

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

(повторяем формулы)

ОСНОВНЫЕ  
ФОРМУЛЫ  
КОМБИНАТОРИКИ

ПЕРЕСТАНОВКИ

$$P_n = n!$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

СОЧЕТАНИЯ

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

# Уважаемые студенты!

- Изучите тему : Основные понятия комбинаторики. Конспект отправить до 10 час. 12.12
- Решите по одной задаче на темы:
  - - перестановки;
  - - размещения;
  - - сочетания.

# История

---

- Появление комбинаторики как самостоятельной ветви математики — Г.В. Лейбниц (1666 — «Об искусстве комбинаторики»)
- Никколо Тарталья (1499 – 1557)
- Джероламо Кардано (1501 – 1576)
- Галилео Галилей (1564 – 1642)
- Блез Паскаль (1623 – 1662)
- Якоб Бернулли (1654 – 1705)
- Пьер Ферма (1601 – 1665)
- Леонард Эйлер (1707 – 1783)

# КОМБИНАТОРИКА

- это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов.
- происходит от латинского слова «**combinare**», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».

○ **КОМБИНАТОРИКА** – это раздел математики, посвященный задаче выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами.



# Основные задачи комбинаторики

- Основными задачами комбинаторики считаются следующие:
  - составление упорядоченных множеств (перестановки);
  - составление подмножеств данного множества (сочетания)
  - составление упорядоченных подмножеств данного множества (размещения).
  
- Чтобы отличать задачи на подсчёт числа размещений от задач на подсчёт числа сочетаний, определим, важен или нет порядок в следующих выборках:
  - а) судья хоккейного матча и его помощник;
  - б) три ноты в аккорде;
  - в) «Шесть человек останутся убирать класс!»
  - г) две серии для просмотра из многосерийного фильма.

Ответ: а)да; б)нет; в)нет; г)да.



# Комбинаторика

раздел математики, изучающий количество комбинаций, которые можно составить из элементов, заданного конечного множества.

**Перестановками** называют комбинации, состоящие из одних и тех же  $n$  различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

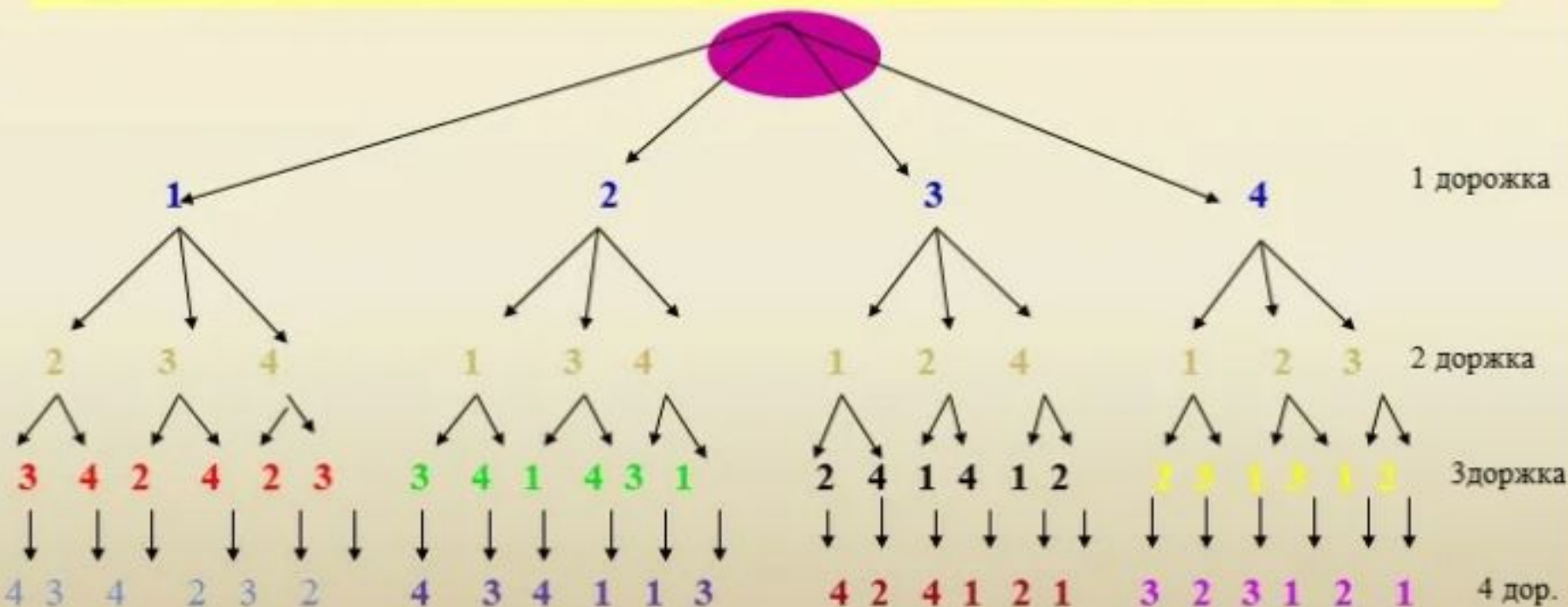
$$P_n = n!,$$

где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ . Читается как “ $n$  факториал”.  
Заметим, что  $0! = 1$ .

*«Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило суммы, правило умножения».*

1. Сколькими способами могут быть расставлены 4 участниц финального забега на четырёх беговых дорожках?

$P_n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  способа (перестановки из 4-х элементов)



*Решено перебором вариантов*



	Перестановки	Размещения	Сочетания
Определение	Соединения $n$ элементов из $n$ с учётом их порядка	Соединения $k$ элементов из $n$ с учётом их порядка	Соединения $k$ элементов из $n$ без учёта их порядка
Обозначение	$P_n$	$A_n^k$	$C_n^k$
Пример	123, 132, 213, 231, 312, 321	12, 21, 13, 31, 23, 32	12, 13, 23
Формулы	$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Задача	Сколькими способами можно развесить 5 цветных шаров на гирлянде?  <b>Ответ: 120</b>	Сколько различных двухзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4 при условии, что ни одна цифра не повторяется?  <b>Ответ: 12</b>	В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать 2 для участия в олимпиаде?  <b>Ответ: 21</b>

Учитывается ли порядок размещения элементов?

Да

Нет

Все ли элементы  
входят в комбинацию?

Сочетания

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Да

Нет

Перестановки

$$P_n = n!$$

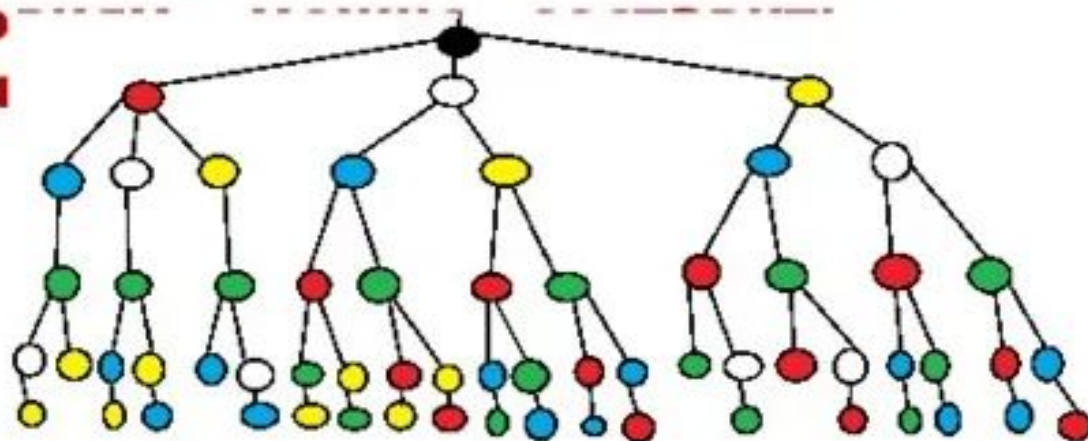
Размещения

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Тема урока: **Комбинаторика.**

# Комбинаторные конструкции

Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных



# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

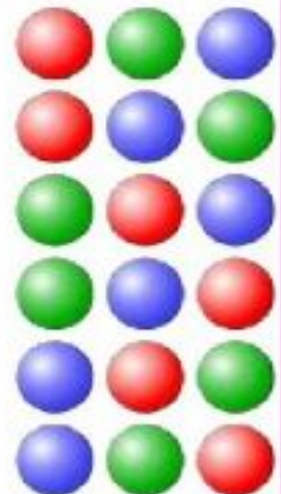
- **Комбинаторика** - раздел математики, в котором решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.
- Комбинация из  $n$  элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются **перестановками** ( $P_n$  - от фр. *permutation*- перестановка, где  $n$ - число элементов, входящих в каждую перестановку).
- Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$0! = 1 \text{ и } 1! = 1.$$

$$P_n = n!$$



# Открываем новое Факториал



Определение.

**Факториалом** натурального числа  $n$  называется произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$ .



Обозначение  $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Пример:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$


**Запомни:**  $0! = 1$   $1! = 1$  

Таблица факториалов:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

# Основные правила комбинаторики

---

## Правило сложения (суммы)

Если объект  $A$  может быть выбран  $n$  способами, а объект  $B$  –  $m$  способами, то выбор «или  $A$ , или  $B$ » может быть осуществлен  $n+m$  способами.

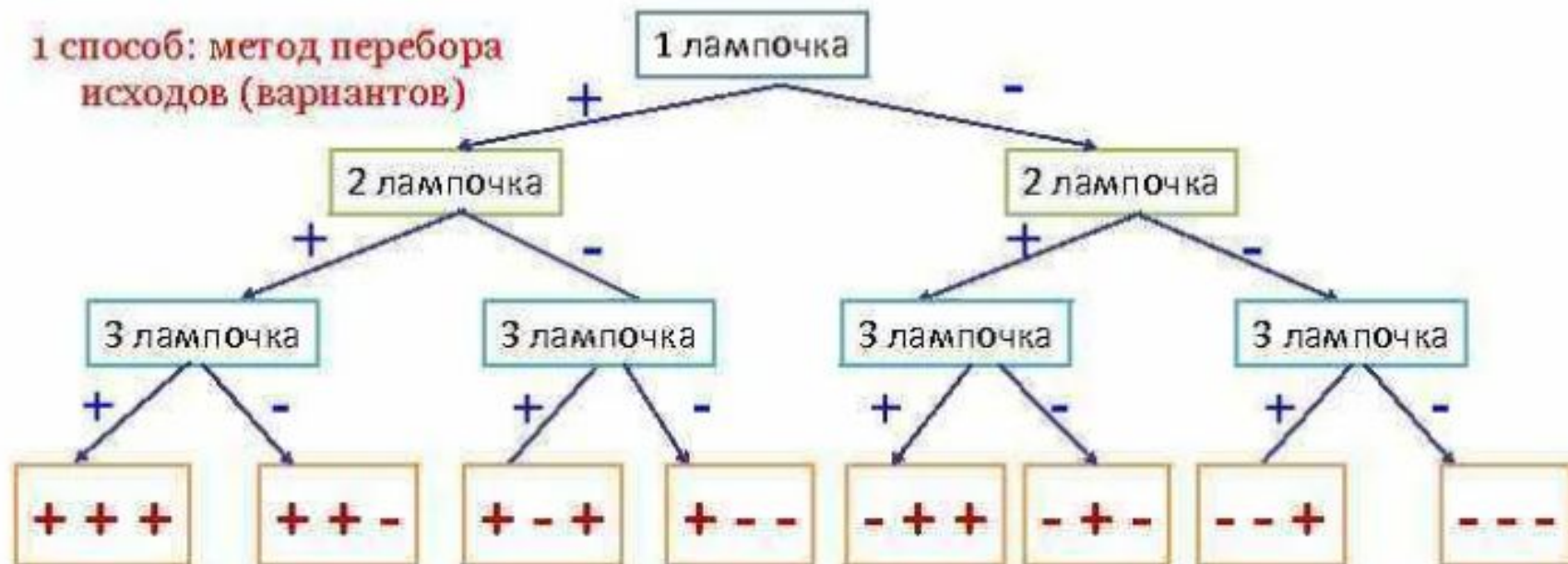
**Задача.** На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение:  $5 + 4 = 9$

## УПРАЖНЕНИЕ

В комнате 3 лампочки. Сколько имеется различных вариантов освещения комнаты, включая случай, когда все лампочки не горят.

1 способ: метод перебора исходов (вариантов)

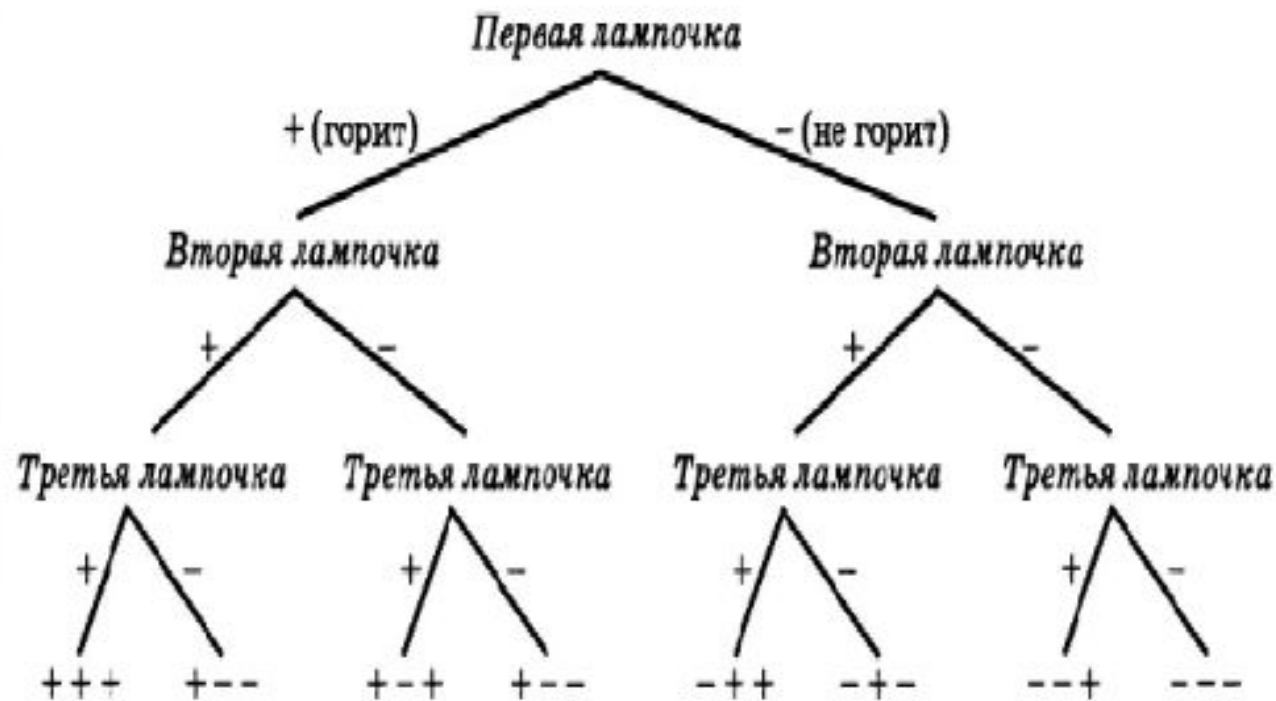
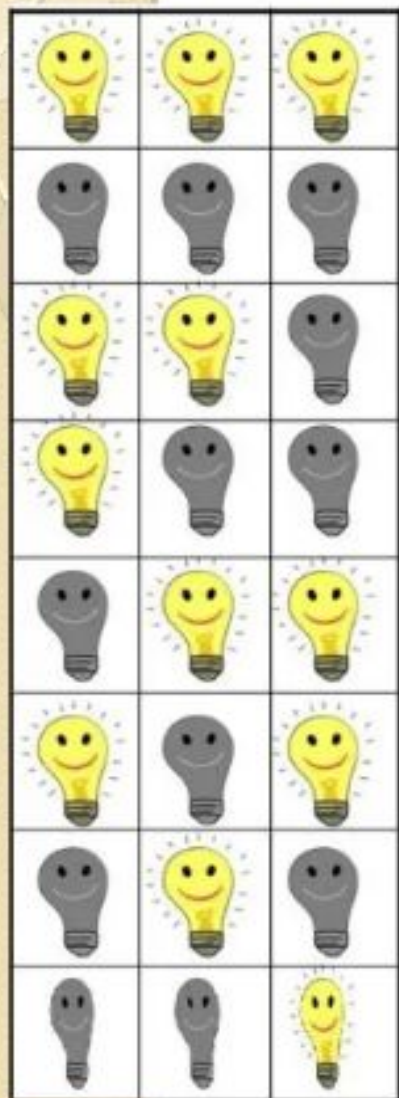


2 способ: правило умножения.

Испытание А- действие 1 лампочки, испытание В-действие 2 лампочки, испытание С-действие 3 лампочки.

У каждого испытания 2 исхода: «горит» и «не горит»

Всего исходов:  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



$2 * 2 * 2 = 8$  вариантов – по правилу умножения.  
 Ответ: 8.





# Основные правила комбинаторики

## 1. Правило сложения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо  $k$  действий, причем первое можно выполнить  $n_1$  способами, второе –  $n_2$  способами и т.д., то все  $k$  действий вместе могут выполнены  $n_1+n_2+\dots+n_k$  способами

## 2. Правило умножения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо  $k$  действий, причем первое можно выполнить  $n_1$  способами, второе –  $n_2$  способами и т.д., то выполнить хотя бы одно из этих действий можно  $n_1*n_2*\dots*n_k$  способами



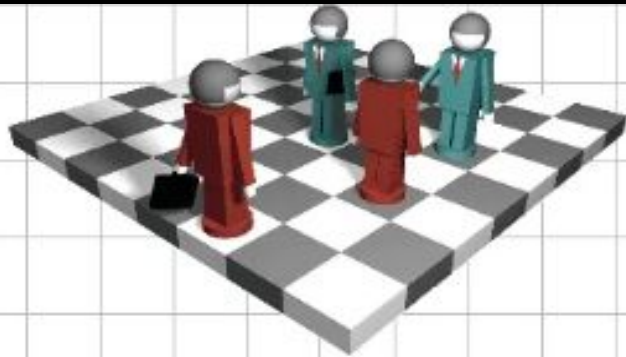
## *ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ*

- Если надо выбрать  $n$  вещей, причём одну выбрать  $m$  способами, а вторую  $k$  способами, то одну и другую можно выбрать  $(mk)$  способами.

Пример. В 1 ящике 5 зелёных, а 2- 3 красных шара. Сколькими способами можно вытащить 1 зелёный и 1 красный шар?

Решение: зелёный можно выбрать 5-ю способами, а красный – 3-мя. Значит, 1 зелёный и 1 красный можно выбрать  $3 \cdot 5 = 15$  способами.





# *Перестановки.*

Определение. *Перестановкой* называется конечное множество, в котором установлен порядок элементов.

Число всевозможных перестановок из  $n$  элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

# Элементы комбинаторики

**Перестановками из  $n$  элементов** называют их комбинации, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. В этом случае  $m=n$ .

$$P_n = n!$$

**Задача 4.** Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 при условии, что цифры не повторяются?

## *Основные формулы комбинаторики*

*Размещениями* называют комбинации, составленные из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

**Пример.** Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 * 5 = 30.$$

# Основные элементы комбинаторики.



## **Задача. 1.**

Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

## **Решение:**

$$1) A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040.$$

2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти:

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$$

$$3) A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536.$$

# Размещения без повторений

- *Размещениями* из различных элементов по элементам называются упорядоченные наборы, содержащие элементов из данных .
- Одно размещение отличается от другого либо составом элементов, либо порядком их расположения.
- Число размещений из элементов по обозначается символом и находится по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, (k \leq n)$$

# Элементы комбинаторики

- **Размещения**

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов.

**Размещением** из  $n$  элементов по  $k$  элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее  $k$  различных элементов данного множества. Эти подмножества могут отличаться друг от друга составом элементов или порядком их следования.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  – факториал числа  $n$ ,  $0! = 1$



# Элементы комбинаторики

- **Перестановки**

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов.

*Перестановкой* из  $n$  элементов называется размещение из  $n$  элементов по  $n$  элементов.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad \text{т.е. } P_n = n!$$

# Простейшие комбинации

Перестановки	Размещения	Сочетания
$n$ элементов $n$ клеток	$n$ элементов $k$ клеток	$n$ элементов $k$ клеток
Порядок расположения элементов		
имеет значение	имеет значение	не имеет значения
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

# Формулы комбинаторики

	Виды комбинаций	Без повторений
Перестановки	Перестановками из $n$ различных элементов называются размещения из этих $n$ элементов по $n$	$P_n = n!$
Размещения	Размещениями из $n$ различных элементов по $k$ элементов называются комбинации, составленные из данных $n$ элементов по $k$ элементов	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Сочетания	Сочетаниями из $n$ элементов по $k$ элементов называется любое подмножество, которое содержит $k$ различных элементов данного множества	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

# Комбинаторика

- **Перестановками** называют комбинации, состоящие из одних и тех же  $n$  различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число возможных перестановок рассчитывается по формуле:  $P_n = n!$ ,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \text{ причем } 0! = 1, 1! = 1$$

- **Размещениями** называют комбинации, составленные из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов в каждом, которые отличаются либо элементами, либо их порядком. Число возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

# Комбинаторика



*Количество различных комбинаций из  $N$  предметов, получаемых изменением их порядка, называется **числом перестановок**. Это число выражается функцией от  $N$ , которая называется **факториалом** и записывается так:*

**$N!$  –  $N$  факториал**

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ и т.д.}$$

$$F = N! = 1 \times 2 \times \dots \times N$$

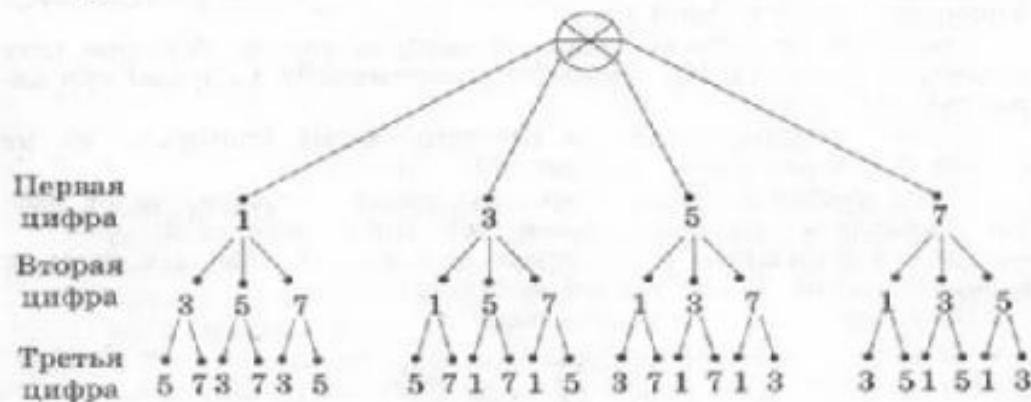
# Основные правила комбинаторики

- **Перебор возможных вариантов**

Пример: Из группы теннисистов, в которую входят пять человек - Антон, Борис, Виктор, Глеб и Дмитрий, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

- **Дерево (граф) возможных вариантов**

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если первая цифра не может быть 9?



# Формулы:

Для любых натуральных чисел  $n$  и  $k$  где  $n > k$ , справедливы равенства:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

Для числа выборов двух элементов из  $n$  данных:

$$A_n^2 = n(n-1)$$

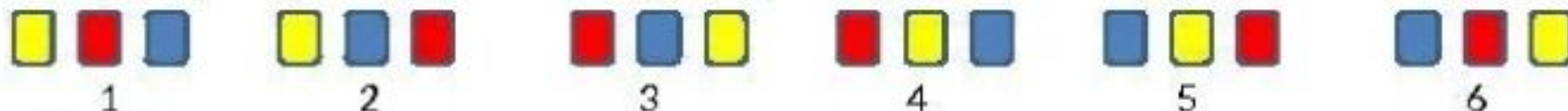
$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2}$$

## Основные формулы комбинаторики

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же  $n$  элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и синей



Число

перестановок

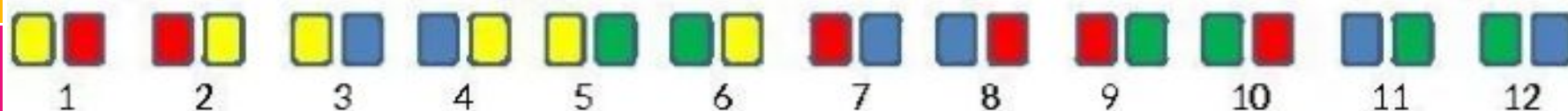
из  $n$  элементов

$$\longrightarrow P_n = n * (n - 1) * (n - 2) * (n - 3) * \dots * 1 = n!$$

Число сомножителей (включая 1) = числу мест =  $n$

- Размещения – комбинации, состоящие из  $n$  возможных элементов, взятых по  $m$  штук, и различающиеся либо порядком расположения элементов, либо составом элементов (либо и тем, и другим)

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных ( $n=4, m=2$ )



$$\longrightarrow A_n^m = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!}$$

$\begin{matrix} -0 & -1 & -2 & & -(m-1) \end{matrix}$

Число размещений из  $n$  по  $m$

Число сомножителей = числу мест =  $m$



# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ

- **Комбинаторика** – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке.
- **Опр.** Группы составленные из каких – либо элементов называется соединениями.
- **Опр.** Размещением из  $n$ -элементов по  $m$  в каждом  $(A_n^m)$  называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения. Количество размещений вычисляется по формуле:
- $A_n^m = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - (m - 1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$



## КОМБИНАТОРИКА

\* **Примеры.** 1) Сколькими способами можно расставить троих новобранцев одинакового роста в шеренгу?

$$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6 \text{ (способов)}$$

2) Сколько сигналов можно составить из 6 флажков разного цвета, если их брать по 2?

$$A_6(2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30 \text{ (сигналов)}$$

# Основные элементы комбинаторики

- **Задача.1.**

- Сколько можно записать четырехзначных чисел,
- используя без повторения все 10 цифр?

- **Решение:**

$$1) A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040$$

- 2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти:

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$$

- 3)

$$A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536$$

# Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

# ПРИМЕР ЗАДАЧ ПО КОМБИНАТОРИКИ

- Записать всевозможные двузначные числа, используя цифры 3, 5, 7. Подсчитать их количество.



*I-й метод (перебора).*

Решение:

35; 37; 53; 57; 73; 75; 33; 55; 77.

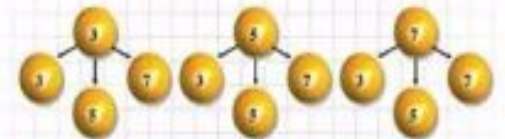
*II-й метод (таблица вариантов).*

Решение:

1-я цифра	2-я цифра		
	3	5	7
3	33	35	37
5	53	55	57
7	73	75	77

*III-й метод (дерево вариантов).*

Решение:



33; 35; 37; 53; 55; 57; 73; 75; 77.

## Основные формулы комбинаторики

- Размещения с повторением – комбинации из  $n$  **типов** элементов, взятых по  $m$  штук

Пример. Размещения из 3 **типов** карточек по две ( $n=3, m=2$ )

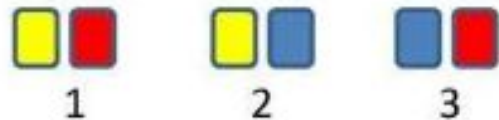


$$A_n^m = n * n * \dots * n = n^m \quad \text{Число сомножителей} = \text{числу мест} = m$$

Число размещений из  $n$  по  $m$  с повторением

- Сочетания – комбинации, состоящие из  $n$  возможных элементов, взятых по  $m$  штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (без учёта порядка элементов!)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки ( $n=3, m=2$ )



Так как порядок не важен, число размещений из  $n$  по  $m$  делим на число перестановок из  $m$  элементов

$$C_n^m = \frac{n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - m + 1)}{P_m} = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

Число сочетаний из  $n$  по  $m$

# Основные формулы комбинаторики.

**Сочетания.** Пусть  $M$  – конечное множество произвольной природы, состоящее из  $n$  элементов. Все его  $k$ -элементные подмножества называют сочетаниями без повторений из элементов этого множества по

$k$ . Их число обозначают  $C_n^k$

*Пример.* Из множества  $\{a, b, c, d, e\}$  можно составить 10 сочетаний по три элемента в каждом:

Из каждого такого сочетания путём различных упорядочиваний можно получить 6 размещений из 5 элементов по 3.

Количество всех подмножеств  $C_n^k$  равно:  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  где из которых содержит по  $k$  элементов, равно:

# Комбинаторика



Например, число перестановок из 6 предметов

$$1*2*3*4*5*6=720.$$

Число расстановок из 6 предметов на 4 места

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{3*4*5*6}{1} = \frac{360}{1} = 360$$

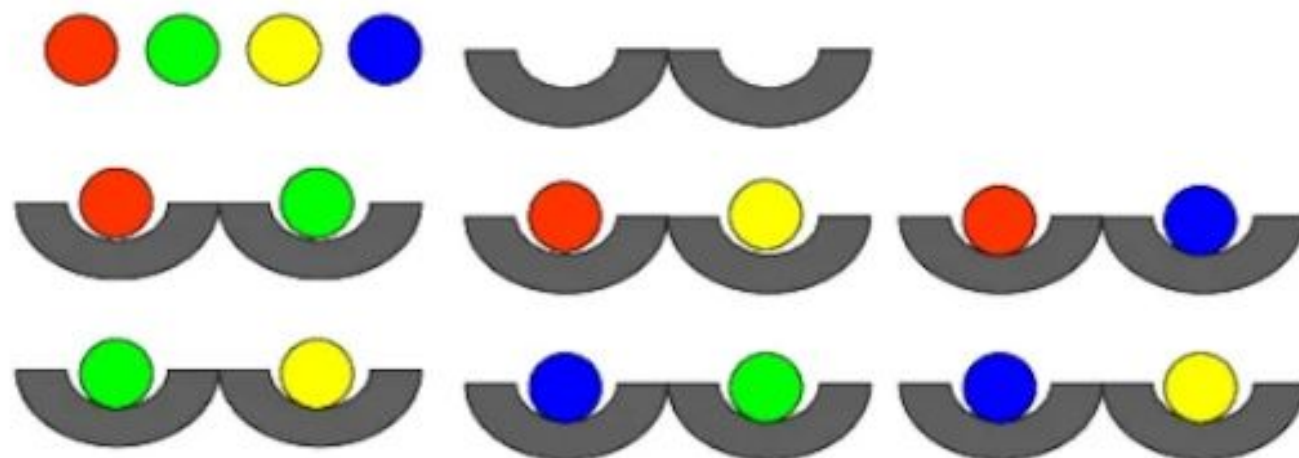
Число сочетаний из 6 предметов по 4

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!*2!} = \frac{5*6}{2!} = \frac{5*6}{2} = 15$$



# Основные правила комбинаторики

## Число сочетаний (пример)



$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

**Задача:** В корзине имеются 15 груш и 7 яблок. Нужно выбрать 5 груш и 3 яблока. Сколькими способами это можно сделать?

Подсчитаем способы выбора 5 груш:

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5! \cdot (15 - 5)!} = 3003$$

Подсчитаем способы выбора 3 яблок:  $C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot (7 - 3)!} = 35$

$$3003 \cdot 35 = 105105$$

**Ответ:** 105105 способа

# Сочетания. Задачи

**Задача 2. Сколько вариантов экзаменационных билетов из двух вопросов можно создать, имея список из 20 вопросов?**

**Ответ: 190**

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{18! * 2!} = \frac{19 * 20}{2} = 19 * 10 = 190$$

# Комбинаторика и вероятность.

**Пример.** Из колоды карт (36 карт) случайным образом вытаскивают 4 карты. Найти вероятность того: **а)** король червей не попался **б)** вытащили короля червей.

**Решение.** Сначала нам нужно определить, сколько всего исходов. В колоде 36 карт, из которых случайным образом выбирается 4 карты. Нам надо найти количество выборов карт из 36 по 4 штук, это количество перестановок без повторений элементов. То есть  $n = C_{36}^4$

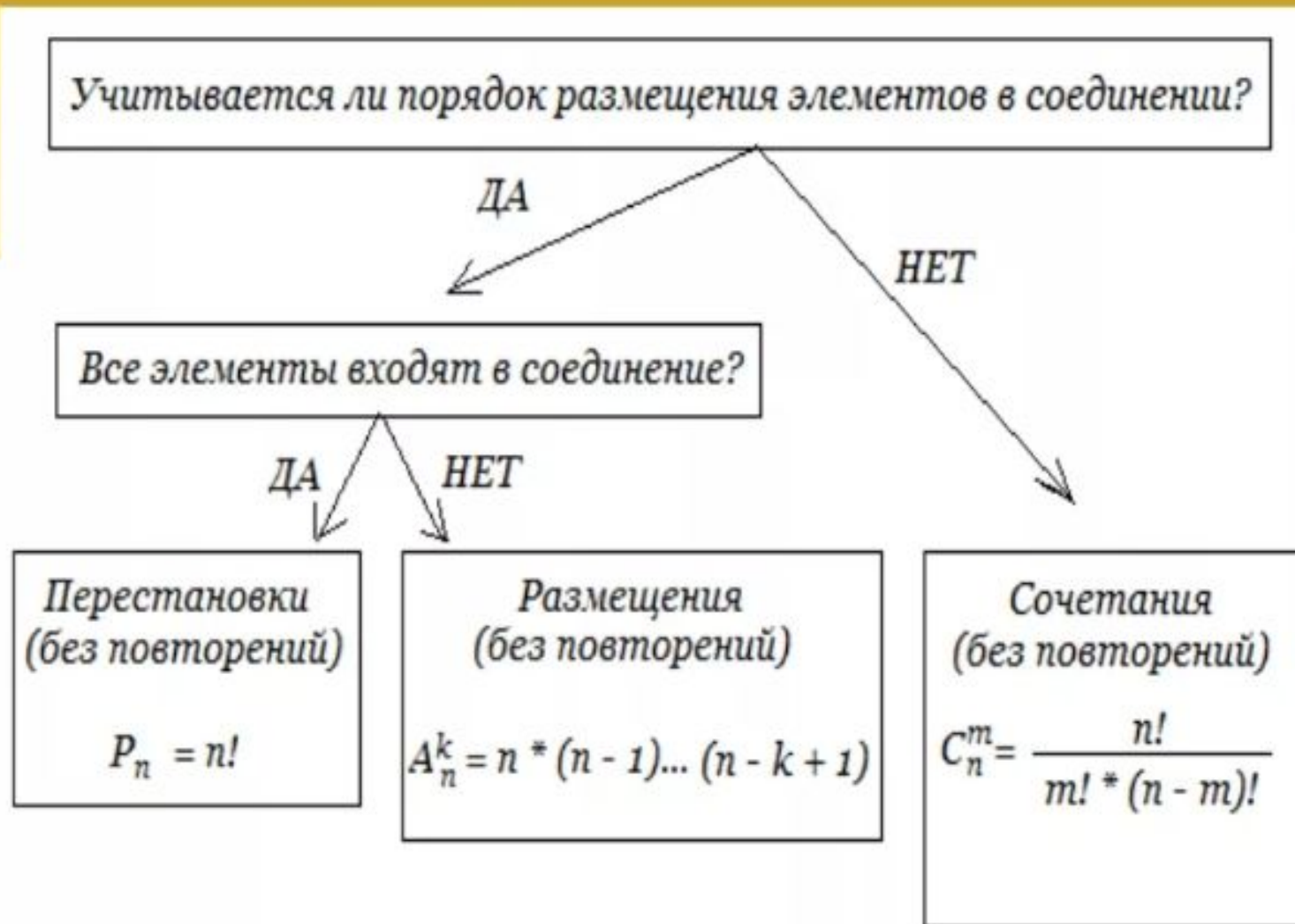
**а)** Король червей не попался – то есть попалась любая другая карта. Благоприятных нам карт осталось 35, то есть нам надо найти количество комбинаций из 35 карт по 4 вытащенным картам, без повторений среди вытащенных карт. Используя формулы комбинаторики:

$$m = C_{35}^4 = \frac{35!}{4!(35-4)!} = \frac{31! \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35}{4! \cdot 31!}$$

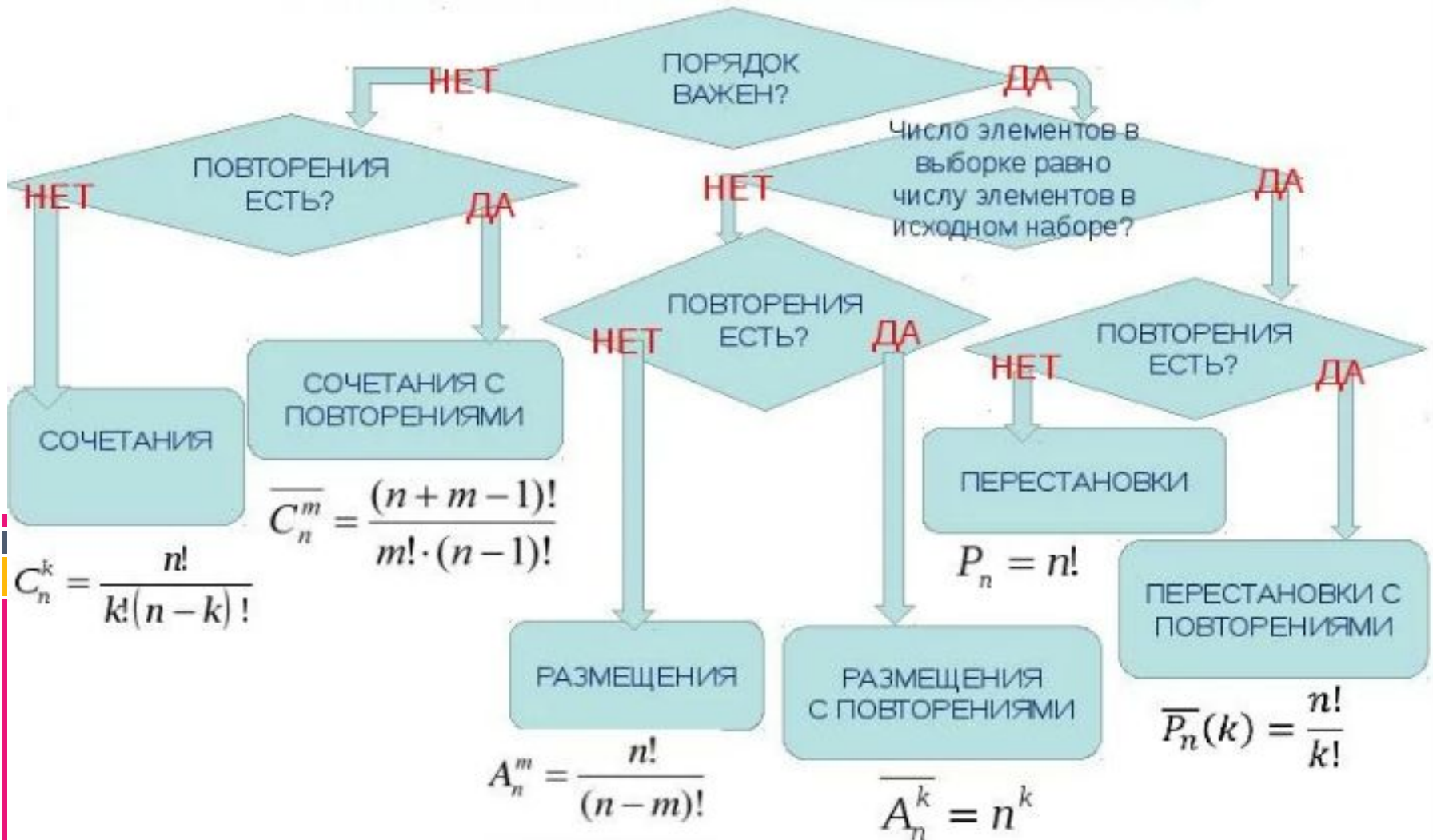
Найдем вероятность, используя классическую формулу:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_{35}^4}{C_{36}^4} = \frac{35!}{4!31!} \cdot \frac{4!32!}{36!} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

- \* Правильность выбора формулы можно записать в виде таблицы:



# ВЫБОР ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ



## \* Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что  $n$  элементов различны.

Если среди  $n$  элементов есть  $n_1$  элемент одного вида,  $n_2$  элементов другого вида и т.д.,  $n_k$  элементов  $k$ -го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\bar{P}_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}, \text{ где } n_1 + \dots + n_k = n$$

### Пример 4.

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова **ДЕД**?  
 $n=3, k=2, n_1=2, n_2=1$

$$\bar{P}_3(2,1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$