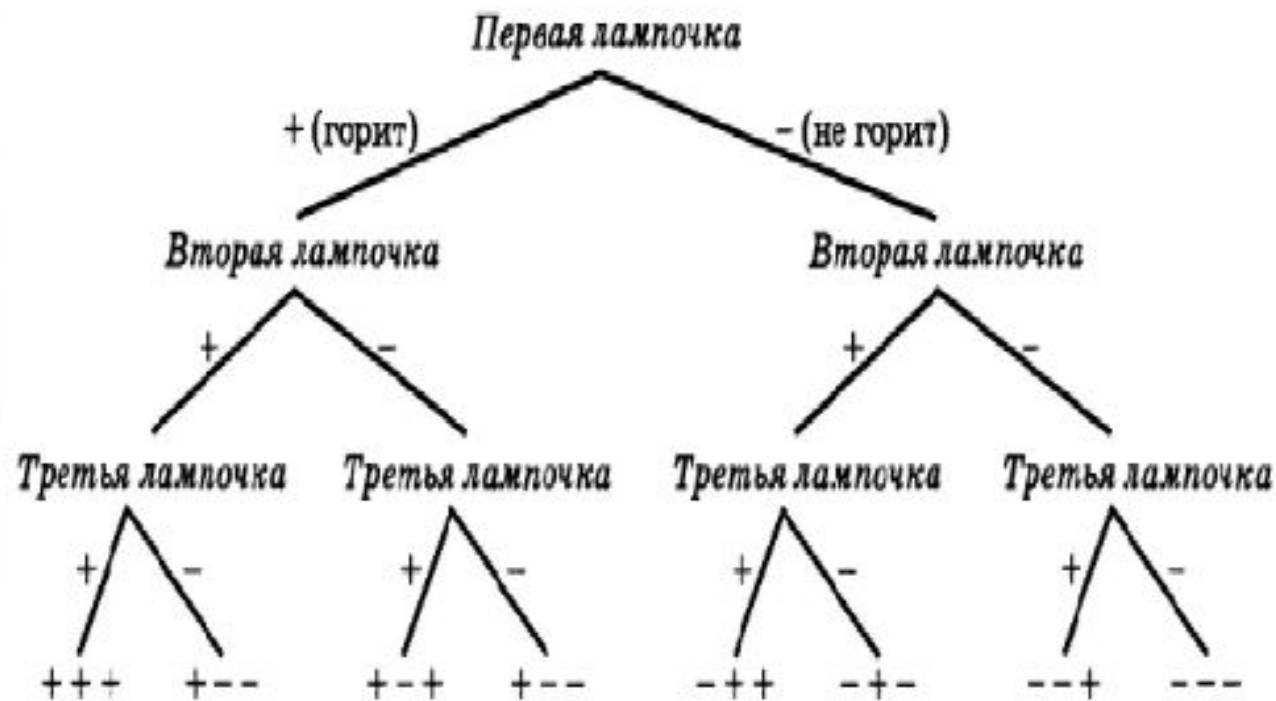
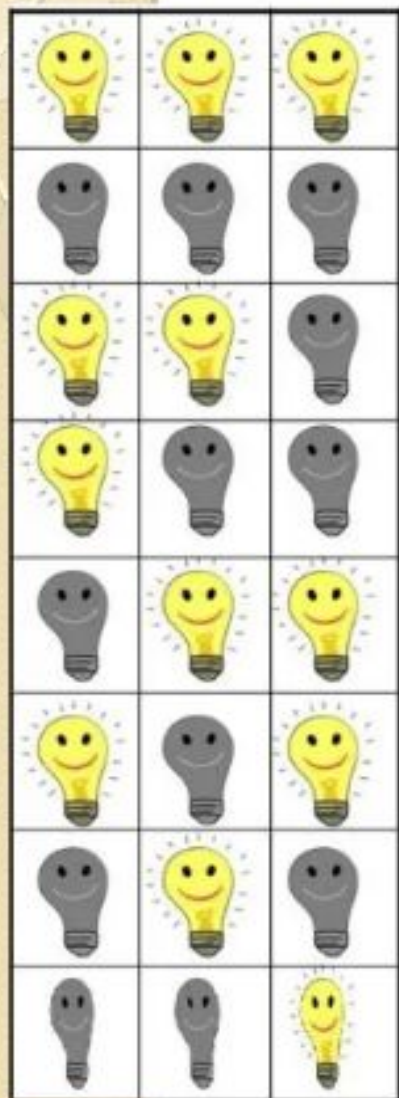


2 способ: правило умножения.

Испытание А- действие 1 лампочки, испытание В-действие 2 лампочки, испытание С-действие 3 лампочки.

У каждого испытания 2 исхода: «горит» и «не горит»

Всего исходов: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



$2 * 2 * 2 = 8$ вариантов – по правилу умножения.
 Ответ: 8.



Основные правила комбинаторики

1. Правило сложения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо k действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то все k действий вместе могут выполнены $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами

2. Правило умножения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо k действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то выполнить хотя бы одно из этих действий можно $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ способами



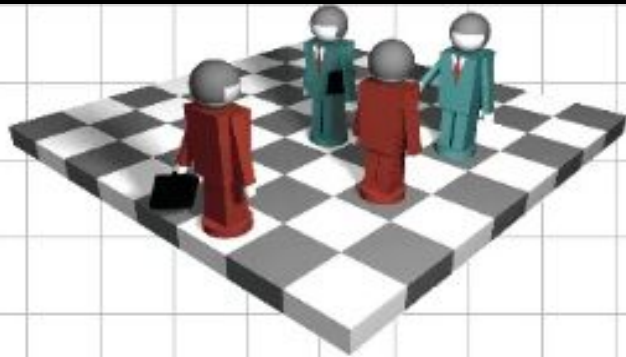
ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

- Если надо выбрать n вещей, причём одну выбрать m способами, а вторую k способами, то одну и другую можно выбрать (mk) способами.

Пример. В 1 ящике 5 зелёных, а 2- 3 красных шара. Сколькими способами можно вытащить 1 зелёный и 1 красный шар?

Решение: зелёный можно выбрать 5-ю способами, а красный – 3-мя. Значит, 1 зелёный и 1 красный можно выбрать $3 \cdot 5 = 15$ способами.





Перестановки.

Определение. *Перестановкой* называется конечное множество, в котором установлен порядок элементов.

Число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Элементы комбинаторики

Перестановками из n элементов называют их комбинации, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. В этом случае $m=n$.

$$P_n = n!$$

Задача 4. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 при условии, что цифры не повторяются?

Основные формулы комбинаторики

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Пример. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 * 5 = 30.$$

Основные элементы комбинаторики.



Задача. 1.

Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

Решение:

$$1) A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040.$$

2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти:

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$$

$$3) A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536.$$

Размещения без повторений

- *Размещениями* из различных элементов по элементам называются упорядоченные наборы, содержащие элементов из данных .
- Одно размещение отличается от другого либо составом элементов, либо порядком их расположения.
- Число размещений из элементов по обозначается символом и находится по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, (k \leq n)$$

Элементы комбинаторики

- **Размещения**

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Размещением из n элементов по k элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее k различных элементов данного множества. Эти подмножества могут отличаться друг от друга составом элементов или порядком их следования.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ – факториал числа n , $0! = 1$

Элементы комбинаторики

- **Перестановки**

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad \text{т.е. } P_n = n!$$

Простейшие комбинации

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n клеток	n элементов k клеток	n элементов k клеток
Порядок расположения элементов		
имеет значение	имеет значение	не имеет значения
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Формулы комбинаторики

	Виды комбинаций	Без повторений
Перестановки	Перестановками из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n	$P_n = n!$
Размещения	Размещениями из n различных элементов по k элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по k элементов	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Сочетания	Сочетаниями из n элементов по k элементов называется любое подмножество, которое содержит k различных элементов данного множества	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Комбинаторика

- **Перестановками** называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число возможных перестановок рассчитывается по формуле: $P_n = n!$,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \text{ причем } 0! = 1, 1! = 1$$

- **Размещениями** называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждом, которые отличаются либо элементами, либо их порядком. Число возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

Комбинаторика



*Количество различных комбинаций из N предметов, получаемых изменением их порядка, называется **числом перестановок**. Это число выражается функцией от N , которая называется **факториалом** и записывается так:*

$N!$ – N факториал

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ и т.д.}$$

$$F = N! = 1 \times 2 \times \dots \times N$$

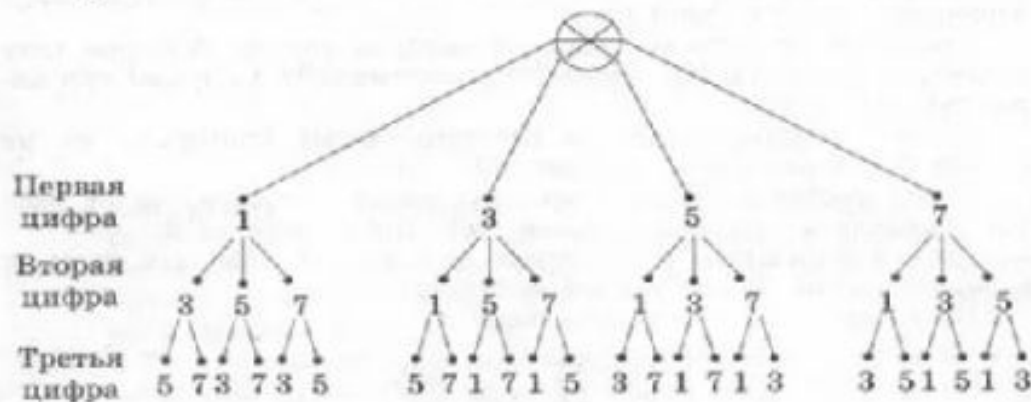
Основные правила комбинаторики

- **Перебор возможных вариантов**

Пример: Из группы теннисистов, в которую входят пять человек - Антон, Борис, Виктор, Глеб и Дмитрий, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

- **Дерево (граф) возможных вариантов**

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если первая цифра не может быть 9?



Формулы:

Для любых натуральных чисел n и k где $n > k$, справедливы равенства:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

Для числа выборов двух элементов из n данных:

$$A_n^2 = n(n-1)$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2}$$

Основные формулы комбинаторики

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и синей



Число

перестановок

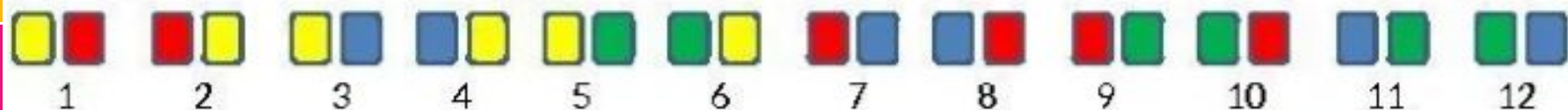
из n элементов

$$\longrightarrow P_n = n * (n - 1) * (n - 2) * (n - 3) * \dots * 1 = n!$$

Число сомножителей (включая 1) = числу мест = n

- Размещения – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, и различающиеся либо порядком расположения элементов, либо составом элементов (либо и тем, и другим)

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных ($n=4, m=2$)



$$\longrightarrow A_n^m = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Число размещений из n по m

Число сомножителей = числу мест = m

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ

- **Комбинаторика** – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке.
- **Опр.** Группы составленные из каких – либо элементов называется соединениями.
- **Опр.** Размещением из n -элементов по m в каждом (A_n^m) называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения. Количество размещений вычисляется по формуле:
- $A_n^m = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - (m - 1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$



* **Примеры.** 1) Сколькими способами можно расставить троих новобранцев одинакового роста в шеренгу?

$$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6 \text{ (способов)}$$

2) Сколько сигналов можно составить из 6 флажков разного цвета, если их брать по 2?

$$A_6(2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30 \text{ (сигналов)}$$

Основные элементы комбинаторики

- **Задача.1.**

- Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

- **Решение:**

$$1) A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040$$

- 2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти:

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$$

- 3)

$$A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536$$

Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

ПРИМЕР ЗАДАЧ ПО КОМБИНАТОРИКИ

- Записать всевозможные двузначные числа, используя цифры 3, 5, 7. Подсчитать их количество.



I-й метод (перебора).

Решение:

35; 37; 53; 57; 73; 75; 33; 55; 77.

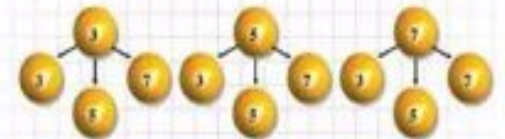
II-й метод (таблица вариантов).

Решение:

1-я цифра	2-я цифра		
	3	5	7
3	33	35	37
5	53	55	57
7	73	75	77

III-й метод (дерево вариантов).

Решение:

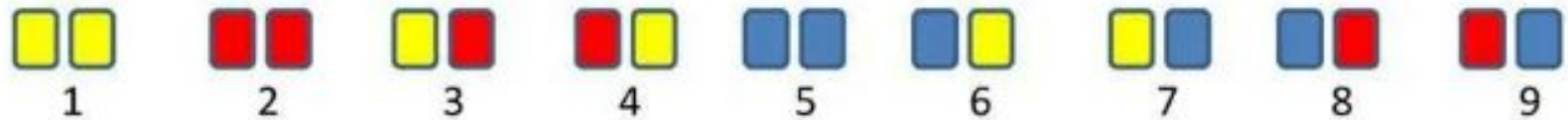


33; 35; 37; 53; 55; 57; 73; 75; 77.

Основные формулы комбинаторики

- Размещения с повторением – комбинации из n **типов** элементов, взятых по m штук

Пример. Размещения из 3 **типов** карточек по две ($n=3, m=2$)

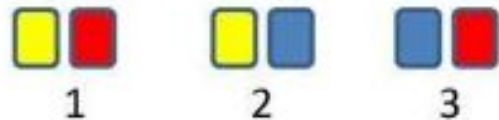


$$A_n^m = n * n * \dots * n = n^m \quad \text{Число сомножителей} = \text{числу мест} = m$$

Число размещений из n по m с повторением

- Сочетания – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (без учёта порядка элементов!)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки ($n=3, m=2$)



Так как порядок не важен, число размещений из n по m делим на число перестановок из m элементов

$$C_n^m = \frac{n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - m + 1)}{P_m} = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

Число сочетаний из n по m

Основные формулы комбинаторики.

Сочетания. Пусть M – конечное множество произвольной природы, состоящее из n элементов. Все его k -элементные подмножества называют сочетаниями без повторений из элементов этого множества по

k . Их число обозначают C_n^k

Пример. Из множества $\{a, b, c, d, e\}$ можно составить 10 сочетаний по три элемента в каждом:

Из каждого такого сочетания путём различных упорядочиваний можно получить 6 размещений из 5 элементов по 3.

Количество всех подмножеств C_n^k равно: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ где из которых содержит по k элементов, равно:

Комбинаторика



Например, число перестановок из 6 предметов

$$1*2*3*4*5*6=720.$$

Число расстановок из 6 предметов на 4 места

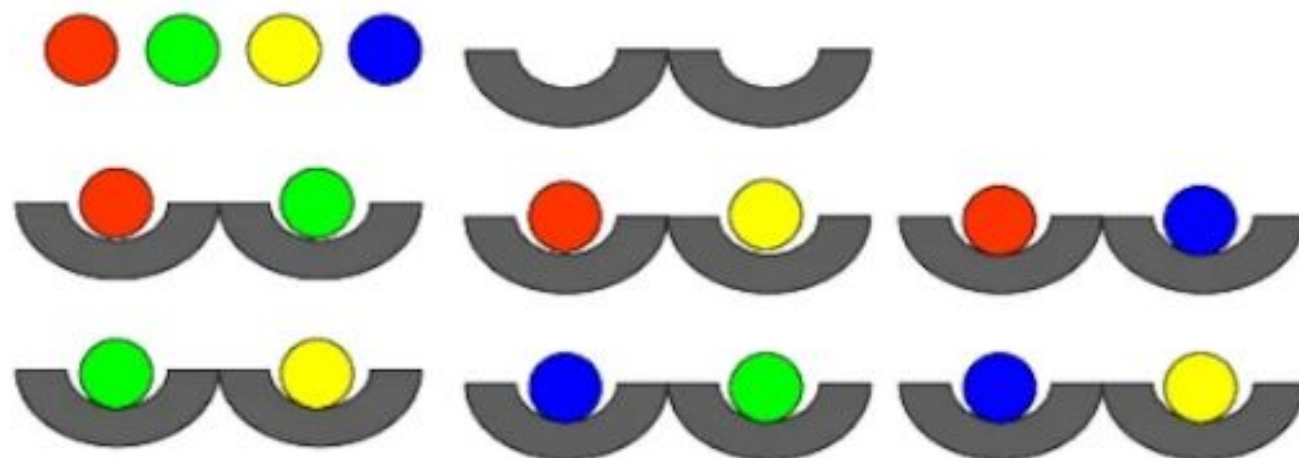
$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{3*4*5*6}{1} = \frac{360}{1} = 360$$

Число сочетаний из 6 предметов по 4

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!*2!} = \frac{5*6}{2!} = \frac{5*6}{2} = 15$$

Основные правила комбинаторики

Число сочетаний (пример)



$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача: В корзине имеются 15 груш и 7 яблок. Нужно выбрать 5 груш и 3 яблока. Сколькими способами это можно сделать?

Подсчитаем способы выбора 5 груш:

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5! \cdot (15 - 5)!} = 3003$$

Подсчитаем способы выбора 3 яблок: $C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot (7 - 3)!} = 35$

$$3003 \cdot 35 = 105105$$

Ответ: 105105 способа

Сочетания. Задачи

Задача 2. Сколько вариантов экзаменационных билетов из двух вопросов можно создать, имея список из 20 вопросов?

Ответ: 190

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{18! * 2!} = \frac{19 * 20}{2} = 19 * 10 = 190$$

Комбинаторика и вероятность.

Пример. Из колоды карт (36 карт) случайным образом вытаскивают 4 карты. Найти вероятность того: **а)** король червей не попался **б)** вытащили короля червей.

Решение. Сначала нам нужно определить, сколько всего исходов. В колоде 36 карт, из которых случайным образом выбирается 4 карты. Нам надо найти количество выборов карт из 36 по 4 штук, это количество перестановок без повторений элементов. То есть $n = C_{36}^4$

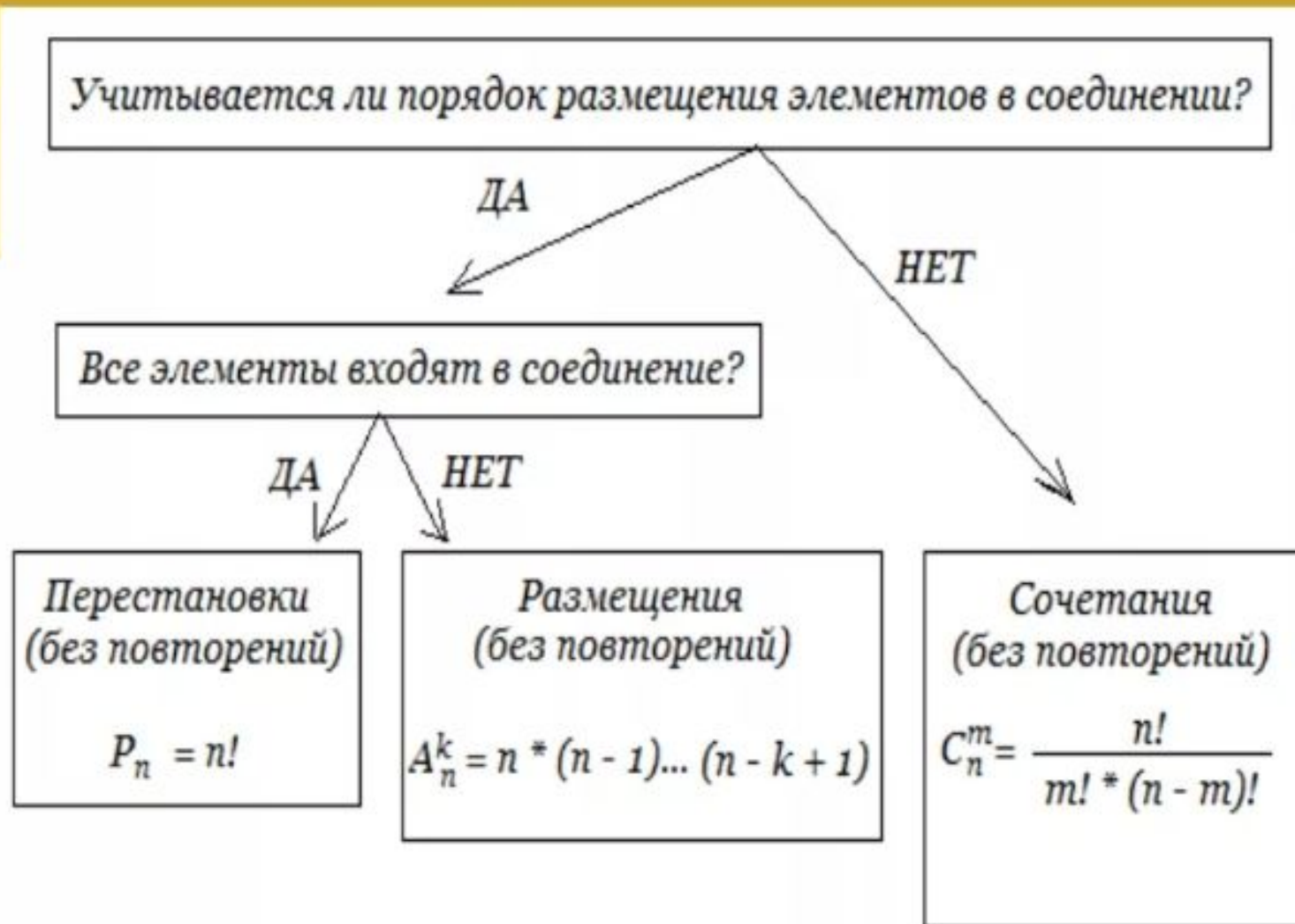
а) Король червей не попался – то есть попалась любая другая карта. Благоприятных нам карт осталось 35, то есть нам надо найти количество комбинаций из 35 карт по 4 вытасканным картам, без повторений среди вытасканных карт. Используя формулы комбинаторики:

$$m = C_{35}^4 = \frac{35!}{4!(35-4)!} = \frac{31! \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35}{4! \cdot 31!}$$

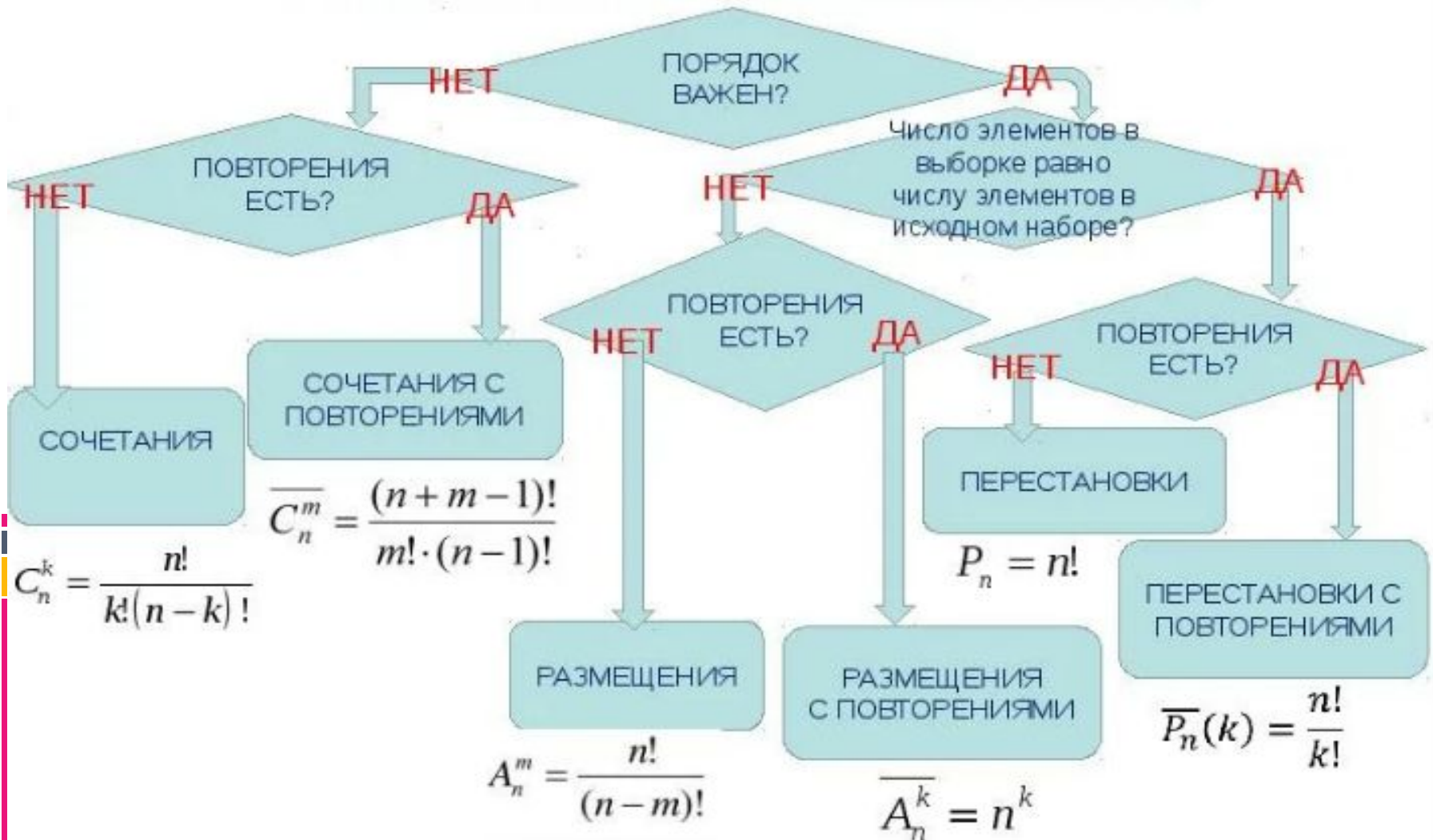
Найдем вероятность, используя классическую формулу:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_{35}^4}{C_{36}^4} = \frac{35!}{4!31!} \cdot \frac{4!32!}{36!} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

- * Правильность выбора формулы можно записать в виде таблицы:



ВЫБОР ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ



* Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что n элементов различны.

Если среди n элементов есть n_1 элемент одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., n_k элементов k -го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\bar{P}_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}, \text{ где } n_1 + \dots + n_k = n$$

Пример 4.

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова **ДЕД**?
 $n=3, k=2, n_1=2, n_2=1$

$$\bar{P}_3(2,1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$