M2. Планиметрия

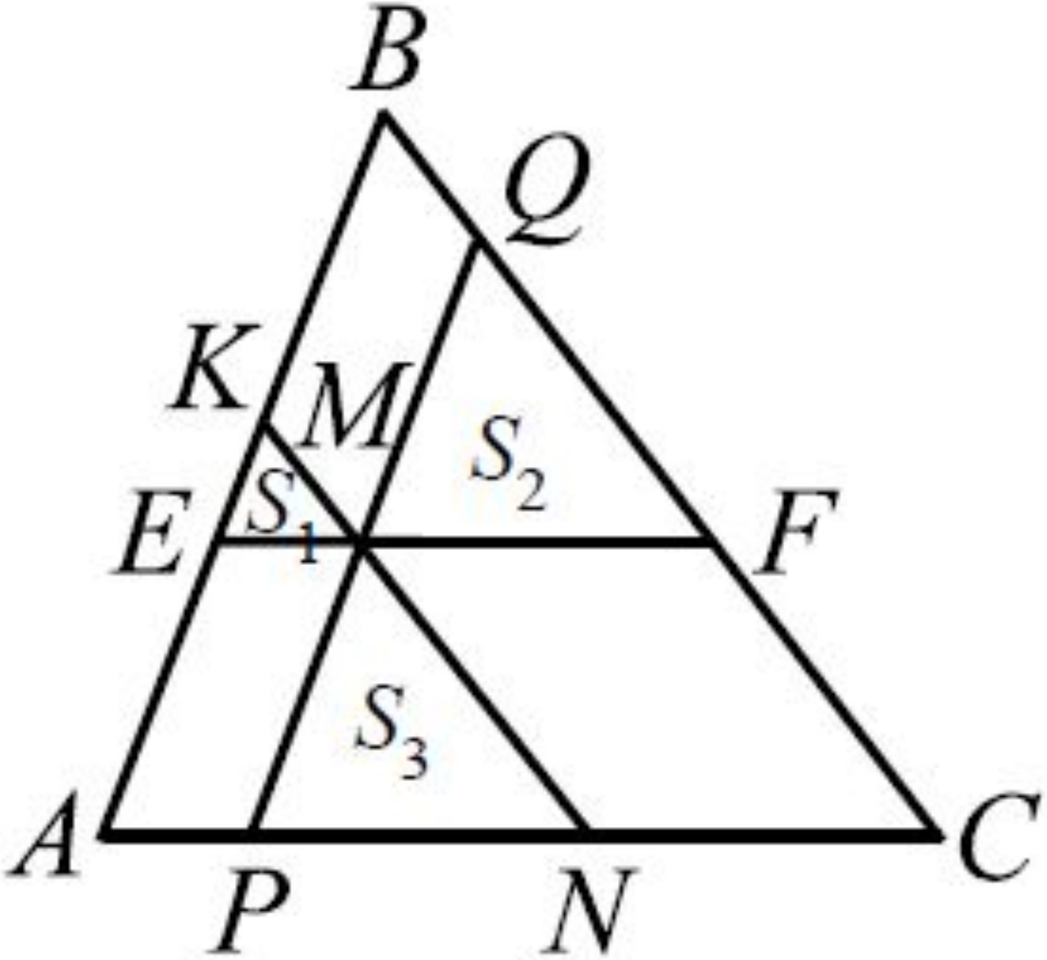
Обзор методички

Темы 1.

- Подобия треугольников
- Отношение площадей в случае подобия
- Теоремы о медианах, высотах и биссектрисах
- Теоремы Чевы и Менелая
- Теоремы синусов и косинусов

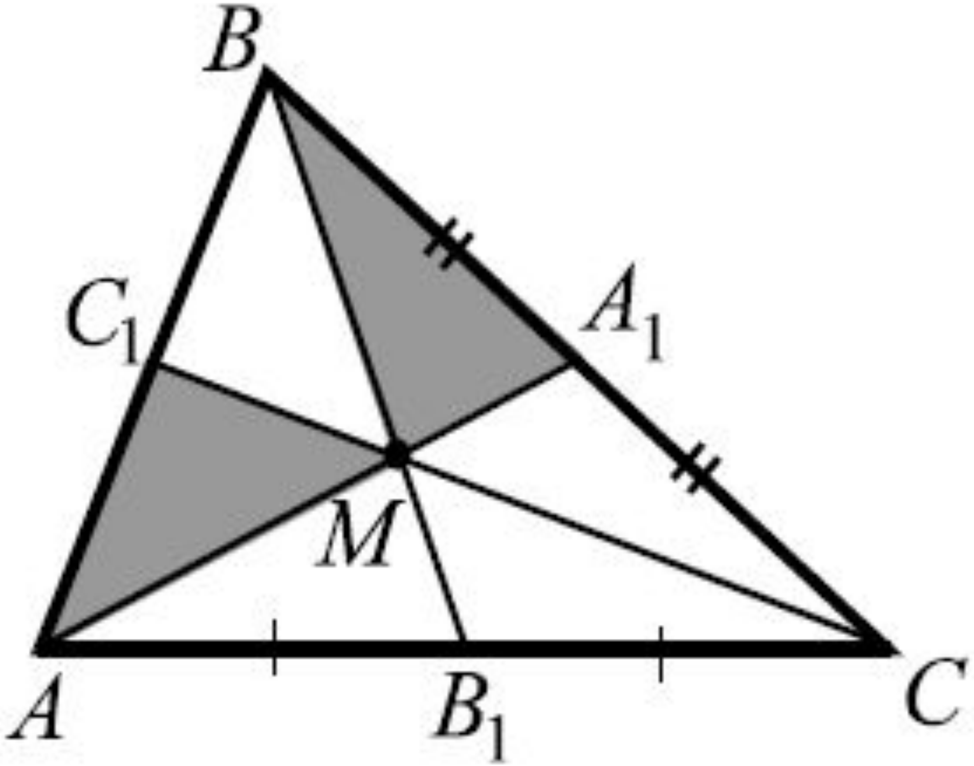
Пример 3. Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные его сторонам. При этом образовались три треугольника (рис. 8), площади которых равны S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$$



Теорема 1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения каждая медиана делится в отношении 2 : 1, считая от вершины.

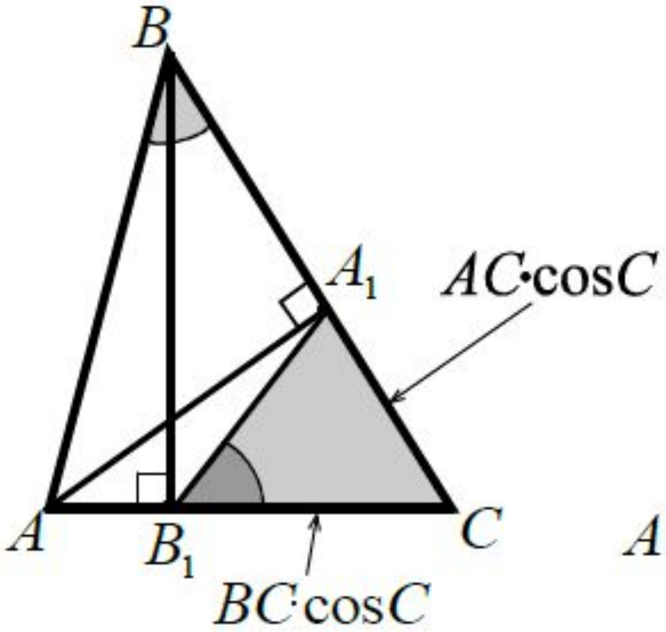
Теорема 2. Три медианы, пересекаясь, разбивают треугольник на 6 треугольников с общей вершиной, площади которых равны между собой.

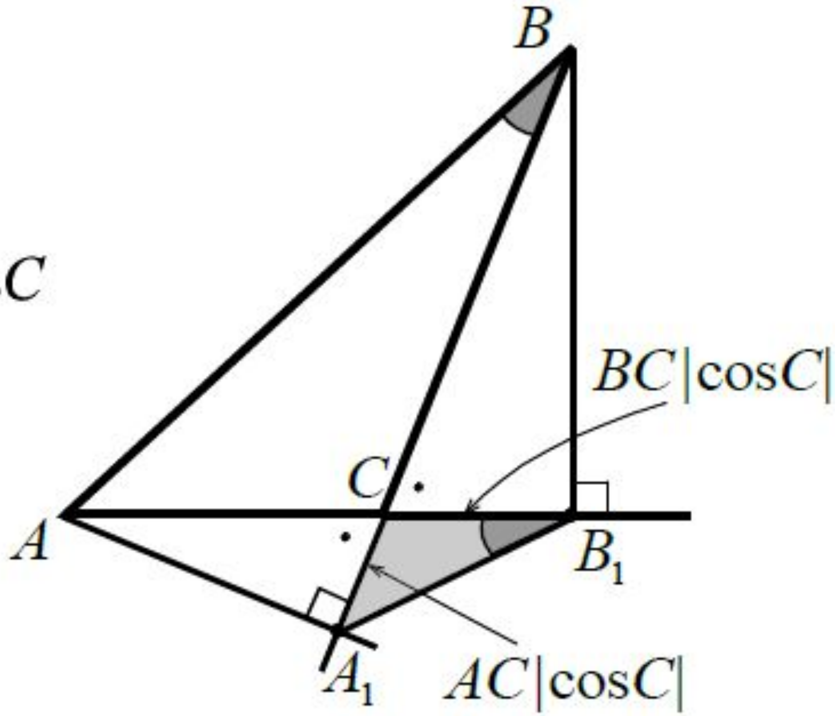


- Длина медианы =

<u>1-ая лемма.</u>

Если AA_1 **и** BB_1 – **высоты непрямоугольного треугольника** ABC, **то треугольник** A_1B_1C **подобен треугольнику** ABC **с коэффициентом подобия** $k = \dfrac{A_1B_1}{AB} = |\cos C|$.

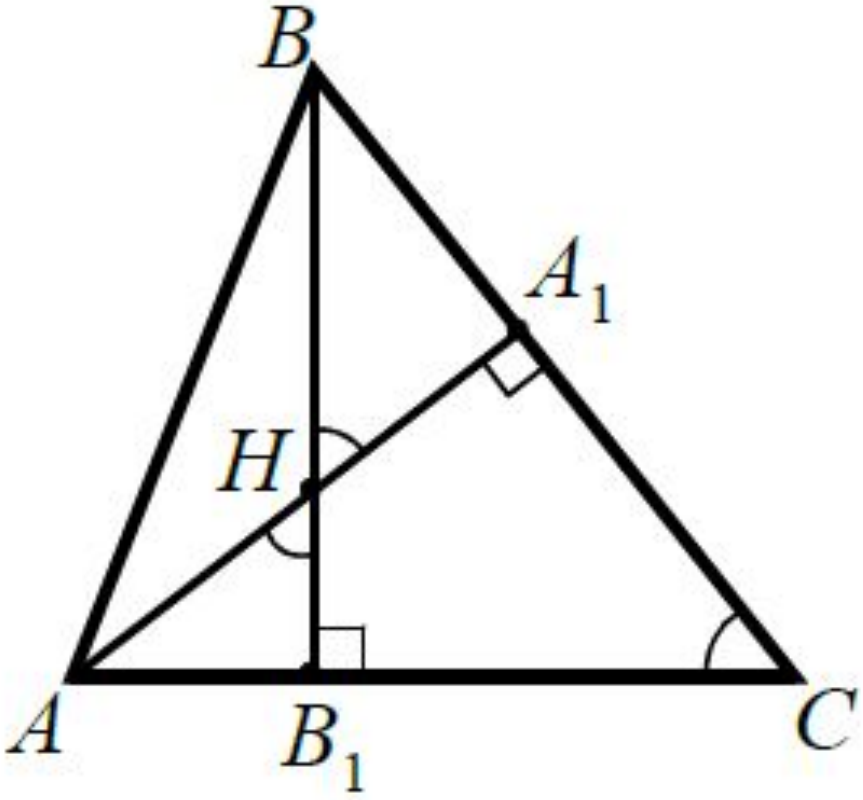




2-ая лемма.

Если высоты AA_1 **и** BB_1 **(или их продолжения) пересекаются в точке** H, **то справедливо равенство** $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$. **(рис. 12а, б).**

Идея доказательства представлена на рис. 12.



$\Delta A_1BH \sim \Delta B_1AH$

Теорема 5. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. если AD – биссектриса треугольника ABC (рис. 14), то

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\quad\left(\frac{x}{y}=\frac{c}{b}\right).$$

Доказательство можете выполнить сами, например, применяя теорему синусов к треугольникам ADB и ADC.

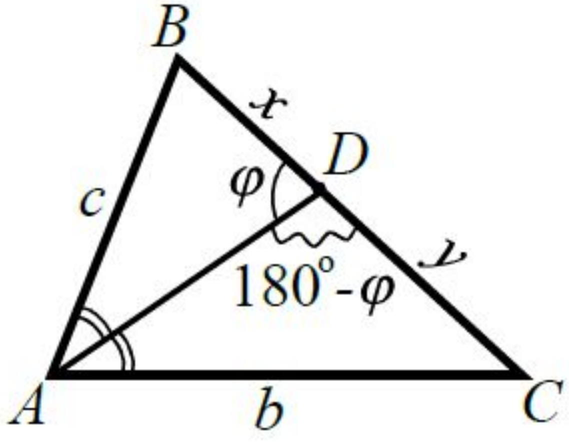
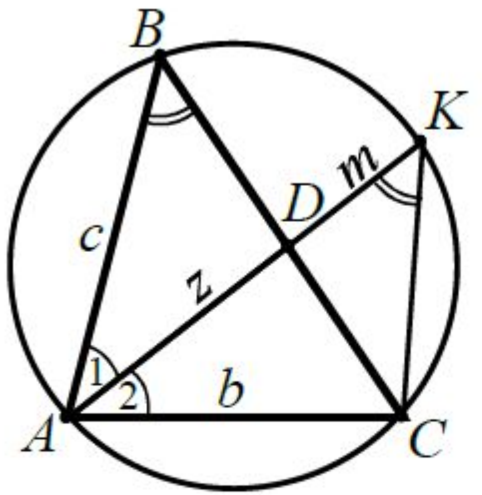


Рис. 14

Теорема 6. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC (рис. 14), тогда, $AD=\sqrt{AB\cdot AC-DB\cdot DC}$, **или, в** обозначениях рисунка 14, $AD=\sqrt{bc-xy}$.

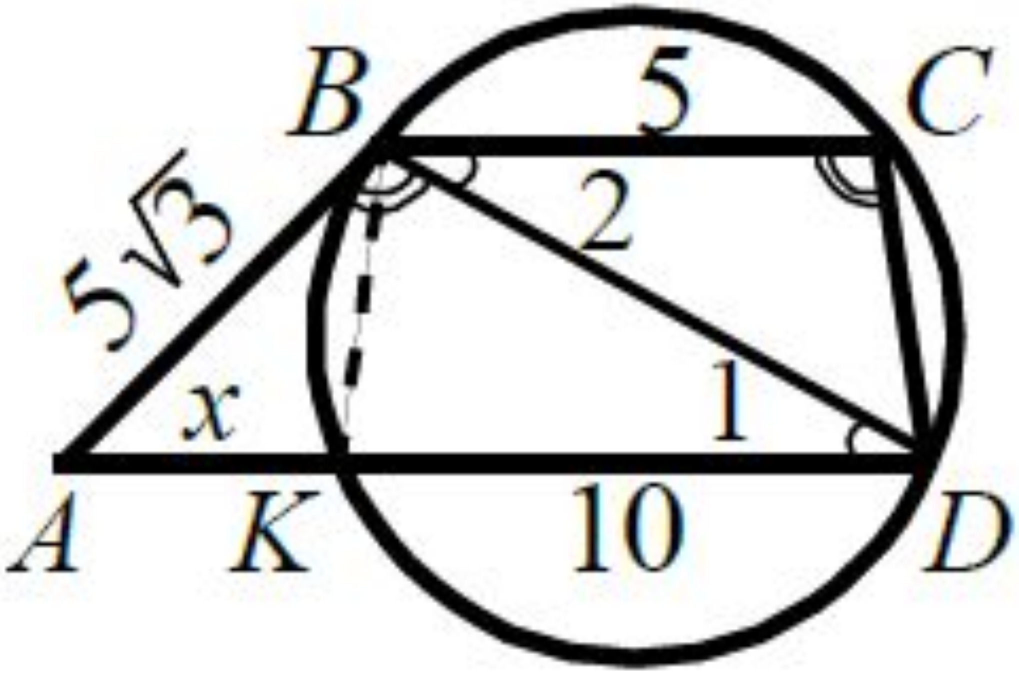
Рис. 14



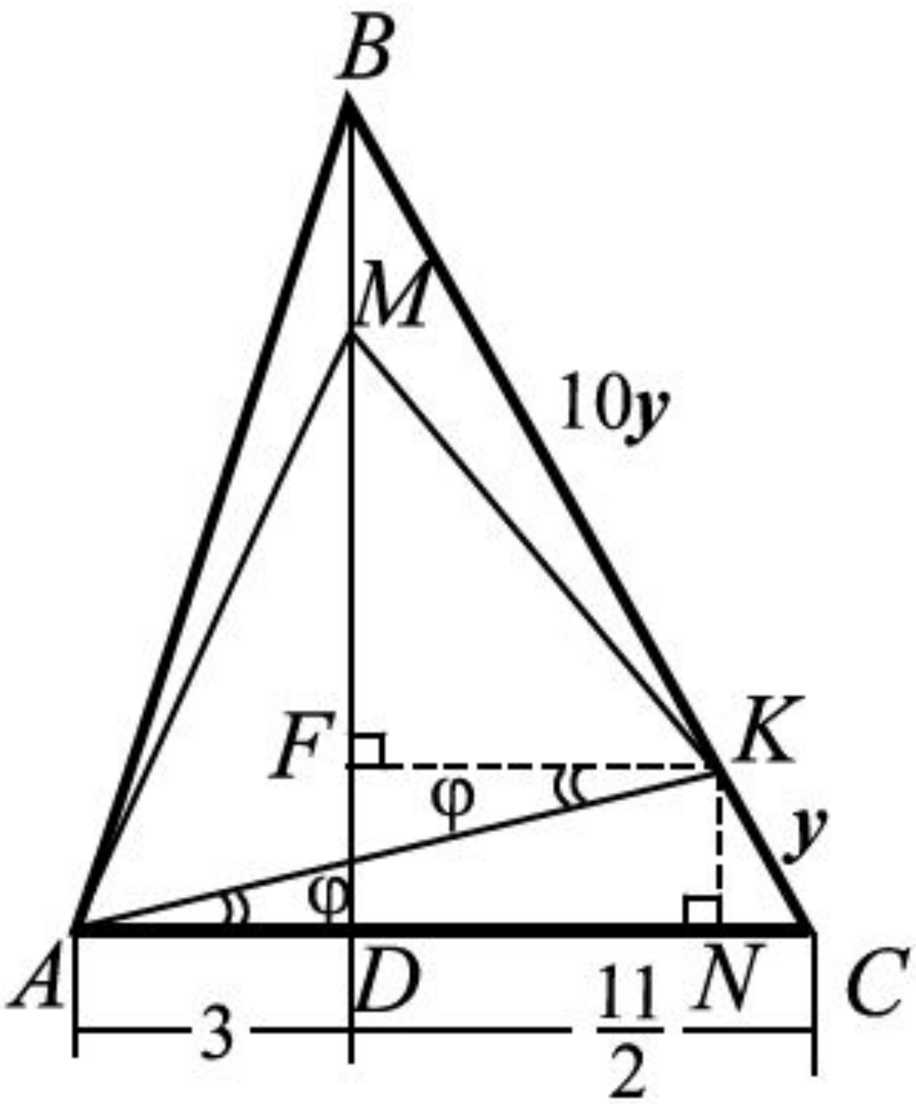
Темы 2.

- Окружности
  - Угол м/у касательной и хордой
  - Угол опирающийся на дугу
  - Теорема об отрезках касательных

Пример 10. Окружность проходит через вершины C и D трапеции $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке B и пересекает большее основание AD в точке K (рис. 25). Известно, что $AB = 5\sqrt{3}$, $BC = 5$ и $KD = 10$. Найдите радиус окружности.



Пример 15. Точки K и M расположены соответственно на стороне BC и высоте BD остроугольного треугольника ABC. Треугольник AMK – равносторонний (рис. 30). Найдите его площадь, если $AD = 3$, $DC = \dfrac{11}{2}$, $BK : KC = 10:1$.



Пример 16. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC, пресекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно (рис. 31). Известно, что $AB = 4$, $MN = 2$ и $\angle ACB = \arcsin\frac{3}{5}$. Найдите радиус окружности.

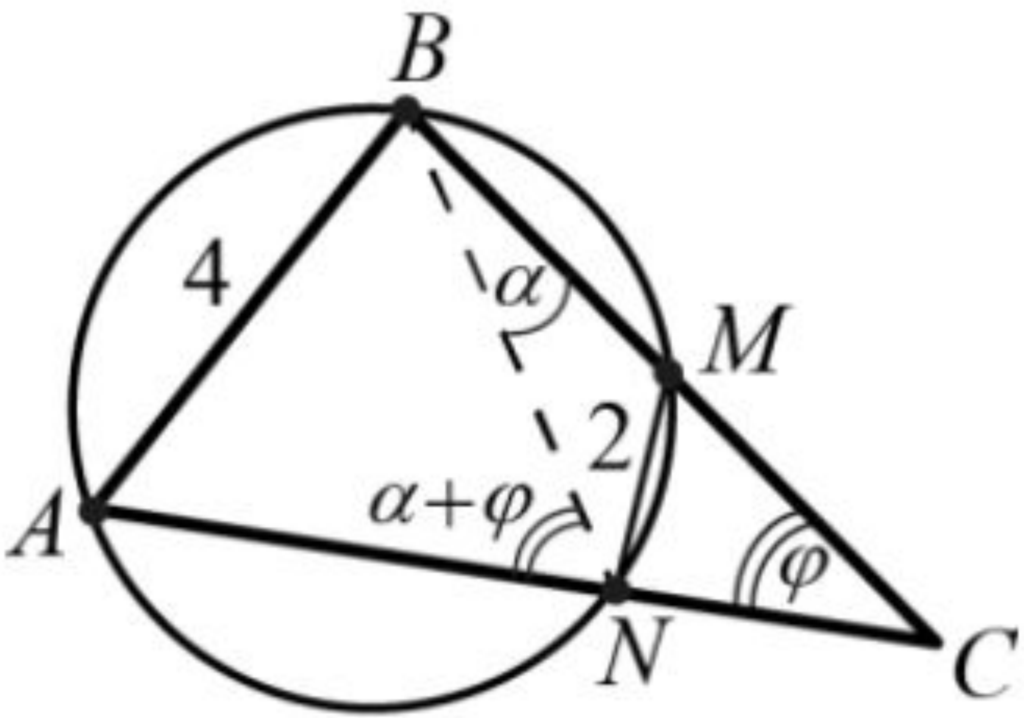
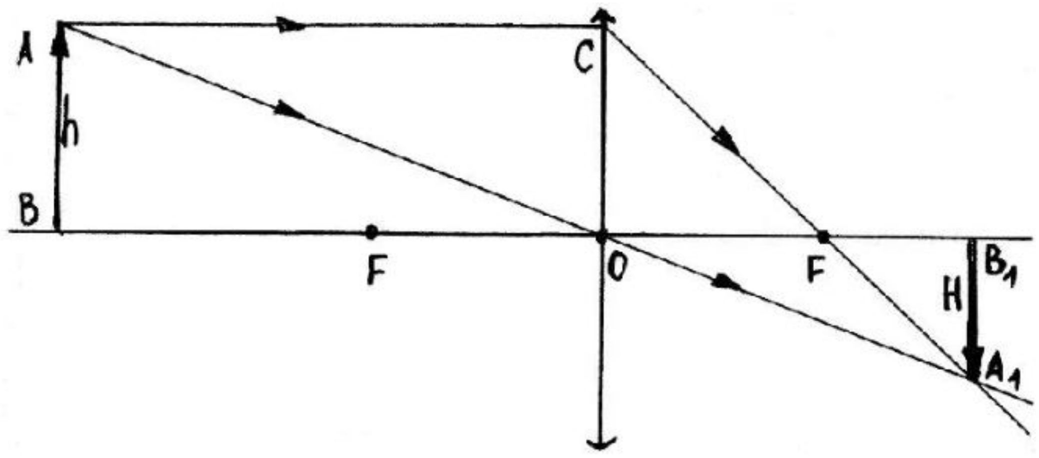
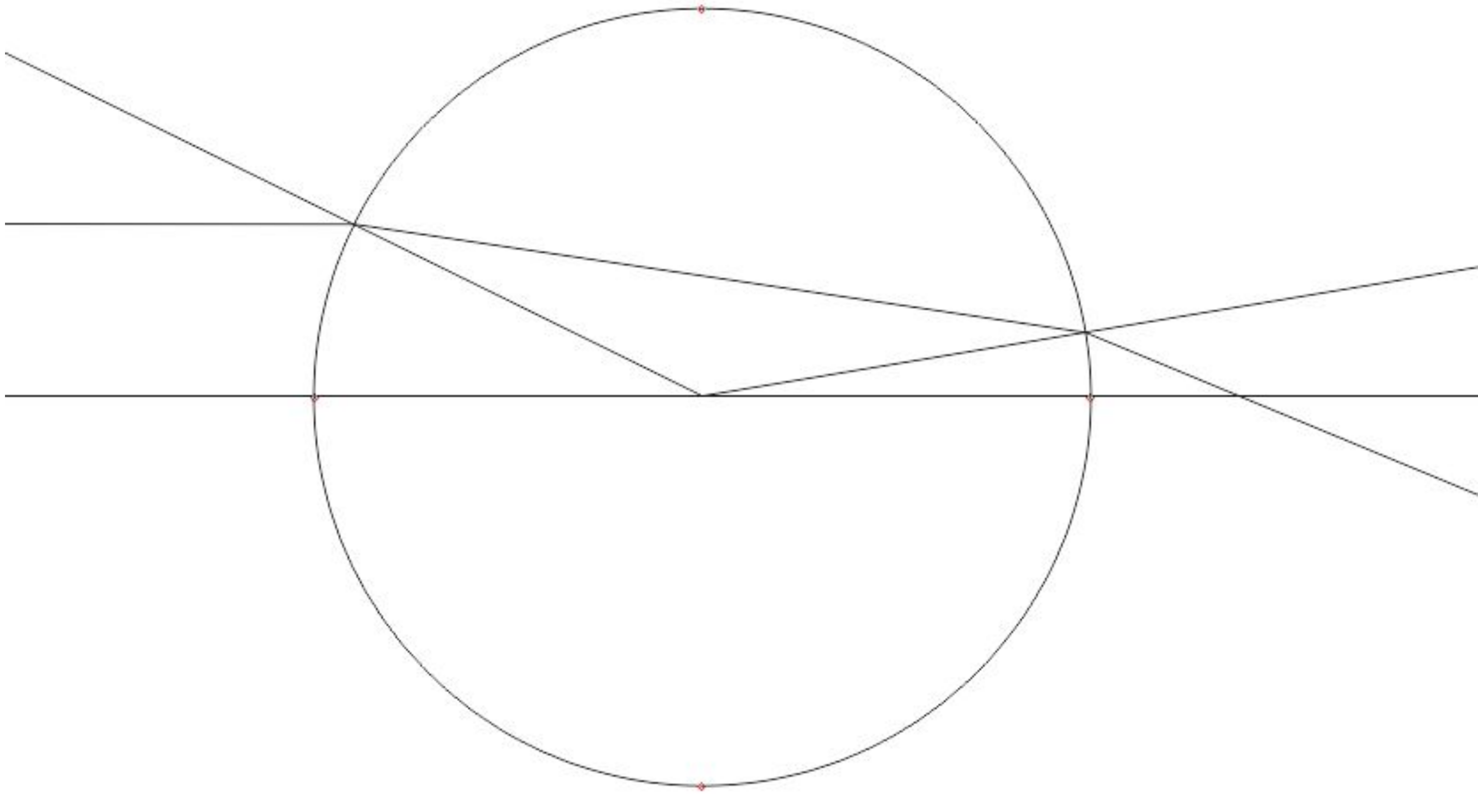


Рис. 31

Вывод формулы тонкой линзы



Найти фокус круглого шарика радиуса R



Найти фокус параболического зеркала