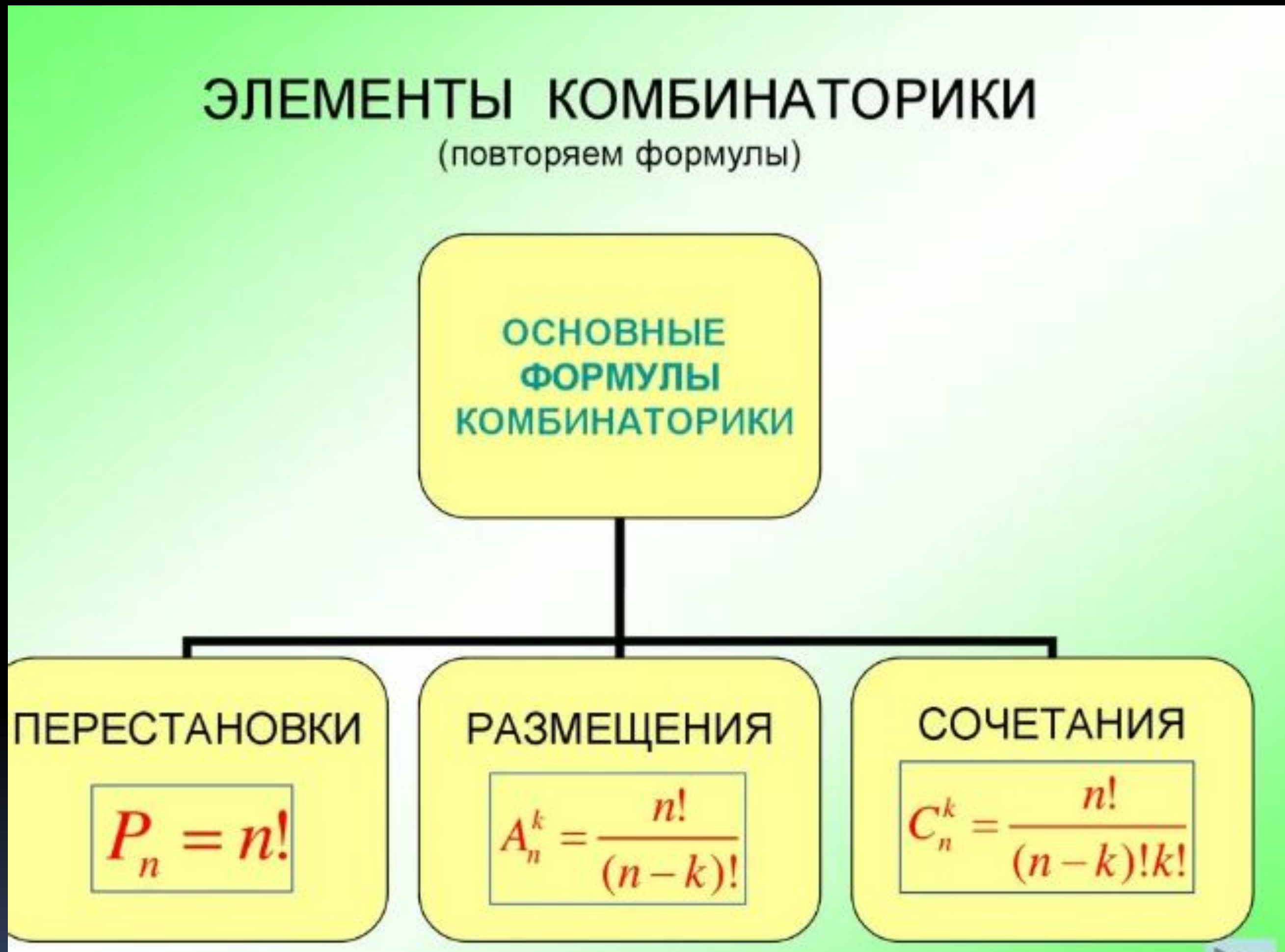

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ
(повторяем формулы)
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ
ПЕРЕСТАНОВКИ
$P_n = n!$
РАЗМЕЩЕНИЯ
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
СОЧЕТАНИЯ
$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Уважаемые студенты !

- Изучите тему : Основные понятия комбинаторики. Конспект отправить до 10 час. 12.12
- Решите по одной задаче на темы:
- - перестановки;
- - размещения;
- - сочетания.

История

- Появление комбинаторики как самостоятельной ветви математики — Г.В. Лейбниц (1666 — «Об искусстве комбинаторики»)
- Никколо Тарталья (1499 – 1557)
- Джероламо Кардано (1501 – 1576)
- Галилео Галилей (1564 – 1642)
- Блез Паскаль (1623 – 1662)
- Якоб Бернулли (1654 – 1705)
- Пьер Ферма (1601 – 1665)
- Леонард Эйлер (1707 – 1783)

КОМБИНАТОРИКА

- это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов.

- происходит от латинского слова **«combinare»**, что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».

- **КОМБИНАТОРИКА** – это раздел математики, посвященный задаче выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами.

Основные задачи комбинаторики

- Основными задачами комбинаторики считаются следующие:
  - составление упорядоченных множеств (перестановки);
  - составление подмножеств данного множества (сочетания)
  - составление упорядоченных подмножеств данного множества (размещения).

- Чтобы отличать задачи на подсчёт числа размещений от задач на подсчёт числа сочетаний, определим, важен или нет порядок в следующих выборках:

  а) судья хоккейного матча и его помощник;

  б) три ноты в аккорде;

  в) «Шесть человек останутся убирать класс!»

  г) две серии для просмотра из многосерийного фильма.

Ответ: а)да; б)нет; в)нет; г)да.

Комбинаторика

раздел математики, изучающий количество комбинаций, которые можно составить из элементов, заданного конечного множества.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

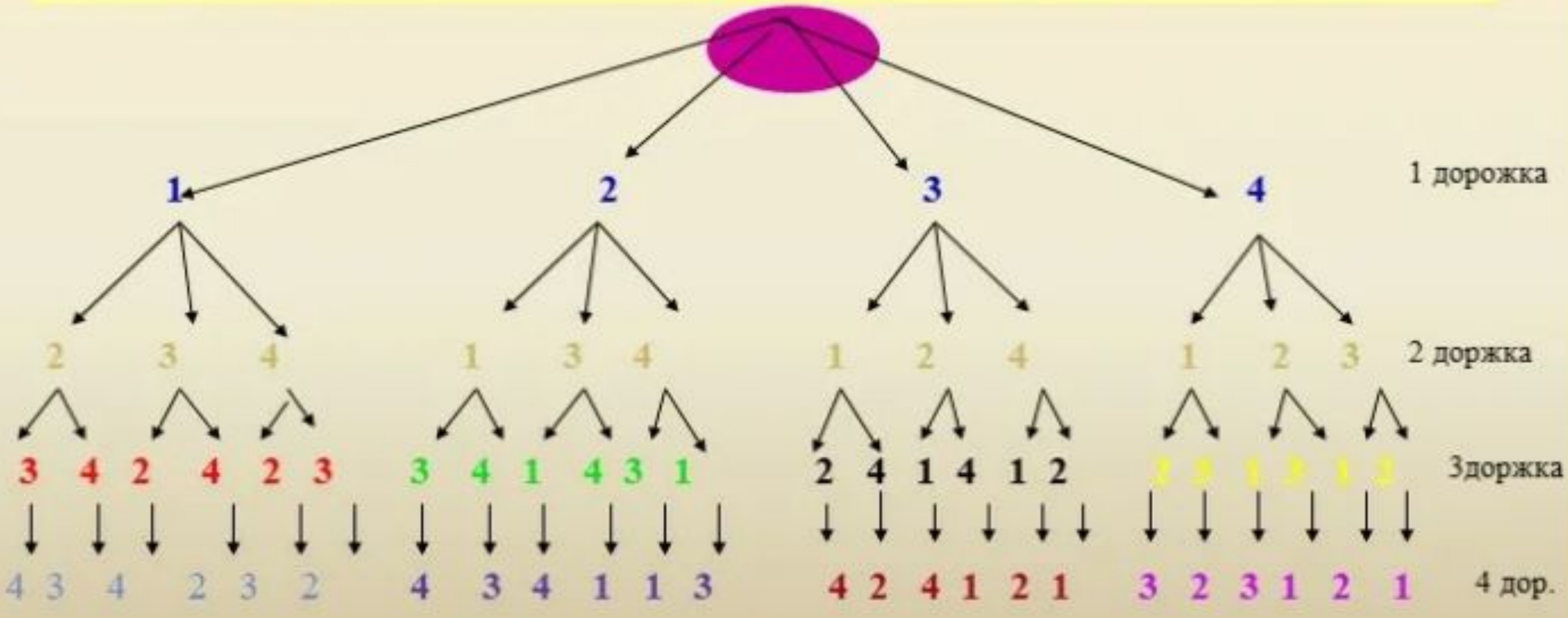
$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Читается как "n факториал". Заметим, что $0!=1$.

«Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило суммы, правило умножения».

1. **Сколькими способами могут быть расставлены 4 участниц финального забега на четырёх беговых дорожках?**

$P_n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ **способа** (**перестановки из 4-х элементов**)



Решено перебором вариантов

	Перестановки	**Размещения**	**Сочетания**
Определение	Соединения **n** элементов из **n** с учётом их порядка	Соединения **k** элементов из **n** с учётом их порядка	Соединения **k** элементов из **n** без учёта их порядка
Обозначение	P_n	A_n^k	C_n^k
Пример	123, 132, 213, 231, 312, 321	12, 21, 13, 31, 23, 32	12, 13, 23
Формулы	$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Задача	Сколькими способами можно развесить 5 цветных шаров на гирлянде? **Ответ: 120**	Сколько различных двухзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4 при условии, что ни одна цифра не повторяется? **Ответ: 12**	В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать 2 для участия в олимпиаде? **Ответ: 21**

Учитывается ли порядок размещения элементов?

Да

Все ли элементы входят в комбинацию?

Да

Перестановки

$$P_n = n!$$

Нет

Размещения

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Нет

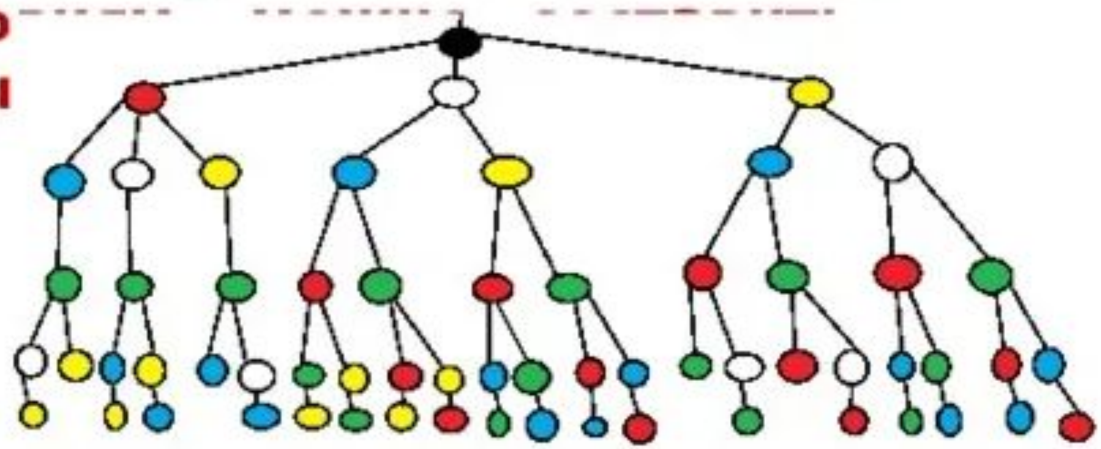
Сочетания

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Тема урока: **Комбинаторика. Комбинаторные конструкции**

Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным усло

из заданны



ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

- **Комбинаторика** - раздел математики, в котором решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.

- Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются **перестановками** (***P_n*** - от фр. *permutation*- перестановка, где n- число элементов, входящих в каждую перестановку).

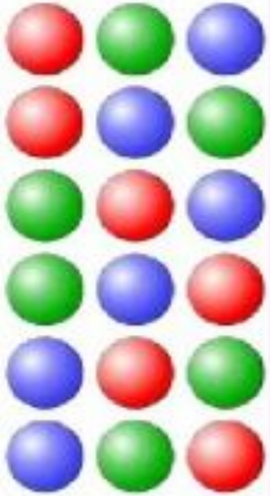
- Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$P_n = n!$$

0!=1 и 1!=1.



Открываем новое
Факториал

<u>Определение.</u>

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Обозначение $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Запомни: $0! = 1 \quad 1! = 1$

Пример:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Таблица факториалов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

Основные правила комбинаторики

Правило сложения (суммы)

Если объект А может быть выбран **n** способами, а объект В – **m** способами, то выбор «или А, или В» может быть осуществлен **n+m** способами.

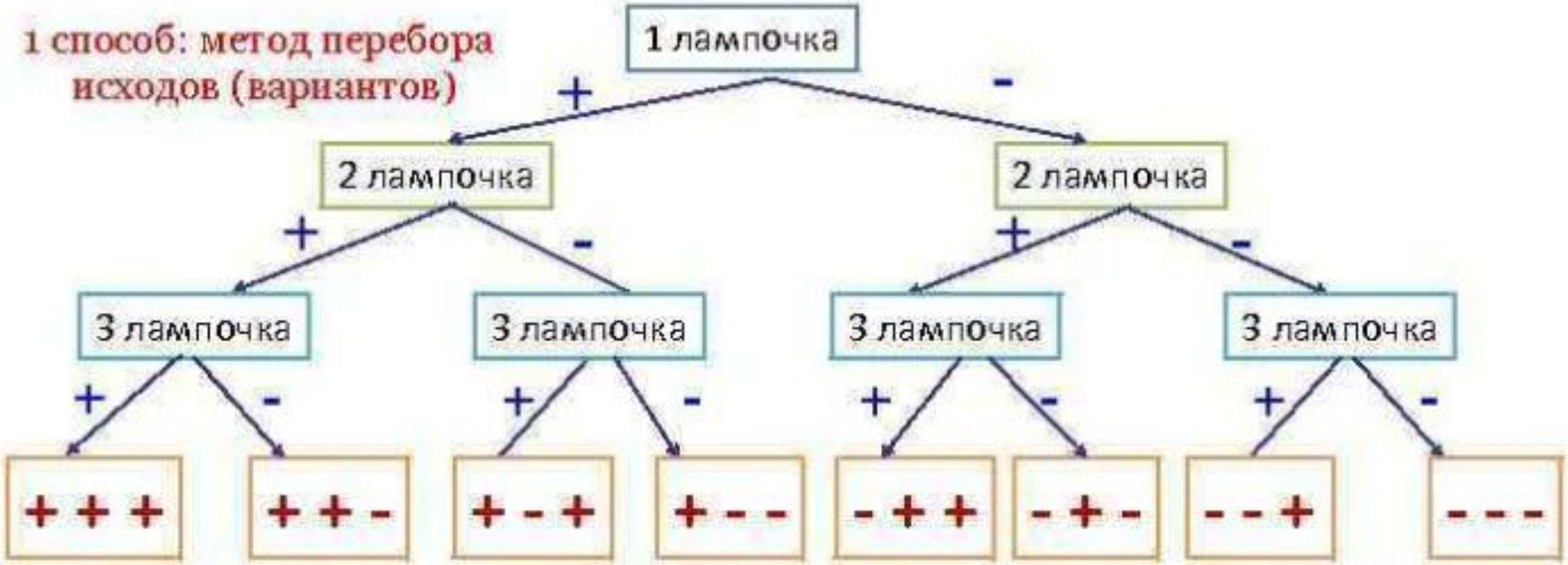
Задача. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение: 5 + 4 = 9

УПРАЖНЕНИЕ

В комнате 3 лампочки. Сколько имеется различных вариантов освещения комнаты, включая случай, когда все лампочки не горят.

1 способ: метод перебора исходов (вариантов)

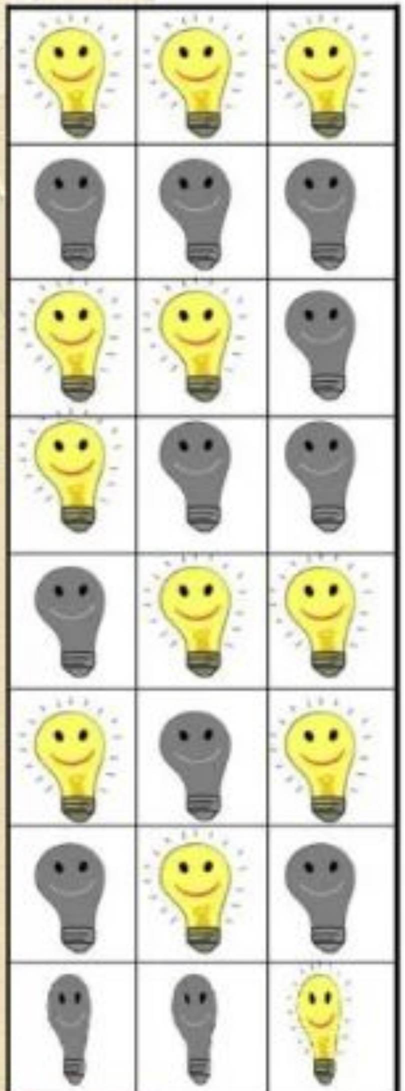


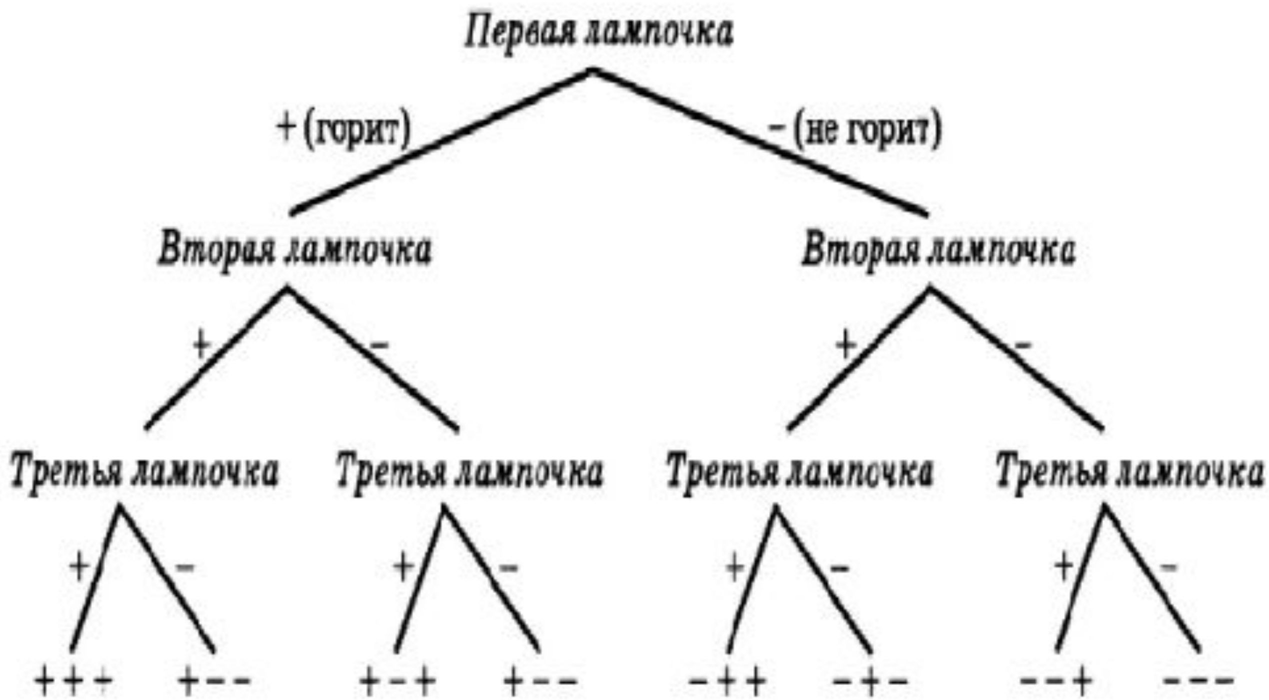
2 способ: правило умножения.

Испытание А- действие 1 лампочки, испытание В-действие 2 лампочки, испытание С-действие 3 лампочки.

У каждого испытания 2 исхода: «горит» и «не горит»

Всего исходов: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$





2*2*2=8 вариантов – по правилу умножения.

Ответ: 8.

Основные правила комбинаторики

1.Правило сложения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо *k* действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то все k действий вместе могут выполнены $\boldsymbol{n_1+n_2+\ldots+n_k}$ способами

2.Правило умножения

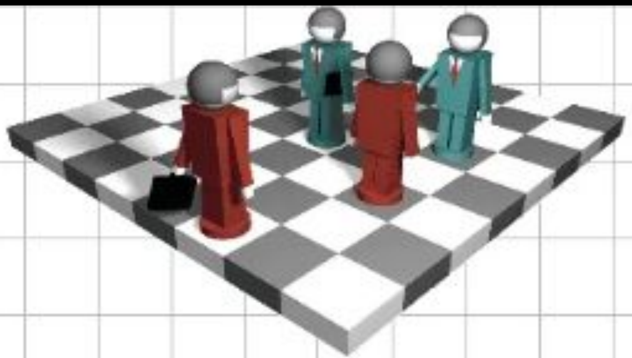
Если требуется осуществить последовательно какие-либо *k* действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т.д., то выполнить хотя бы одно из этих действий можно $\boldsymbol{n_1*n_2*\ldots*n_k}$ способами

Правило произведения

- Если надо выбрать n вещей, причём одну выбрать m способами, а вторую k способами, то одну и другую можно выбрать (mxk) способами.

Пример. В 1 ящике 5 зелёных, а 2- 3 красных шара. Сколькими способами можно вытащить 1 зелёный и 1 красный шар?

Решение: зелёный можно выбрать 5-ю способами, а красный – 3-мя. Значит, 1 зелёный и 1 красный можно выбрать 3*5 = 15 способами.



Перестановки.

<u>Определение.</u> ***Перестановкой*** называется конечное множество, в котором установлен порядок элементов.

Число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Элементы комбинаторики

Перестановками из n элементов называют их комбинации, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. В этом случае m=n.

$$P_n = n!$$

Задача 4. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 при условии, что цифры не повторяются?

Основные формулы комбинаторики

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Пример. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 * 5 = 30.$$

Основные элементы комбинаторики.

Задача.1.
Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

Решение:

1) $A_{10}^{4} = \dfrac{10!}{6!} = 5040$.

2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти: $A_{9}^{3} = \dfrac{9!}{6!} = 504$

3) $A_{10}^{4} - A_{9}^{3} = 5040 - 504 = 4536$.

Размещения без повторений

- *Размещениями* из различных элементов по элементов называются упорядоченные наборы, содержащие элементов из данных .
- Одно размещение отличается от другого либо составом элементов, либо порядком их расположения.
- Число размещений из элементов по обозначается символом и находится по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, (k \le n)$$

Элементы комбинаторики

- **Размещения**

Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

Размещением из ***n*** элементов по ***k*** элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее ***k*** различных элементов данного множества. Эти подмножества могут отличаться друг от друга составом элементов или порядком их следования.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{– факториал числа } n, \quad 0! = 1$$

Элементы комбинаторики

- **Перестановки**

Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

Перестановкой из ***n*** элементов называется размещение из ***n*** элементов по ***n*** элементов.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad \text{т.е.} \quad P_n = n!$$

Простейшие комбинации

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n клеток	n элементов k клеток	n элементов k клеток
Порядок расположения элементов		
имеет значение	имеет значение	не имеет значения
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Формулы комбинаторики

	Виды комбинаций	Без повторений
Перестановки	Перестановками из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n	$P_n = n!$
Размещения	Размещениями из n различных элементов по k элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по k элементов	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Сочетания	Сочетаниями из n элементов по k элементов называется любое подмножество, которое содержит k различных элементов данного множества	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Комбинаторика

- **Перестановками** называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число возможных перестановок рассчитывается по формуле: $P_n = n!$,

  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, причем $0! = 1$, $1! = 1$

- **Размещениями** называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждом, которые отличаются либо элементами, либо их порядком. Число возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Комбинаторика

Количество различных комбинаций из N предметов, получаемых изменением их порядка, называется числом перестановок. Это число выражается функцией от N, которая называется факториалом и записывается так:

N! – *N факториал*

1! = 1

2! = 1 × 2 = 2

3! = 1 × 2 × 3 = 6

4! = 1 × 2 × 3 × 4 = 24

5! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 = 120 и т.д.

$$\boxed{F = N! = 1 \times 2 \times \ldots \times N}$$

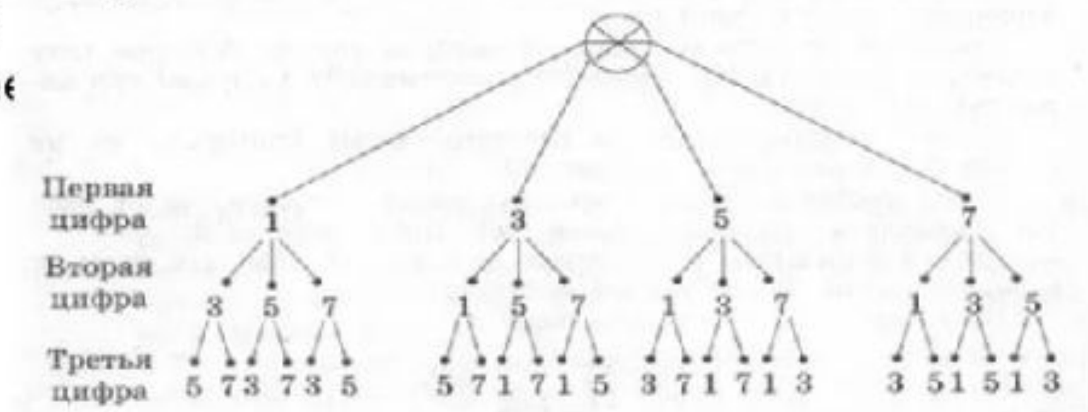
Основные правила комбинаторики

- **Перебор возможных вариантов**

Пример: Из группы теннисистов, в которую входят пять человек - Антон, Борис, Виктор, Глеб и Дмитрий, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

- **Дерево (граф) возможных вариантов**

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5
них не более



Формулы:

Для любых натуральных чисел n и k
где n>k,справедливы равенства:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

Для числа выборов двух элементов из n данных:

$$A_n^2 = n(n-1)$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2}$$

Основные формулы комбинаторики

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и синей

1 2 3 4 5 6

Число перестановок из n элементов

$$Pn = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) * \cdots * 1 = n!$$

Число сомножителей (включая 1)= числу мест = n

- Размещения – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, и различающиеся либо <u>порядком расположения</u> элементов, либо <u>составом элементов</u> (либо и тем, и другим)

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных (n=4, m=2)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$A_n^m = \underset{-0}{n} * (\underset{-1}{n-1}) * (\underset{-2}{n-2}) * \cdots * (\underset{-(m-1)}{n-m+1}) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Число размещений из n по m

Число сомножителей = числу мест = m

Основные понятия комбинаторики

- **Комбинаторика** – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке.
- **<u>Опр.</u>** Группы составленные из каких – либо элементов называется соединениями.
- **<u>Опр.</u>** Размещением из n-элементов по m в каждом (A_n^m) называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения. Количество размещений вычисляется по формуле:
- $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots\left(n-(m-1)\right) = \frac{n!}{(n-m)!}$

КОМБИНАТОРИКА

Примеры. 1) Сколькими способами можно расставить троих новобранцев одинакового роста в шеренгу?

$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$ (способов)

2) Сколько сигналов можно составить из 6 флажков разного цвета, если их брать по 2?

$A_6\ (2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$ (сигналов)

Основные элементы комбинаторики

- ***Задача.1.***
- Сколько можно записать четырехзначных чисел,
- используя без повторения все 10 цифр?

- ***Решение:***

1) $$A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

- 2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти:

$$A_{9}^{3} = \frac{9!}{6!} = 504$$

- 3)

$$A_{10}^{4} - A_{9}^{3} = 5040 - 504 = 4536$$

Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

ПРИМЕР ЗАДАЧ ПО КОМБИНАТОРИКИ

- Записать всевозможные двузначные числа, используя цифры 3, 5, 7. Подсчитать их количество.

I-й метод (перебора).

Решение:

35; 37; 53; 57; 73; 75; 33; 55; 77.

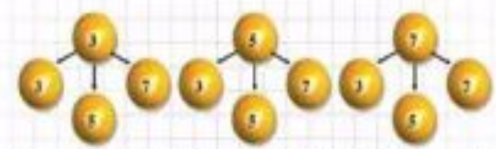
II-й метод (таблица вариантов).

Решение:

1-я цифра	2-я цифра		
	3	5	7
3	33	35	37
5	53	55	57
7	73	75	77

III-й метод (дерево вариантов).

Решение:

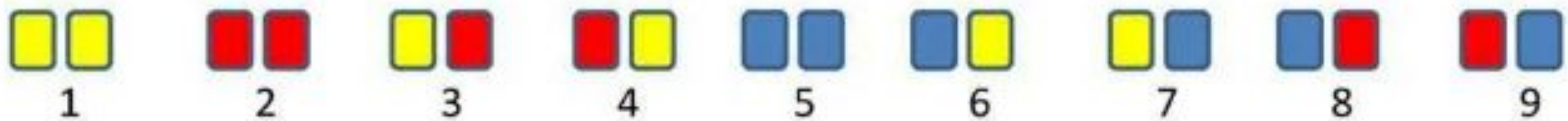


33; 35; 37; 53; 55; 57; 73; 75; 77.

Основные формулы комбинаторики

- Размещения с повторением – комбинации из n **типов** элементов, взятых по m штук

Пример. Размещения из 3 ***типов*** *карточек по две (n=3, m=2)*



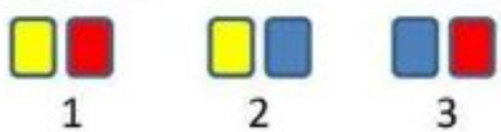
$$A_n^m = n * n * \cdots * n = n^m$$

Число сомножителей = числу мест = m

Число размещений из n по m с повторением

- Сочетания – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (без учёта порядка элементов!)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки (n=3, m=2)



$$C_n^m = \frac{n * (n-1) * (n-2) * \cdots * (n-m+1)}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Число сочетаний из n по m

Так как порядок не важен, число размещений из n по m делим на число перестановок из m элементов

Основные формулы комбинаторики.

Сочетания. Пусть M – конечное множество произвольной природы, состоящее из n элементов. Все его k-элементные подмножества называют сочетаниями без повторений из элементов этого множества по k. Их число обозначают C_n^k

Пример. Из множества {a, b, c, d, e} можно составить 10 сочетаний по три элемента в каждом:

Из каждого такого сочетания путём различных упорядочиваний можно получить 6 размещений из 5 элементов по 3.

Количество всех подмножеств дое из которых содержит по k элементов, равно: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Комбинаторика

Например, число перестановок из 6 предметов

1*2*3*4*5*6=720.

Число расстановок из 6 предметов на 4 места

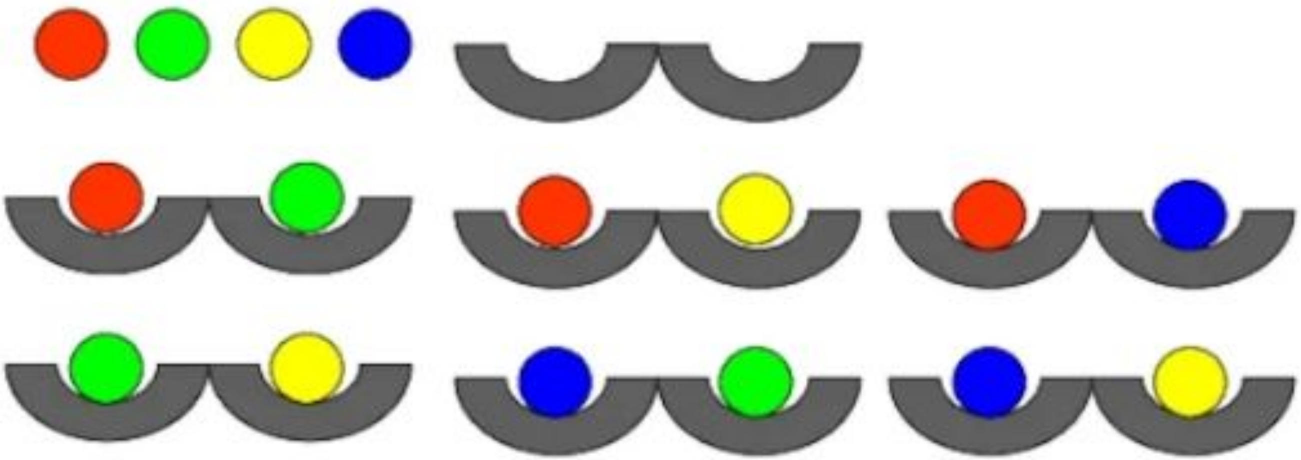
$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{3*4*5*6}{1} = \frac{360}{1} = 360$$

Число сочетаний из 6 предметов по 4

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6}{2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$$

Основные правила комбинаторики

Число сочетаний (пример)



$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Решение задач

Задача: ***В корзине имеются 15 груш и 7 яблок. Нужно выбрать 5 груш и 3 яблока. Сколькими способами это можно сделать?***

Подсчитаем способы выбора 5 груш:

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!\cdot(15-5)!} = 3003$$

Подсчитаем способы выбора 3 яблок: $C_{7}^{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = 35$

$$3003\cdot 35 = 105105$$

Ответ: **105105 способа.**

Сочетания. Задачи

Задача 2. Сколько вариантов экзаменационных билетов из двух вопросов можно создать, имея список из 20 вопросов?

Ответ: 190

$$C_{20}^{2}=\frac{20!}{18!*2!}=\frac{19*20}{2}=19*10=190$$

Комбинаторика и вероятность.

Пример. Из колоды карт (36 карт) случайным образов вытаскивают 4 карты. Найти вероятность того: **а)** король червей не попался **б)** вытащили короля червей.

Решение. Сначала нам нужно определить, сколько всего исходов. В колоде 36 карт, из которых случайным образом выбирается 4 карты. Нам надо найти количество выборов карт из 36 по 4 штук, это количество перестановок без повторений элементов. То есть $n = C_{36}^{4}$

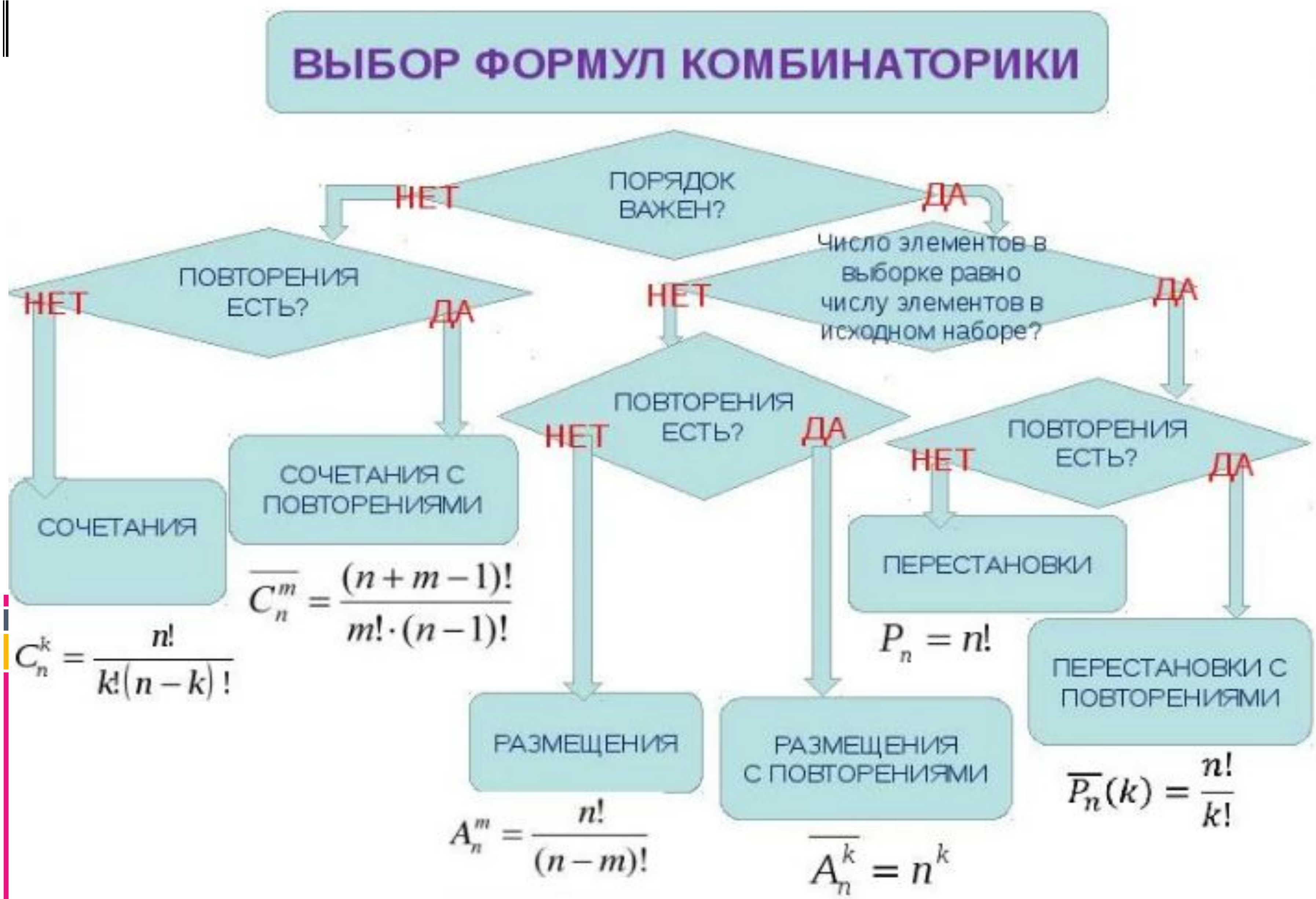
а) Король червей не попался – то есть попалась любая другая карта. Благоприятных нам карт осталось 35, то есть нам надо найти количество комбинаций из 35 карт по 4 вытащенным картам, без повторений среди вытащенных карт. Используя формулы комбинаторики:

$$m = C_{35}^{4} = \frac{35!}{4!(35-4)!} = \frac{31! \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35}{4! \cdot 31!}$$

Найдем вероятность, используя классическую формулу:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_{35}^{4}}{C_{36}^{4}} = \frac{35!}{4!31!} \cdot \frac{4!32!}{36!} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Правильность выбора формулы можно записать в виде таблицы:


ВЫБОР ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ
ПОРЯДОК ВАЖЕН?
НЕТ
ДА
ПОВТОРЕНИЯ ЕСТЬ?
НЕТ
ДА
Число элементов в выборке равно числу элементов в исходном наборе?
НЕТ
ДА
ПОВТОРЕНИЯ ЕСТЬ?
НЕТ
ДА
ПОВТОРЕНИЯ ЕСТЬ?
НЕТ
ДА
СОЧЕТАНИЯ
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ
$\overline{C_n^m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$
РАЗМЕЩЕНИЯ
$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ
$\overline{A_n^k} = n^k$
ПЕРЕСТАНОВКИ
$P_n = n!$
ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ
$\overline{P_n}(k) = \frac{n!}{k!}$

* Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что **n** элементов различны.

Если среди **n** элементов есть **n1** элемент одного вида, **n2** элементов другого вида и т.д., **nk** элементов **k**-го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\overline{P}_n(n_1,..,n_k)=\frac{n!}{n_1!.....n_k!}, где \quad n_1+...+n_k=n$$

Пример 4.

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова **ДЕД**?

n=3, k=2, n1=2, n2=1

$$\overline{P}3(2,1)=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1}=3$$