Принцип суперпозиции полей

Электрическое поле каждого заряда не зависит от полей других зарядов. Эти поля накладываются друг на друга и создают результирующее поле.

Напряженность результирующего поля равна геометрической (векторной) сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Потенциал результирующего поля равен <u>алгебраической сумме</u> потенциалов этих полей:

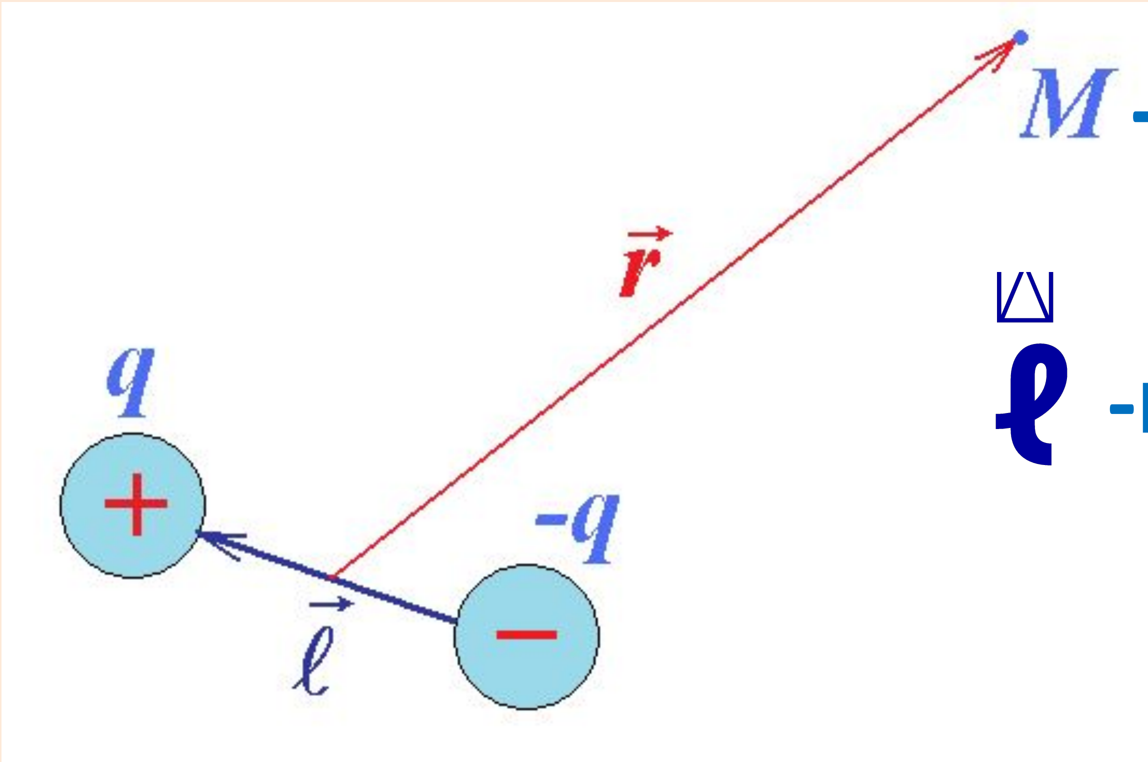
$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$

Найти потенциал намного проще, поскольку это скалярная величина.

Расчет полей по методу суперпозиции

1. Поле диполя.

Электрический диполь – система двух зарядов равных по величине и противоположных по знаку.



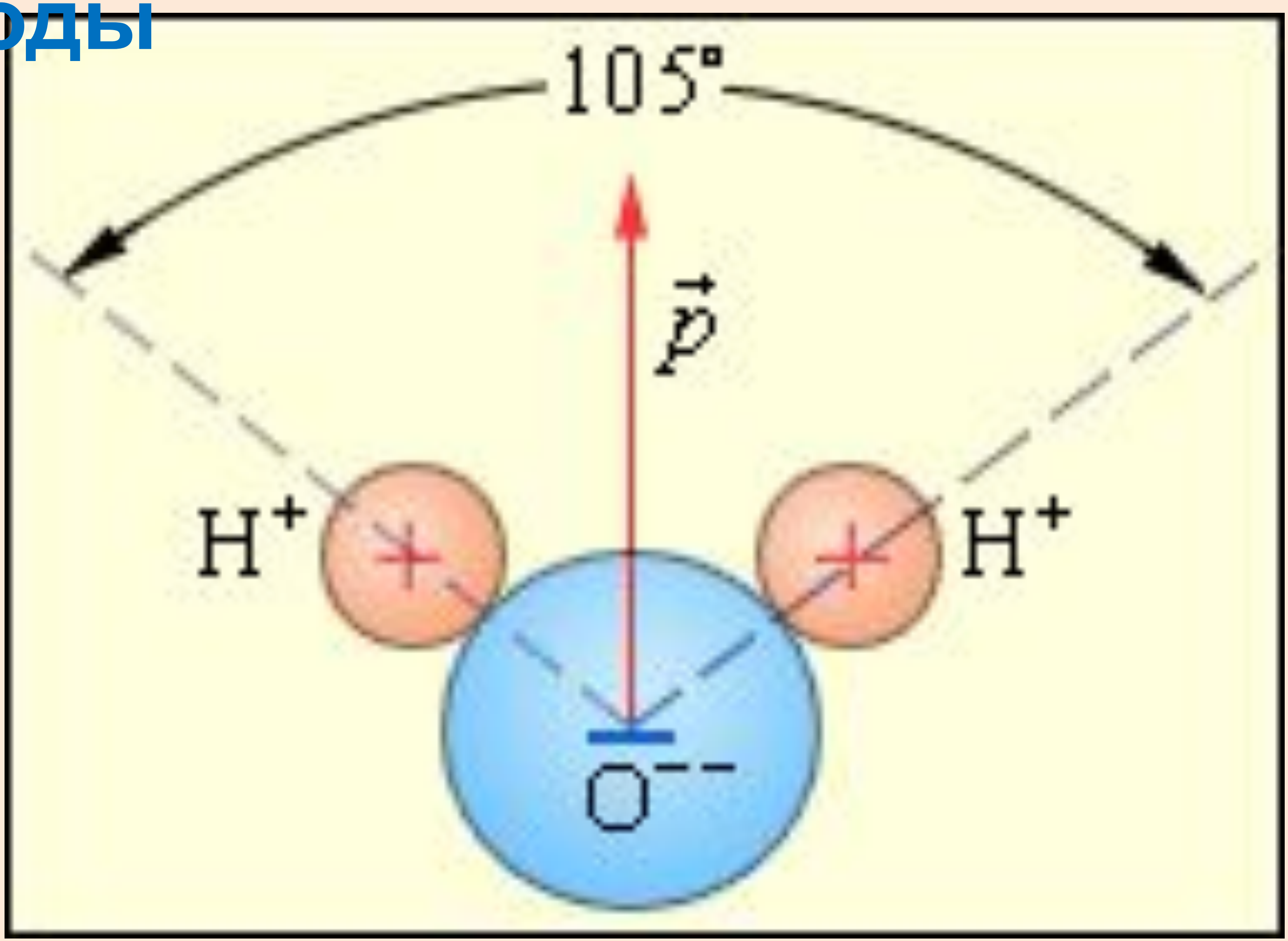
- точка поля

$\vec{\ell}$ -плечо диполя (от – к +)

$$\vec{p} = q\vec{\ell}$$

электрический дипольный момент

Дипольный момент молекулы воды

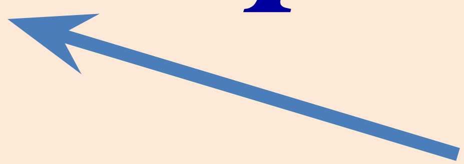


Дипольный момент измеряется в

$$[p] = 1\ \text{Кл} \cdot \text{м}$$

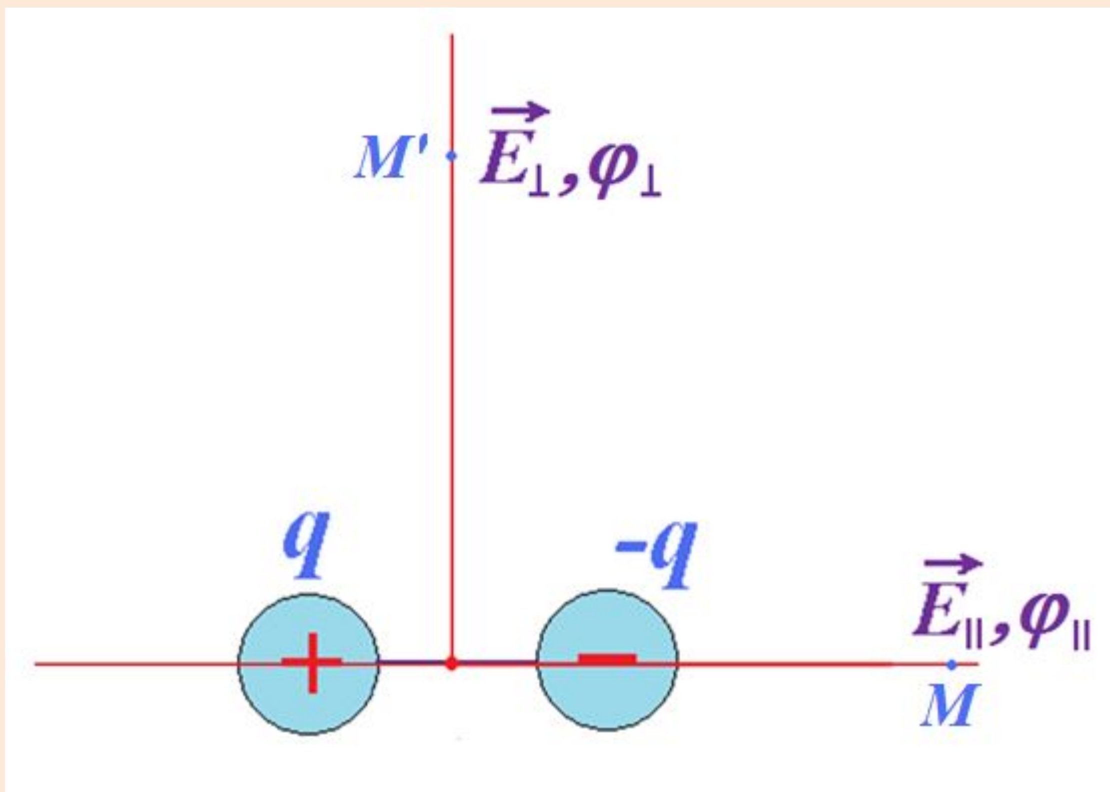
Диполь можно изобразить так:

$$\vec{p}$$

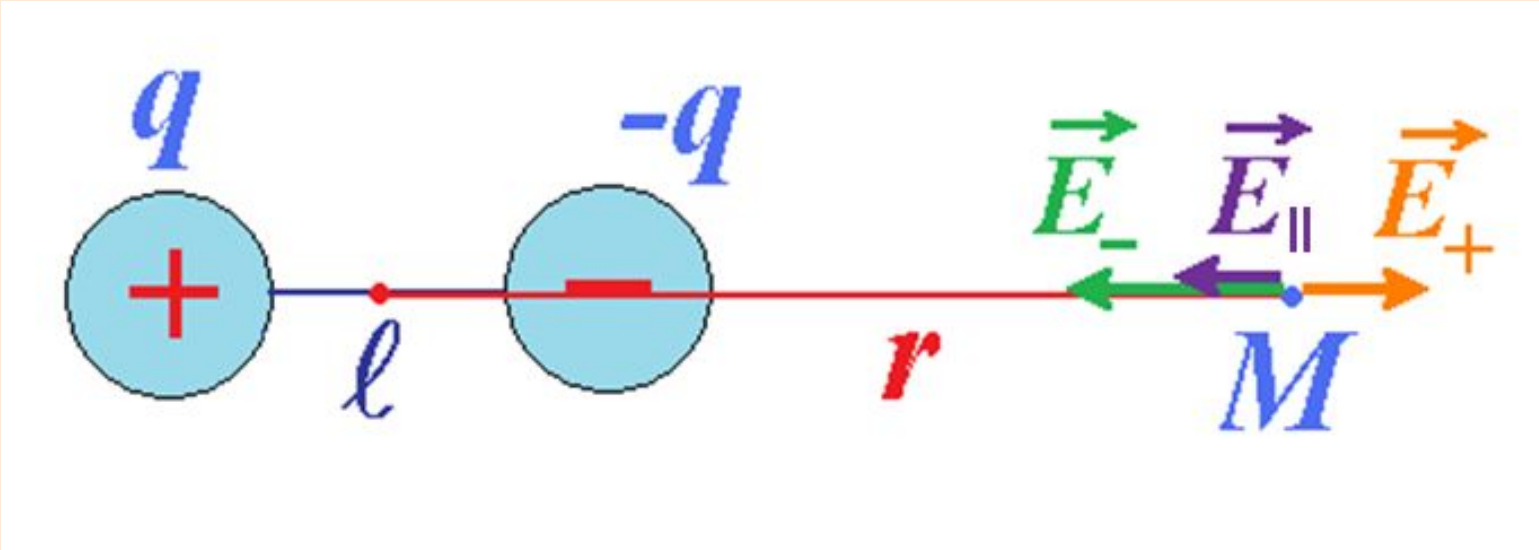


Если $r \gg \ell$, диполь называют точечным.

Будем искать поле на оси диполя (обозначим $\vec{E}_{\parallel}$ и $\varphi_{\parallel}$) и на перпендикуляре к оси (обозначим $\vec{E}_{\perp}$ и $\varphi_{\perp}$).



1) Поле на оси диполя:



По принципу суперпозиции:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_- + \vec{E}_+;$$

$$E_{\parallel} = E_- - E_+;$$

$$\varphi_{\parallel} = \varphi_- + \varphi_+$$

Пусть r_+ – расстояние от $+q$ до M, r_- –

расстояние от $-q$ до M.

Для точечного диполя

$$r_+ \approx r_- \approx r$$

Потенциал

:

$$\varphi_{\square} = k\frac{-q}{r_-} + k\frac{q}{r_+} = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kq\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

Учтем, что $r_+ - r_- = \ell$ и $r_+ \cdot r_- \approx r^2$.

$$\varphi_{\square} = -k\frac{q\ell}{r^2}$$

Заметим, что $q\ell = p$. Тогда

$$\varphi = -k\frac{p}{r^2}$$

А со стороны положительного заряда

$$\varphi = k\frac{p}{r^2}$$

Потенциал поля диполя убывает как квадрат расстояния – быстрее, чем для точечного заряда.

Напряженность:

$$E_{\square} = k\frac{q}{r_-^2} - k\frac{q}{r_+^2} = kq\left(\frac{r_+^2 - r_-^2}{r_-^2 r_+^2}\right) =$$

$$= kq\left(\frac{(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)}{r_-^2 r_+^2}\right)$$

Учтем, что

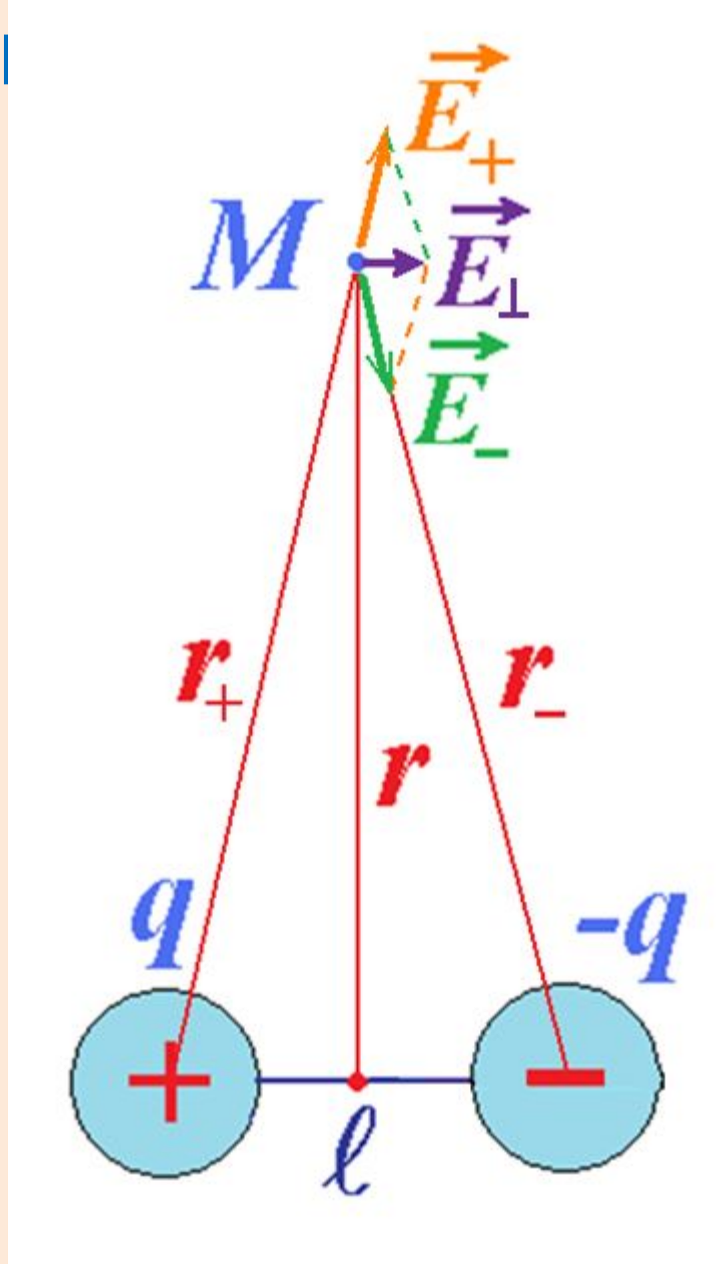
$$r_+ - r_- = \ell,\ r_+ + r_- \approx 2r \text{ и } r_+^2 \cdot r_-^2 \approx r^4$$

$$E_{\square} = kq\left(\frac{2r\ell}{r^4}\right) = 2k\frac{q\ell}{r^3}$$

$$E = 2k\frac{p}{r^3}$$

Напряженность поля диполя убывает как куб расстояния – тоже быстрее, чем у точечного заряда.

2) Поле на перпендикуляре к оси ди



Потенциал искать не надо. Ясно, что

$$\varphi_\perp = 0.$$

Ищем напряженность:

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}_- + \vec{E}_+$$

Большие и маленькие треугольники на рисунке подобны. Тогда

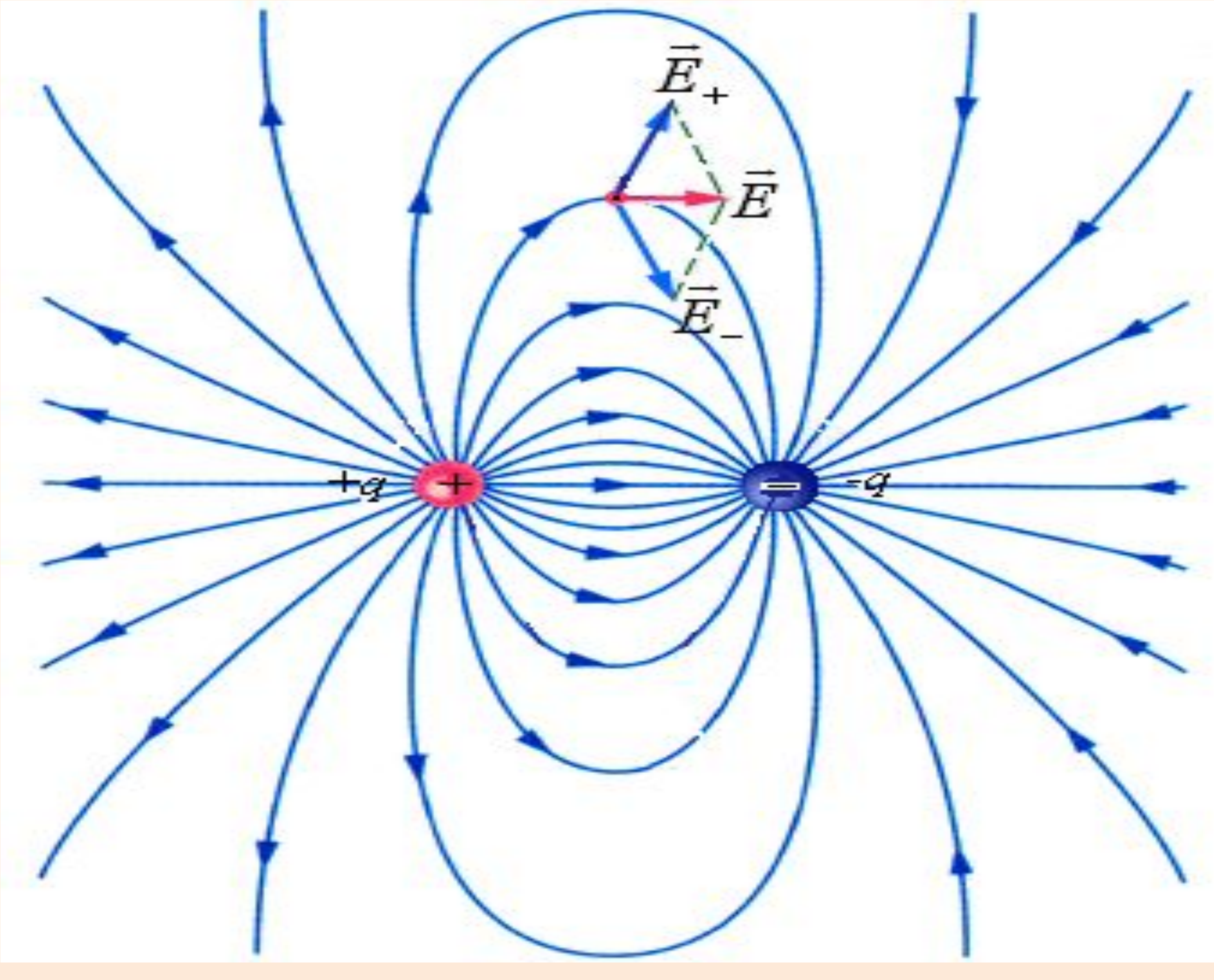
$$\frac{E_\perp}{E_+} = \frac{\ell}{r_+} \approx \frac{\ell}{r}$$

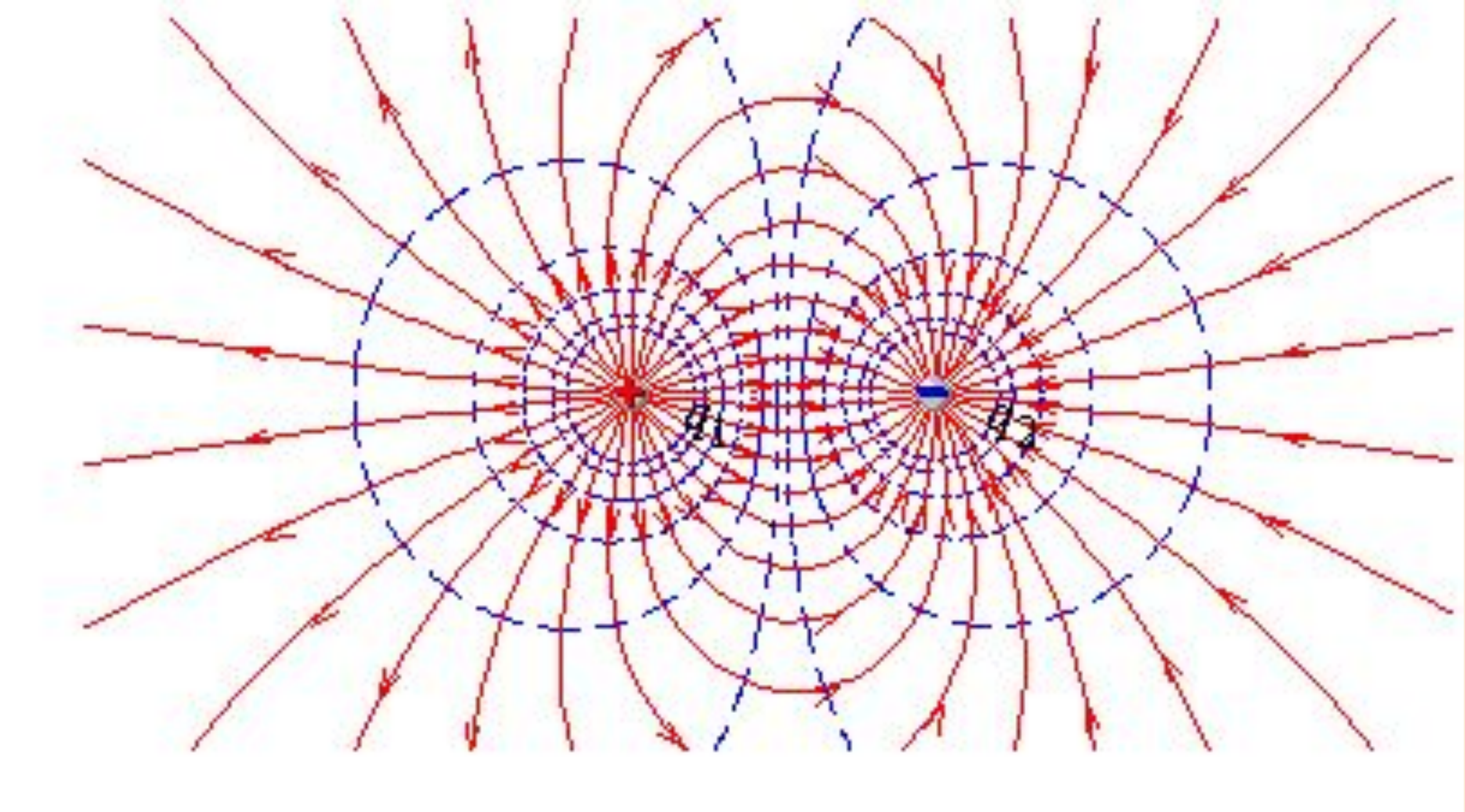
$$E_\perp = E_+ \frac{\ell}{r} = k\frac{q}{r^2} \cdot \frac{\ell}{r}$$

$$E_{\perp} = k\frac{p}{r^3}$$

Тоже убывает как куб расстояния.

Картина поля диполя





q_1
q_2

Непрерывно распределенный заряд

Пусть заряд – не точечный, а непрерывно распределен по протяженному телу.

<u>Линейная</u> плотность заряда – заряд, приходящийся на единицу длины.

$$[\lambda] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$$

λ

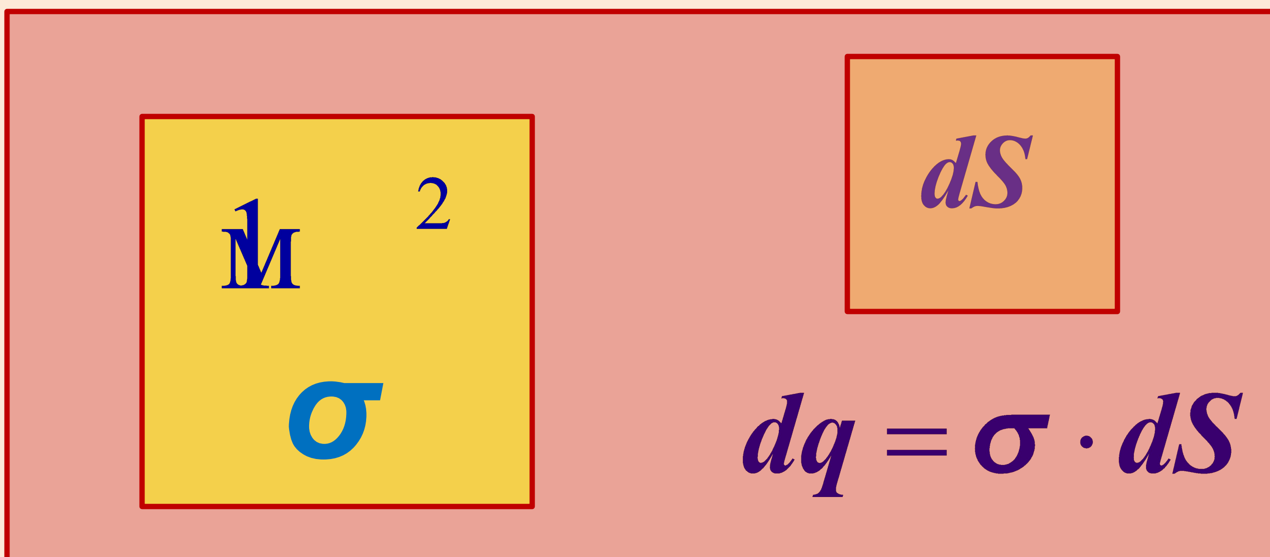
$$dq = \lambda \cdot d\ell$$

1 м

$d\ell$

Поверхностная плотность заряда – заряд единицы площади.

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$$



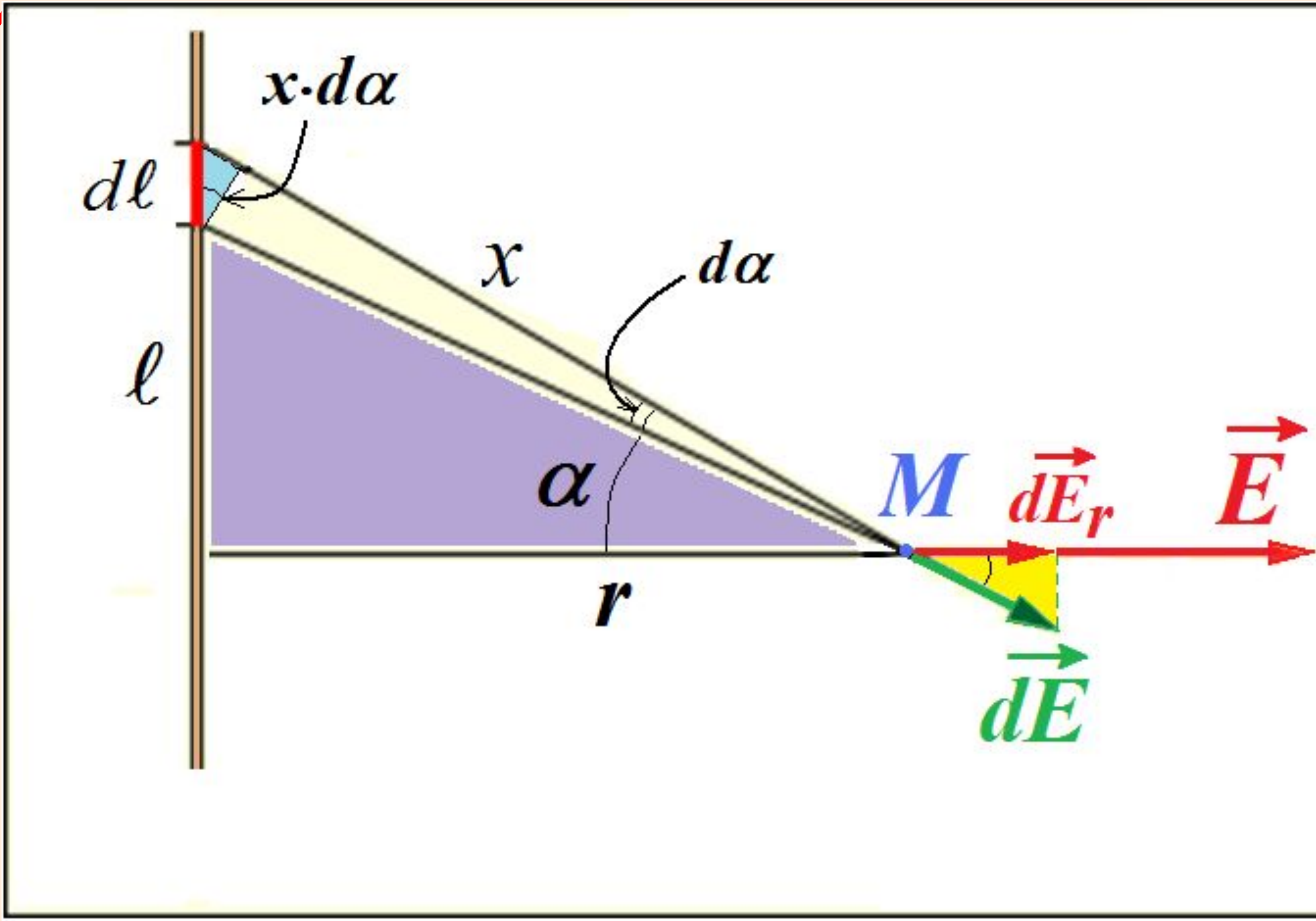
Объемная плотность заряда – заряд единицы объема.

$$[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$$

Заряд объема dV :

$$dq = \rho \cdot dV$$

2. Поле бесконечной однородно заряженной ни



Каждый элемент длины $d\ell$ создает напряженность $d\vec{E}$. Эти векторы образуют “веер”.

$$\vec{E} = \int\limits_{\text{по нити}} d\vec{E}$$

Этот вектор направлен горизонтально, т. к. в вертикальном направлении в сумме имеем нуль.

Горизонтальная компонента каждого вектора $d\vec{E}$ равна $d\vec{E}_r$.

На рисунке три цветных треугольника подобны. Острый уголок при вершине равен α .

$$dE_r = dE \cdot \cos\alpha$$

$$E = \int dE_r = \int dE \cdot \cos\alpha$$

$$dE = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{\lambda \cdot d\ell}{x^2}$$

$$E = k\lambda \int \frac{d\ell \cdot \cos\alpha}{x^2}$$

Интегрировать будем по углу. Верхняя и нижняя части нити дают равный вклад. Угол меняем в пределах от нуля до π/2, а интеграл умножим на 2. Остается выразить dl и x.

В верхнем маленьком треугольнике

$$d\ell = \frac{x \cdot d\alpha}{\cos\alpha}$$

В большом треугольнике

$$x = \frac{r}{\cos\alpha}$$

Тогда $d\ell = \dfrac{r \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ и

$$E = 2k\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\ell \cdot \cos\alpha}{x^2} = 2k\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{r^2} \cdot \cos\alpha$$

$$E = 2\frac{k\lambda}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \cdot d\alpha = 2\frac{k\lambda}{r} \sin\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{k\lambda}{r}$$

Для вакуума

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Напряженность поля нити:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Убывает как первая степень расстояния – медленнее, чем поле точечного заряда.