

М2. Планиметрия

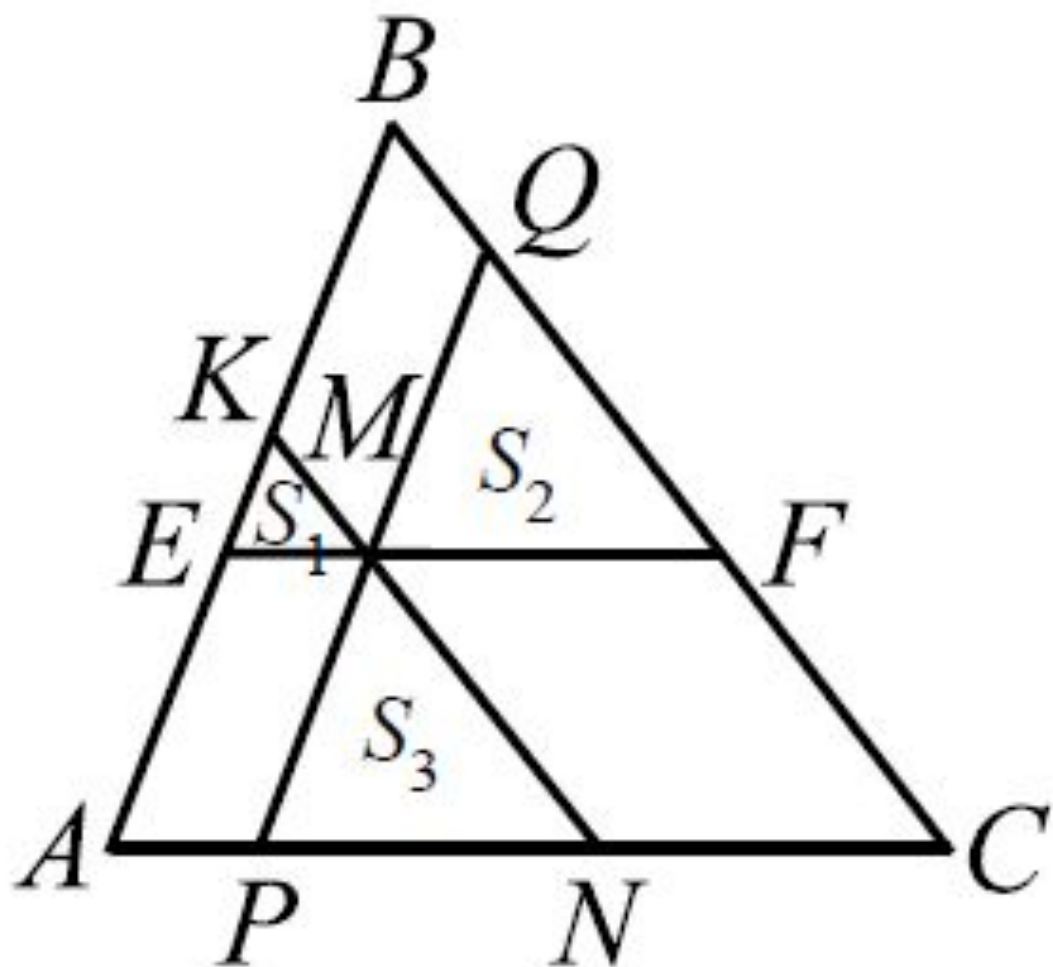
Обзор методички

Темы 1.

- Подобия треугольников
- Отношение площадей в случае подобия
- Теоремы о медианах, высотах и биссектрисах
- Теоремы Чебы и Менелая
- Теоремы синусов и косинусов

Пример 3. Через точку M , лежащую внутри
треугольника ABC , проведены три прямые, параллельные его сторо-
нам. При этом образовались три треугольника (рис. 8), площади кото-
рых равны S_1 , S_2 и S_3 . Найдите площадь треугольника ABC .

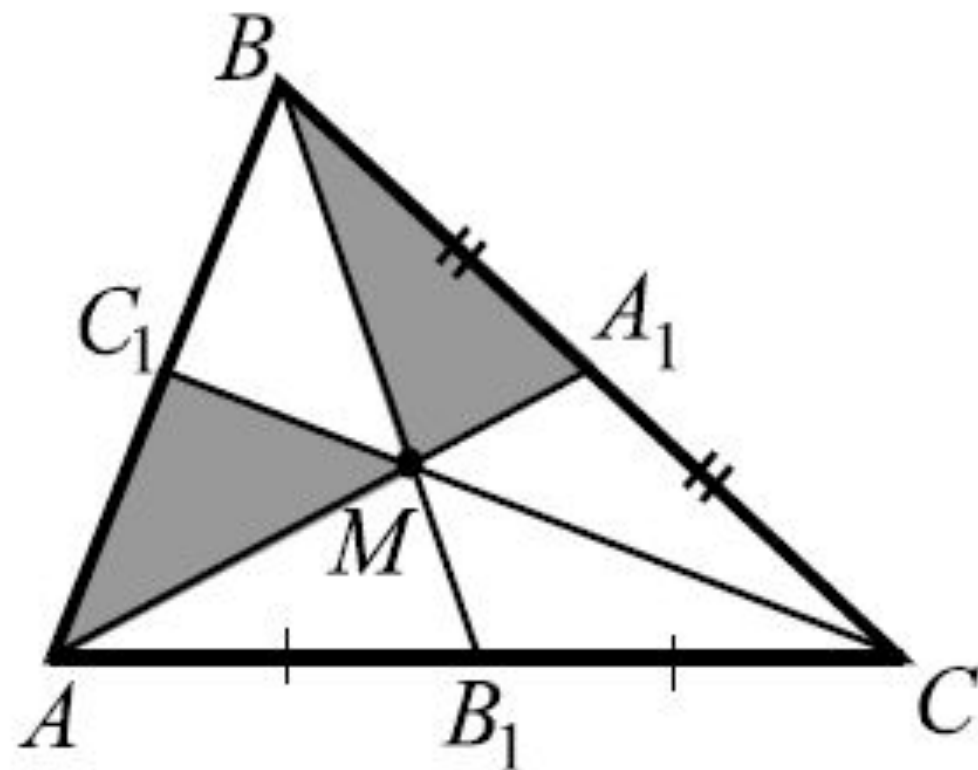
$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \right)^2$$



Теорема 1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения каждая медиана делится в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

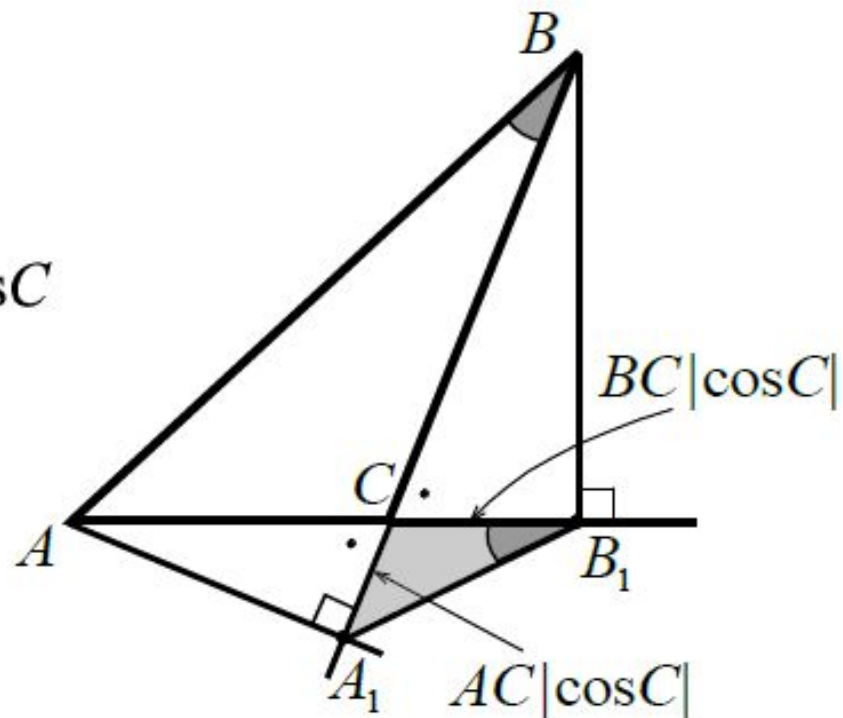
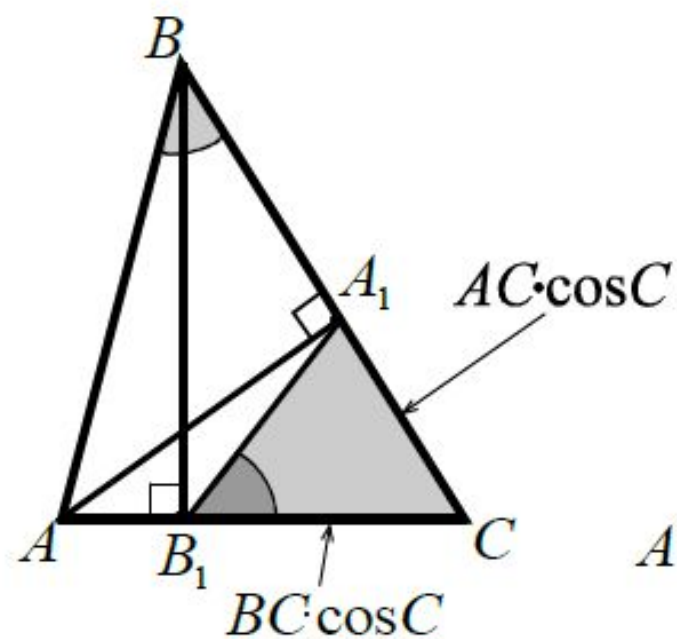
Теорема 2. Три медианы, пересекаясь, разбивают треугольник на 6 треугольников с общей вершиной, площади которых равны между собой.

• Длина медианы =



1-ая лемма.

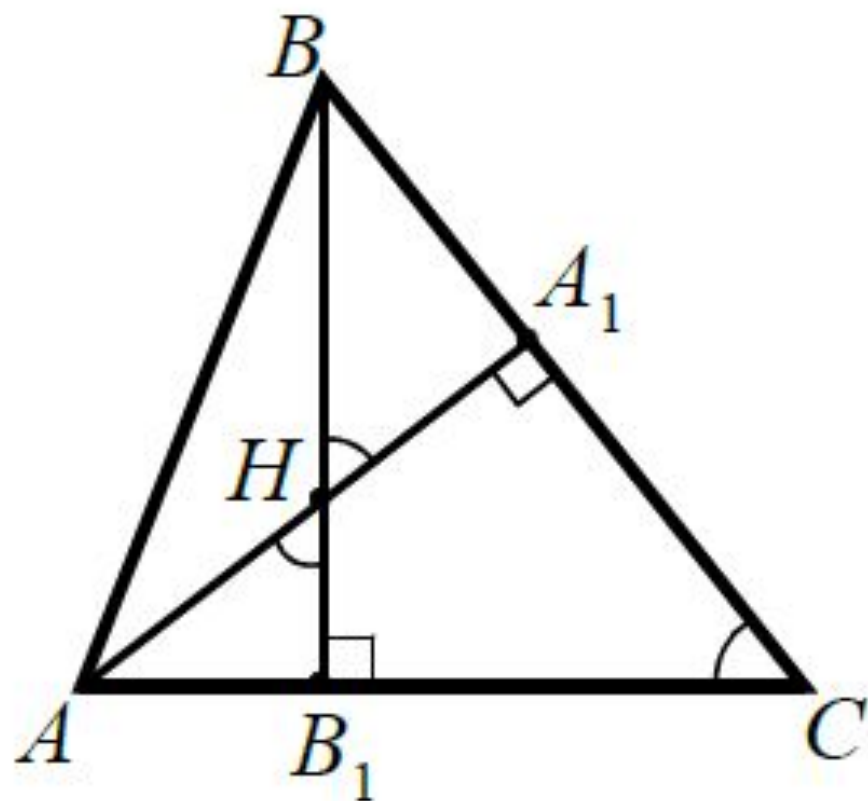
Если AA_1 и BB_1 – высоты непрямоугольного треугольника ABC , то треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{A_1B_1}{AB} = |\cos C|$.



2-ая лемма.

Если высоты AA_1 и BB_1 (или их продолжения) пересекаются в точке H , то справедливо равенство $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$. (рис. 12а, б).

Идея доказательства представлена на рис. 12.



$$\Delta A_1BH \sim \Delta B_1AH$$

Теорема 5. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. если AD – биссектриса треугольника ABC (рис. 14), то

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \left(\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \right).$$

Доказательство можете выполнить сами, например, применяя теорему синусов к треугольникам ADB и ADC .

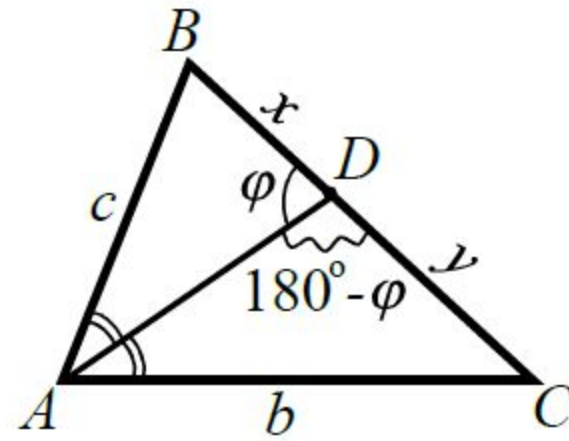
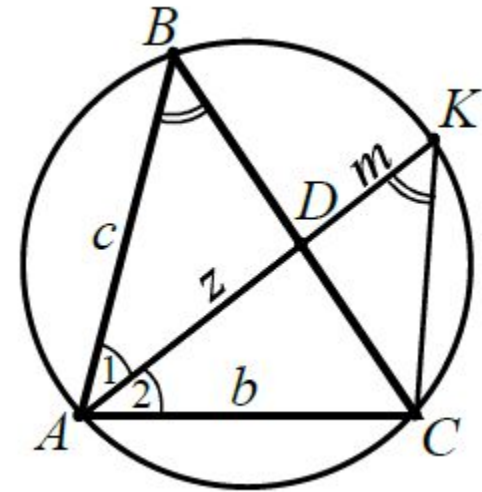


Рис. 14

Теорема 6. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC (рис. 14), тогда, $AD = \sqrt{AB \cdot AC - DB \cdot DC}$, или, в обозначениях рисунка 14, $AD = \sqrt{bc - xy}$.

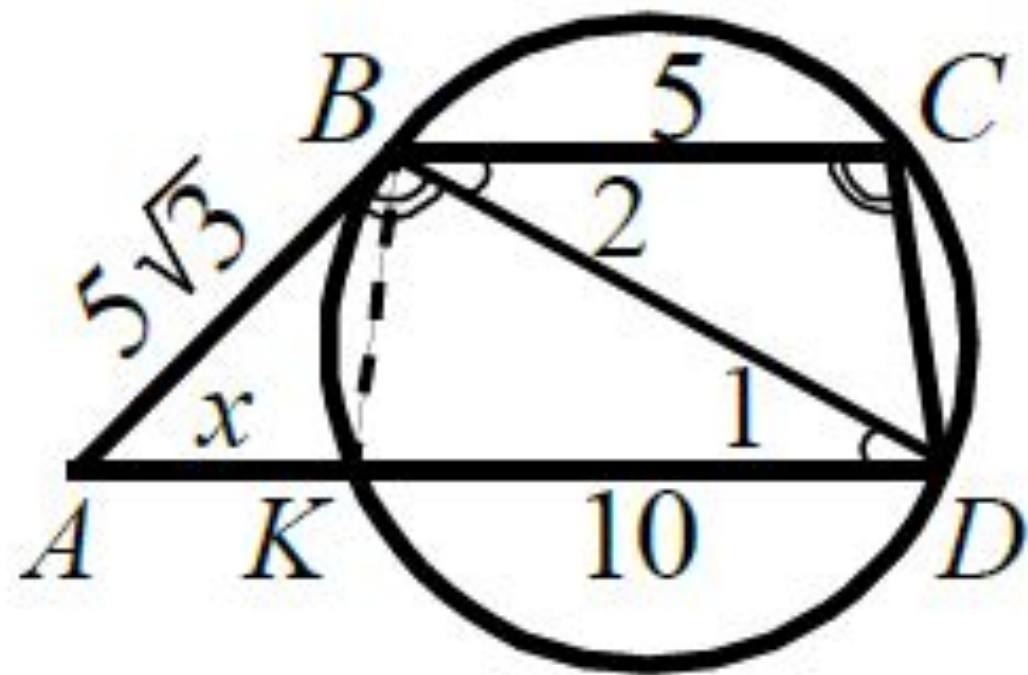
Рис. 14



Темы 2.

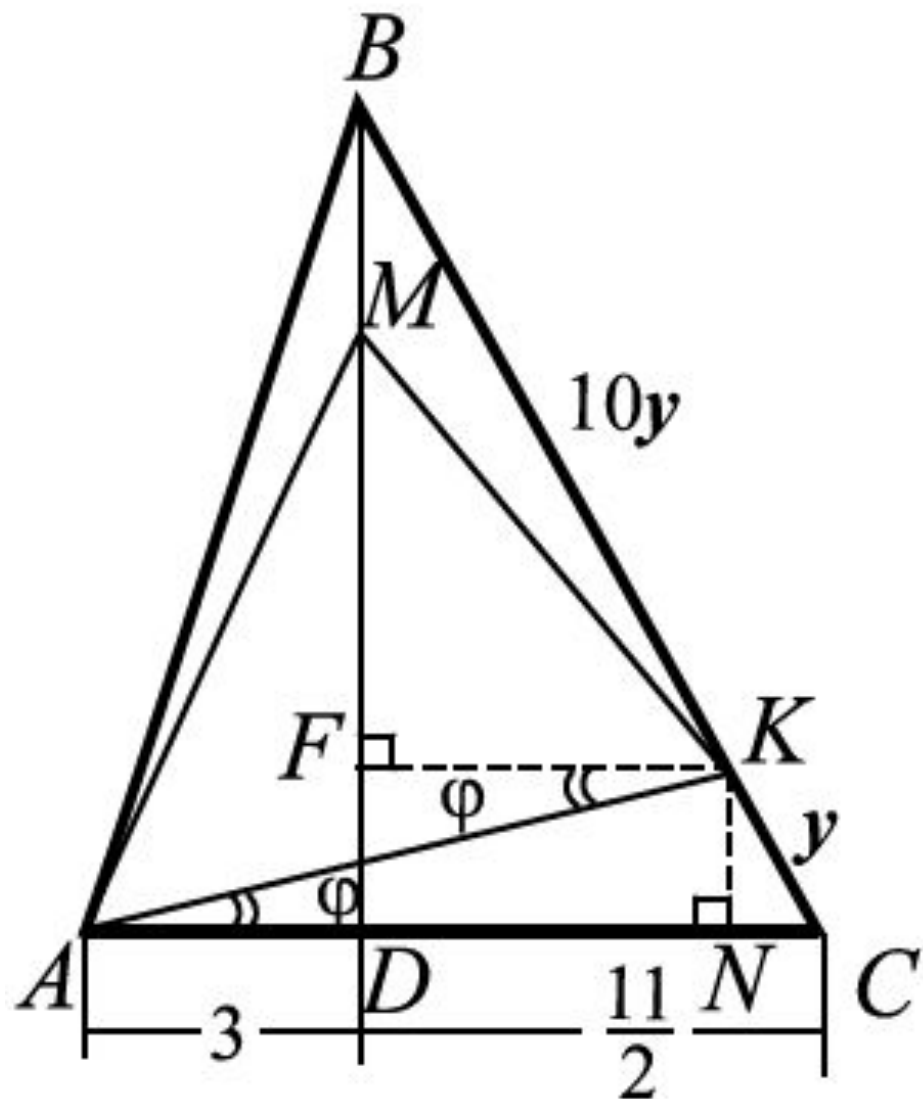
- Окружности
 - Угол м/у касательной и хордой
 - Угол опирающийся на дугу
 - Теорема об отрезках касательных

Пример 10. Окружность проходит через вершины C и D трапеции $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке B и пересекает большее основание AD в точке K (рис. 25). Известно, что $AB = 5\sqrt{3}$, $BC = 5$ и $KD = 10$. Найдите радиус окружности.



Пример 15. Точки K и M расположены соответственно на стороне BC и высоте BD остроугольного треугольника ABC . Треугольник AMK – равносторонний (рис. 30). Найдите его площадь, если $AD = 3$,

$$DC = \frac{11}{2}, \quad BK : KC = 10 : 1.$$



Пример 16. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC , пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно (рис. 31). Известно, что $AB=4$,

$MN=2$ и $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$. Найдите радиус окружности.

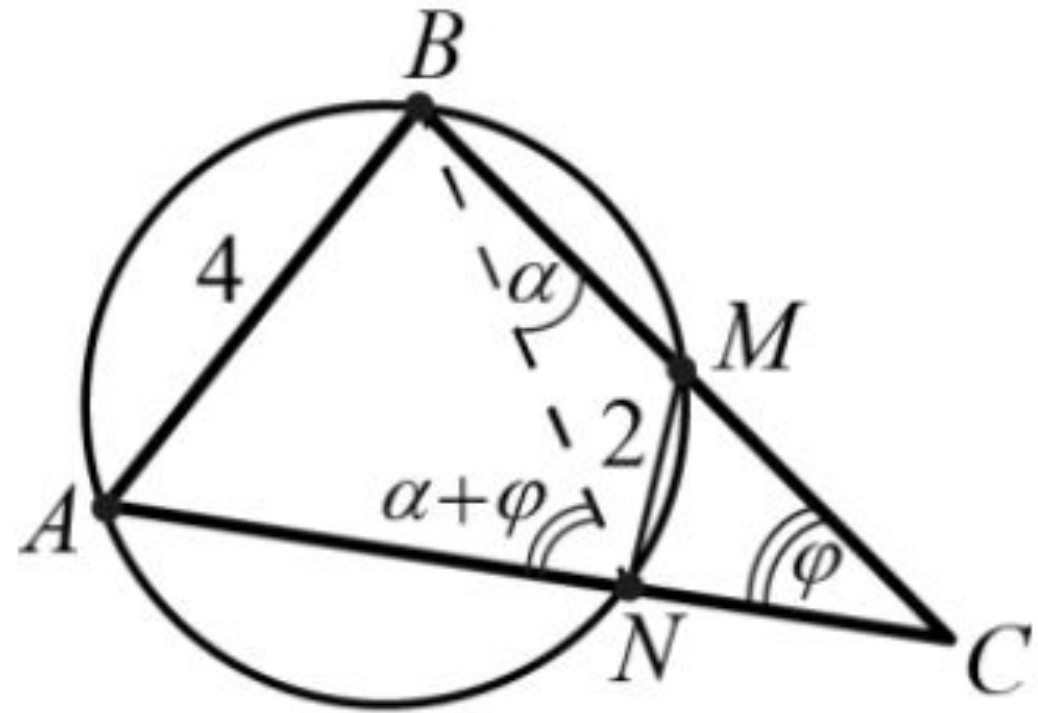
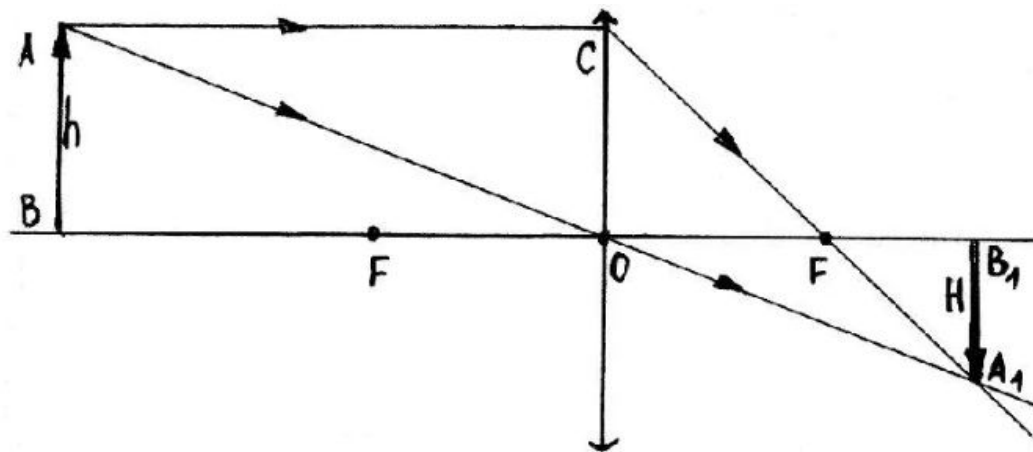
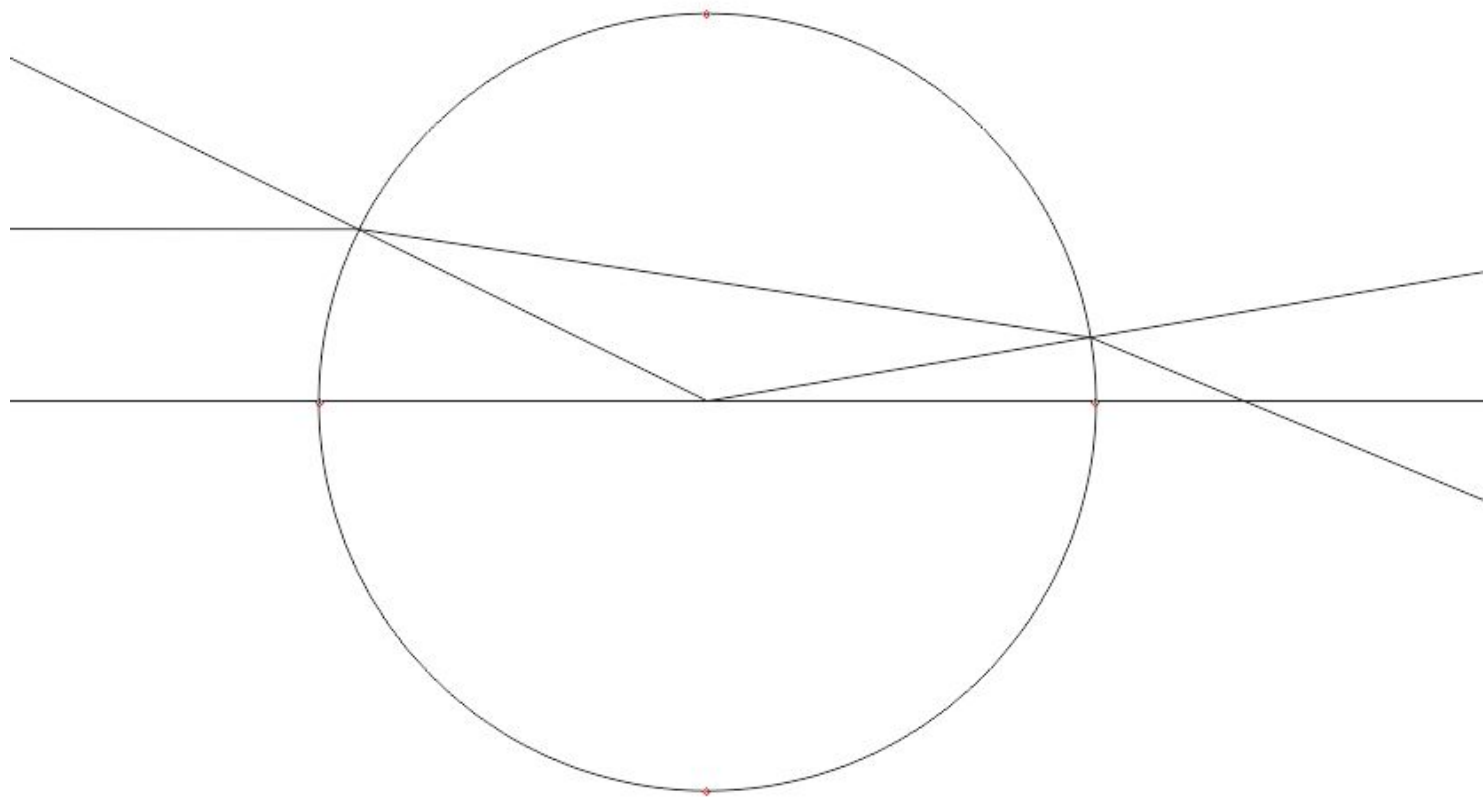


Рис. 31

Вывод формулы тонкой линзы



Найти фокус круглого шарика радиуса R



Найти фокус параболического зеркала

