

ЗАДАЧА О РАСШИВКЕ УЗКИХ МЕСТ ПРОИЗВОДСТВА

При выполнении оптимальной производственной программы может оказаться так, что некоторые ресурсы расходуются полностью. Говорят, что такие ресурсы образуют узкие места производства. Когда какой-либо ресурс используется полностью, уменьшение объема этого ресурса может повлиять на всю структуру плана производства и прибыль предприятия. Следовательно, такой ресурс желательно иметь с некоторым запасом, чтобы сохранить структуру плана и получить возможность увеличения прибыли предприятия.

Будем р а с ш и в а т ь узкие места производства, т. е. закажем дополнительно те ресурсы, которые полностью используются при выполнении оптимальной производственной программы. Пусть

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

это вектор дополнительных объемов ресурсов.

При этом вектор запасов ресурсов изменится от \mathbf{b} до $(\mathbf{b} + \mathbf{t})$, а производственная программа — от

$$\mathbf{h} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$$

до

$$\mathbf{h}_{\text{нов}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{t})$$

Здесь Q^{-1} – матрица, состоящая из столбцов первоначального базиса (т.е. $\bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5$) последней симплекс-таблицы, h – производственная программа, получившаяся в последней симплекс-таблице

Для сохранения структуры производственной программы, должно выполняться условие устойчивости двойственных оценок:

$$h + Q^{-1}t \geq 0.$$

Прирост прибыли, связанный с вовлечением в производство t_1 дополнительных единиц первого ресурса, t_2 — второго, ..., t_m — m -го, равен

$$w = \mathbf{y}^T \mathbf{t} = y_1 t_1 + y_2 t_2 + \dots + y_m t_m,$$

так как двойственные оценки этих ресурсов (y_1, y_2, \dots, y_m) показывают, насколько увеличится прибыль при добавлении к имеющимся запасам единицы соответствующего ресурса. Естественно этот прирост прибыли максимизировать.

Кроме того, как правило, производитель не может получить неограниченно много ресурсов, т. е. все компоненты вектора \mathbf{t} ограничены.

В общем случае расшивка узких мест производства позволяет максимально задействовать имеющийся потенциал предприятия по производству данной продукции по данным технологиям в условиях существующих цен.

Задание. Решить задачу о расшивке узких мест производства при условии, что поставщики не могут поставить дополнительно более трети от первоначальных запасов ресурсов.

$$Z = 60x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 400, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 900, \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 600, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

Последняя симплекс-
таблица:

Б	0	60	40	0	0	0
	\bar{P}_0	\bar{P}_1	\bar{P}_2	\bar{P}_3	\bar{P}_4	\bar{P}_5
\bar{P}_1	140	1	0	4/5	-1/5	0
\bar{P}_2	120	0	1	-3/5	2/5	0
\bar{P}_3	100	0	0	1	-1	1
$\Delta_j = z_j$	13200	0	0	24	4	0

h

$Q^{(-1)}$

коэф-ты w

$$w = 24t_1 + 4t_2 \rightarrow \max$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & 0 \\ -3/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 140 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & 0 \\ -3/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} -4/5t_1 + 1/5t_2 \leq 140 \\ 3/5t_1 - 2/5t_2 \leq 120 \\ -t_1 + t_2 \leq 100 \end{cases}$$

Условие, которое состоит в том, что производитель не может получить более трети первоначальных запасов ресурсов, запишется как

$$\mathbf{t} \leq \frac{1}{3} \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 400 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_1 \leq 400 / 3 \\ t_2 \leq 300 \end{cases}$$

Окончательно задача о расшивке узких мест производства запишется в виде:

$$w = 24t_1 + 4t_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -4/5t_1 + 1/5t_2 \leq 140 \\ 3/5t_1 - 2/5t_2 \leq 120 \\ -t_1 + t_2 \leq 100 \\ t_1 \leq 400/3 \\ t_2 \leq 300 \\ t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Итак, $t_1 = 133$, $t_2 = 233$ - искомые объемы дополнительных ресурсов

$W=4133$ – прирост прибыли.