БОУ СПО УР «Ижевский индустриальный техникум»

Элементы линейной алгебры в электротехнике

(электронное учебное пособие)

Автор: **Вараксин Роман Андреевич**, 203 группа, 2 курс,
специальность *Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)*

Руководители: Касаткина Инга Сергеевна, преподаватель математики

Никитина Наталья Васильевна, преподаватель спецдисциплин

г. Ижевск, 2013

Цели проекта:

- Исследовать возможность применения знаний элементов линейной алгебры на занятиях электротехники
- Создать электронное учебное пособие, позволяющие систематизировать знания учащихся по темам «Элементы линейной алгебры»» и «Расчет электрической цепи».

  Данное пособие можно использовать как при проведении уроков математики и электротехники (частично), так и при проведении бинарных уроков и самостоятельной подготовки студентов.

Структура электронного учебного пособия

Пособие состоит из трех частей:

- **Элементы линейной алгебры** (теоретический материал)
- **Электротехника** (Расчет электрической цепи с помощью законов Киргофа) (теоретический материал)
- **Электротехническая задача**
- **Решение систем линейных уравнений методом Гаусса в Excel**

Все учебное пособие снабжено гиперссылками, позволяющими легко находить интересующий материал. Так как наше пособие можно использовать как при изучении нового материала, так и при повторении пройденного, смена слайдов осуществляется по щелчку, позволяя работать с материалом в любом темпе.

Немного изменяя анимацию, преподаватель имеет возможность использовать теоретический материал как при изучения нового, так и для контроля.

Элементы линейной алгебры в электротехнике

Выполнил: Вараксин Р.А. гр.203

Преподаватели: Никитина Н.В., Касаткина И.С.

Содержание

- Элементы линейной алгебры
- Электротехника
- Электротехническая задача
- Решение систем линейных уравнений

  методом Гаусса в Excel

Содержание

- Определение матрицы
- Виды матриц
- Действия над матрицами
- Системы линейных уравнений и их решения
- Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
- ***Историческая справка***

Определение матрицы

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для краткого обозначения матрицы используется большая латинская буква, например A или символ (a_{ij})

$A = (a_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m;\ \ j=1,2,\ldots,n;)$

Элементы матриц и их обозначения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{ij} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij}, входящие в состав матрицы, называются ее **элементами**.

Здесь i — номер строки матрицы,

j — номер столбца матрицы.

Виды матриц

Прямоугольная

$(m \neq n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Частные случаи

Квадратная

$(m=n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 24 \\ 15 & 5 & 23 \\ 12 & 29 & 9 \end{pmatrix}$$

Для квадратной матрицы определено понятие диагоналей

Частные случаи

Прямоугольная матрица

Если в матрице типа m×n, m=1, то матрица называется **матрица-строка**

Например:

$$\underset{1\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 10 & 23 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

Если в матрице типа m×n, n=1,то матрица называется **матрица-столбец**

Например:

$$\underset{3\times 1}{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

- Диагональная
- Скалярная
- Единичная
- Треугольная: нижняя, верхняя

$$\underset{n\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагонали матриц

Диагональ, содержащую элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mn}$, будем называть ***главной***,

а диагональ ,содержащую элементы $a_{1n}, a_{22}, \ldots, a_{m1}$ – ***побочной (вспомогательной)***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица

Матрица называется ***диагональной***, если все элементы матрицы, кроме элементов главной диагонали равны 0

Например:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Скалярная матрица

Если все элементы главной диагонали диагональной матрицы равны между собой, то матрица называется ***скалярной***

Например:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, называется ***единичной*** матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Треугольная матрица

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали равны 0, называется ***треугольной матрицей.***

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Если элементы, равные 0 стоят выше главной диагонали ,то это **верхняя треугольная матрица**,

если элементы равные 0 стоят ниже главной диагонали, то это **нижняя треугольная матрица**

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

- Сложение
- Умножение матрицы на число
- Транспонирование
- Умножение матриц

Сложение матриц

Определение: ***Суммой*** двух матриц А и В называется матрица С, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В.

Можно складывать только матрицы одинакового типа или порядка

Например:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+7 & 6+5 & 8+0 & 1+1 \\ 3+2 & -2+4 & 4+5 & 8+6 \\ 1+3 & 0+5 & 2+7 & 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 9 & 14 \\ 4 & 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Свойства сложения

Свойства сложения матриц

1. *Переместительный закон сложения:*

$$A+B = B+A,$$

где A и B – либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m \times n$

2. *Сочетательный закон сложения:*

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

где A и B – либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m \times n$

3. Для любой матрицы A существует матрица –A, такая, что

$$A+(-A)=0$$

Умножение матрицы на число

Определение: ***Произведением*** матрицы A на число k называется матрица C, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A и k.

Например:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 7 & 2\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 4 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Определение: ***Транспонированная*** матрица - это матрица, полученная из исходной путем замены строк на столбцы.

Например:

$$\text{Если}\ \ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \text{тт}\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

Что бы получить элемент, стоящий на пересечении строки и столбца матрицы-произведения, нужно все элементы строки матрицы A умножить на соответствующие элементы столбца матрицы B и полученные результаты сложить

Умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B

Например:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 & 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения

Свойства умножения матриц

1. *Произведение не подчиняется переместительному закону:*

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2. *Сочетательный закон умножения:*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. *Распределительный закон умножения:*

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

4. *Возможен случай, когда произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.*

Системы линейных уравнений

Решение уравнений методом Гаусса

«Математика – царица всех наук»

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855 г.г.) –

немецкий математик, физик, астроном, геодезист.

Круг его интересов в точных науках:

- теория чисел (числа простые и периодические дроби),
- геометрия (правильные многоугольники, теория поверхностей),
- алгебра (доказательство основной теоремы алгебры о числе корней алгебраического уравнения),
- астрономия (вычисление орбит планет),
- физика (электромагнетизм).

Труды К. Гаусса изданы в Германии в 12-ти томах.

В чем его суть?

Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (систему называют эквивалентной, если множества их решений совпадают).

Эти действия называют ***прямым ходом***.

Из полученной матрицы треугольной системы переменные находят с помощью последовательных постановок, такие действия называют ***обратным ходом***

Пример

Прямой ход

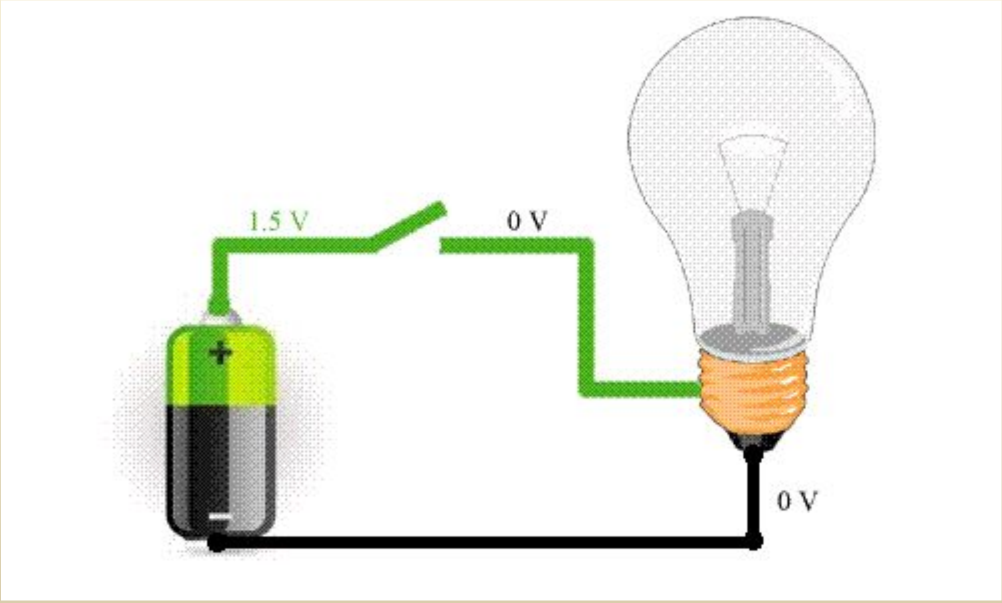
При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1. Умножение и деление коэффициентов свободных членов на одно и то же число
2. Сложение и вычитание уравнений
3. Перестановка уравнений системы
4. Исключение из системы уравнения, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю

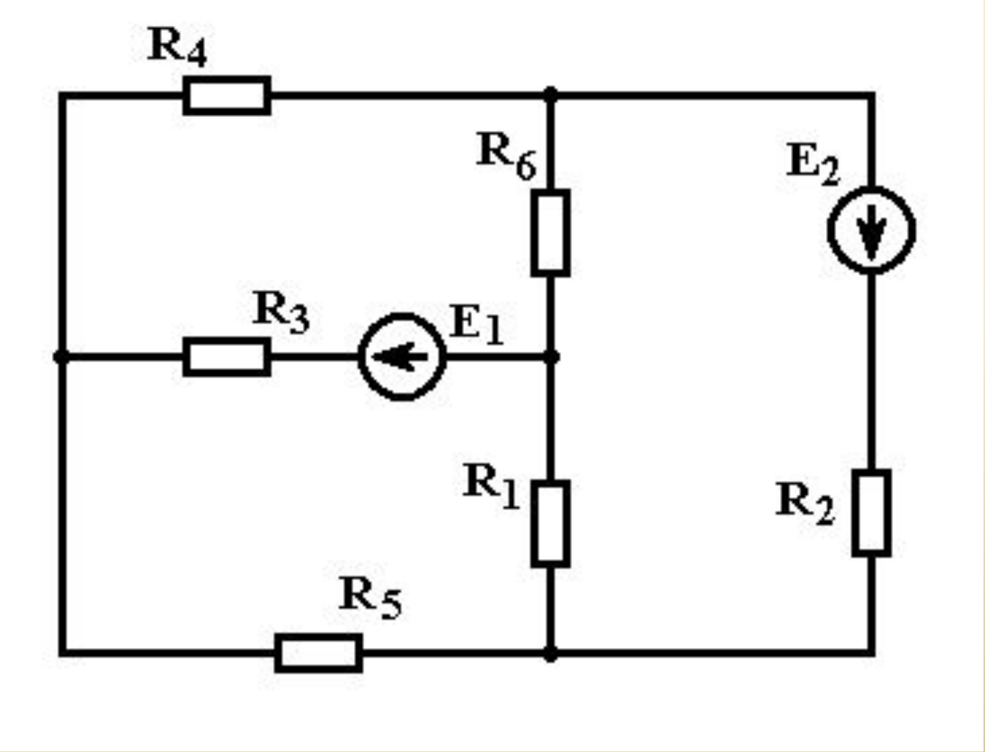
Содержание

- Электрическая схема (справочный материал)
- Расчет цепи постоянного тока
- Алгоритм расчета цепей методом уравнений Кирхгофа
- Первый закон Кирхгофа
- Второй закон Киргхофа
- Количество уравнений

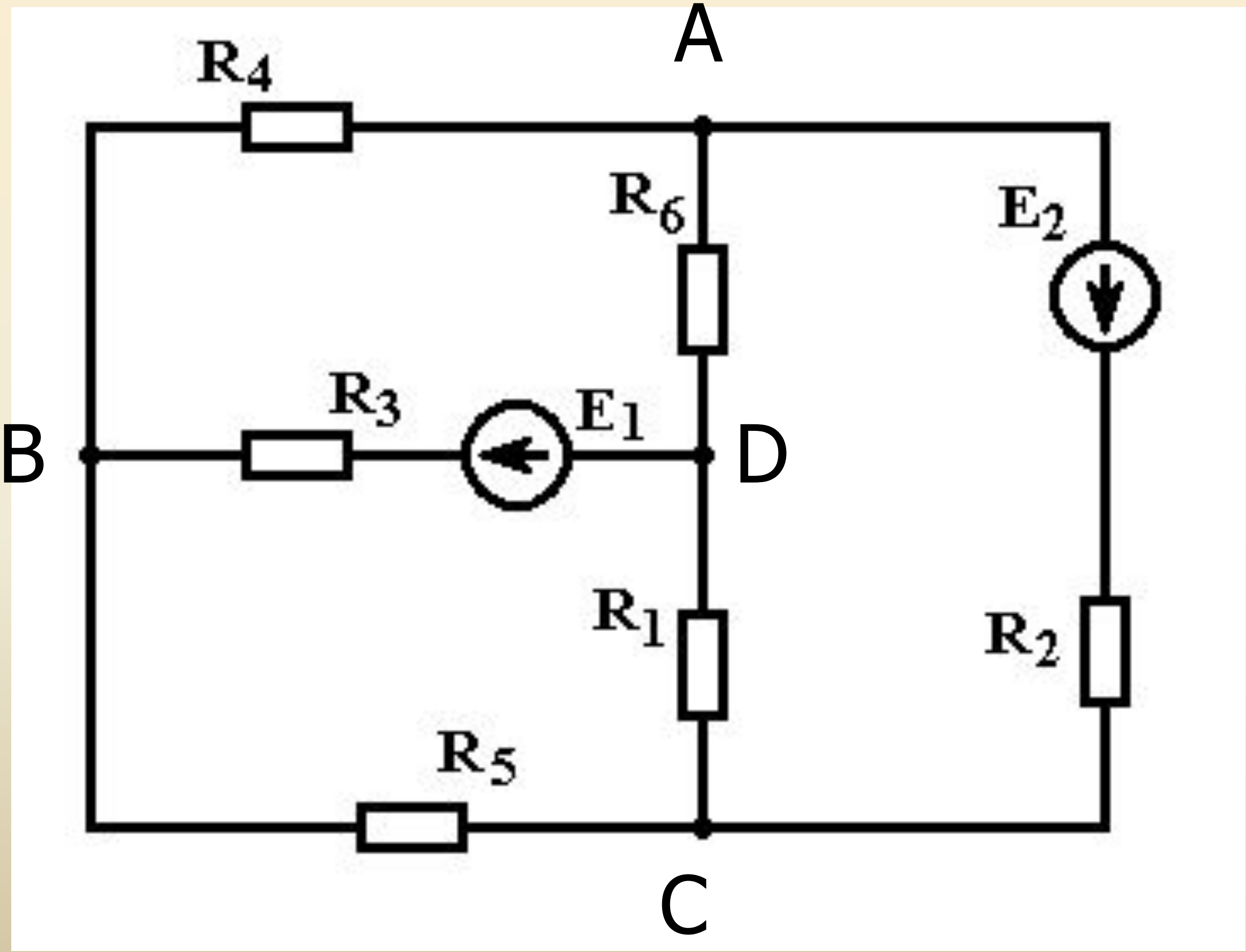
Расчет цепей постоянного тока сводится к нахождению токов, протекающих по ветвям цепи путем составления системы уравнений методом Кирхгофа



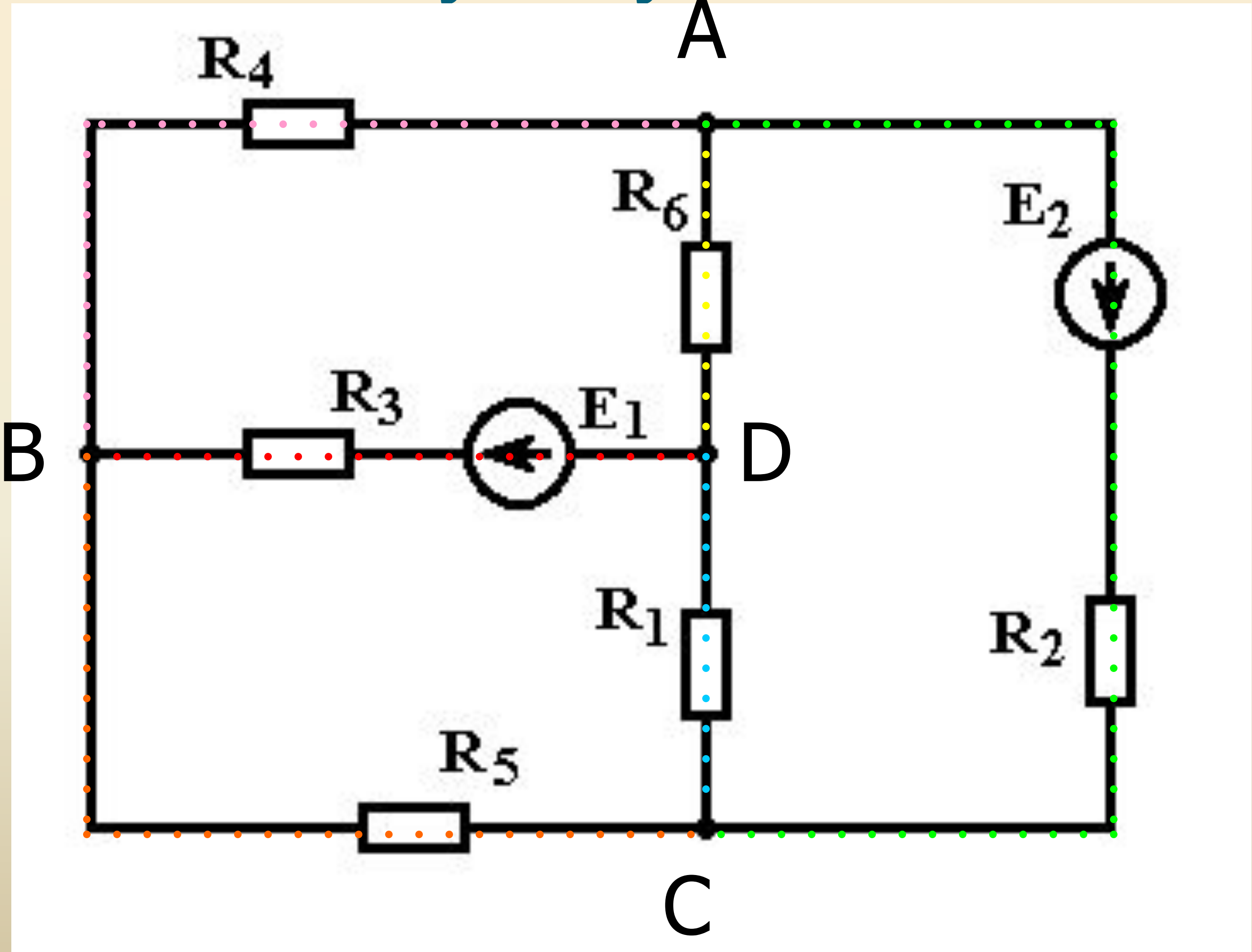
- **Электрическая Схема** - графическое изображение электрических цепейэлектронных, электро- или радиотехнических устройств, на котором условнымиобозначениями показаны элементы данного устройства и соединения между ними.



Узел- место соединения трех и более ветвей



Ветвь – участок цепи между двумя узлами



AB

AC

AD

BD

BC

DC

Алгоритм расчета цепей методом уравнений Кирхгофа

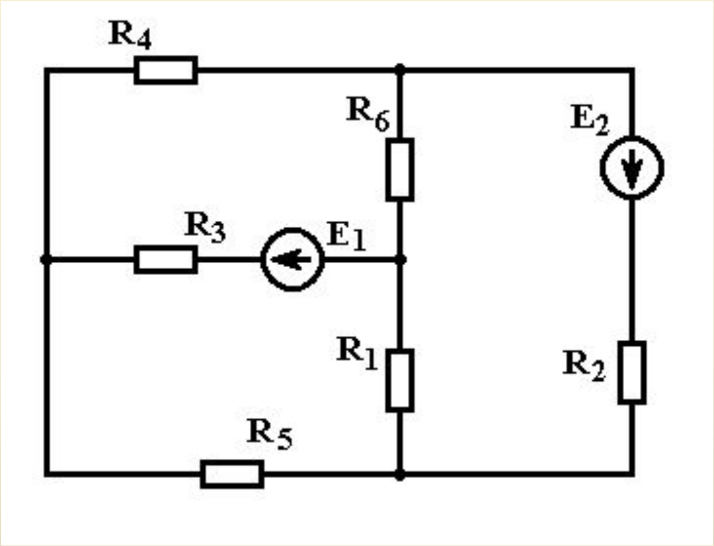
1. Определить узлы и ветви в схеме

2. Определить количество уравнений

3. Обозначить токи в ветвях

4. Составить уравнения по первому закону Кирхгофа

5. Составить уравнения по второму закону Кирхгофа



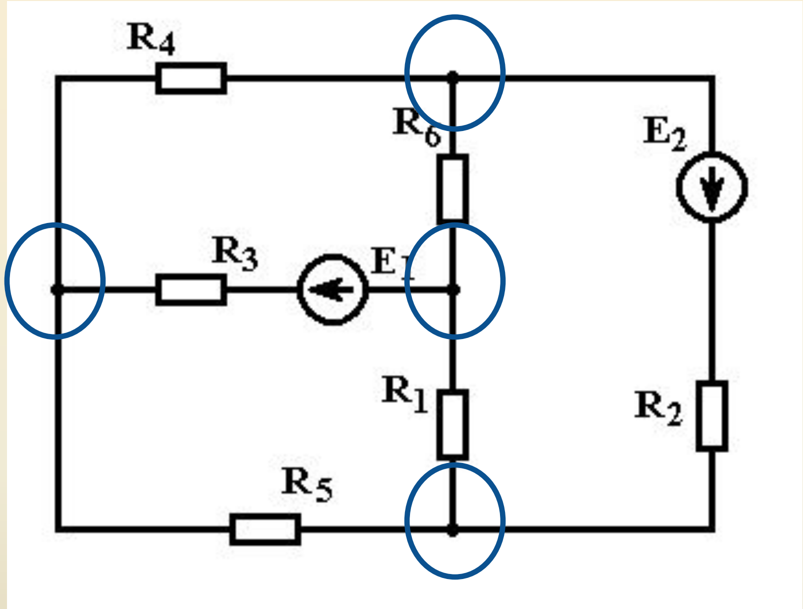
Первый закон Кирхгофа

Сумма токов в узле равна нулю

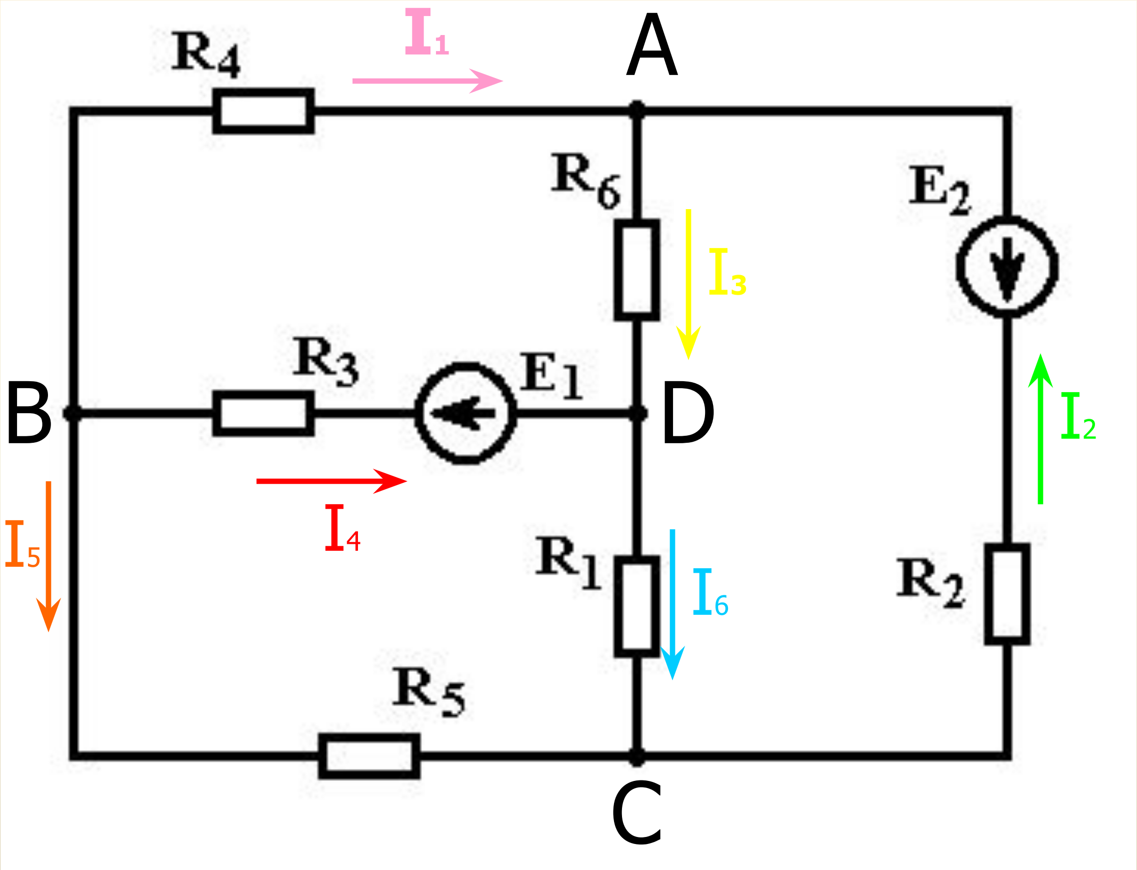
∑I=0

Если ток входит в узел, то пишем знак «+»

Если ток выходит их узла, то пишем «-».



В <u>каждой</u> ветви протекает <u>свой</u> ток, причем направление тока в ветви выбирается произвольно.



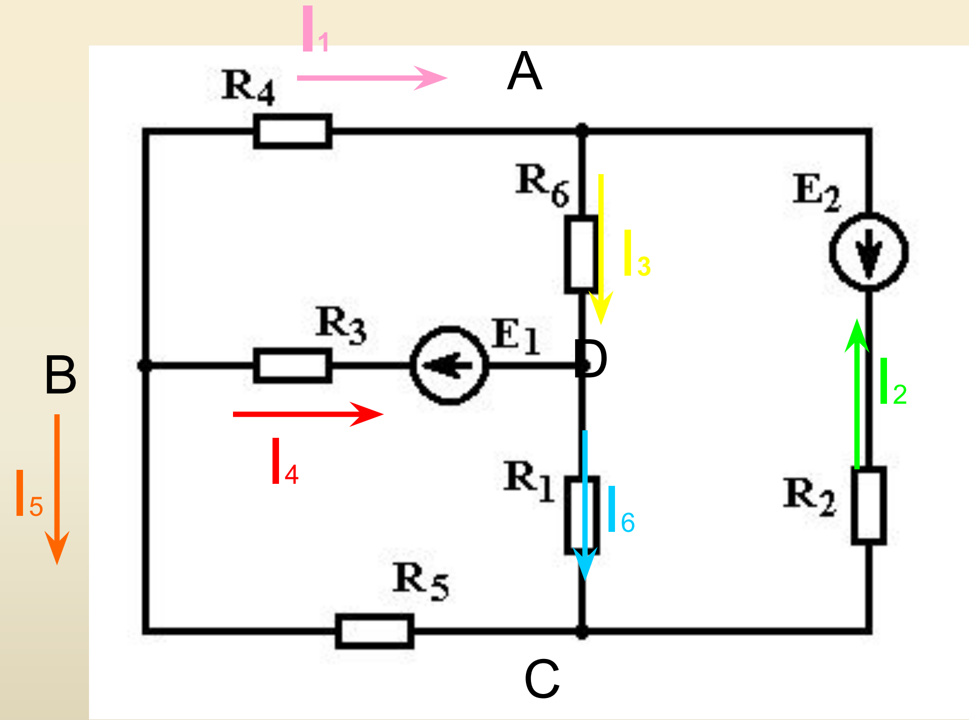
Первый закон Кирхгофа для данной схемы

A: $I_1+I_2-I_3=0$

B: $-I_1-I_4-I_5=0$

C: $-I_2+I_5+I_6=0$

D: $I_3+I_4-I_6=0$



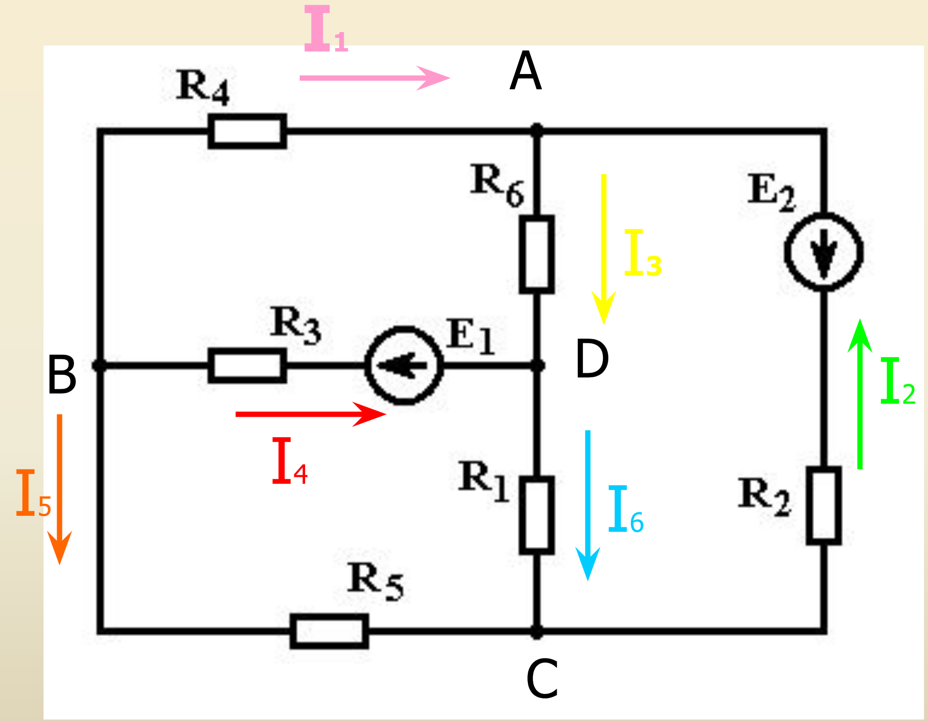
Первый закон Кирхгофа для данной схемы

A: $I_1+I_2-I_3=0$

B: $-I_1-I_4-I_5=0$

C: $-I_2+I_5+I_6=0$

D: $I_3+I_4-I_6=0$



Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме падений напряжения этого контура.

$$\sum E=\sum I\cdot R$$

Контур – любой замкнутый путь тока в цепи. проходящий по нескольким ветвям.

Направление обхода в контуре выбирается произвольно.

Второй закон Кирхгофа для данной схемы

ADBA:

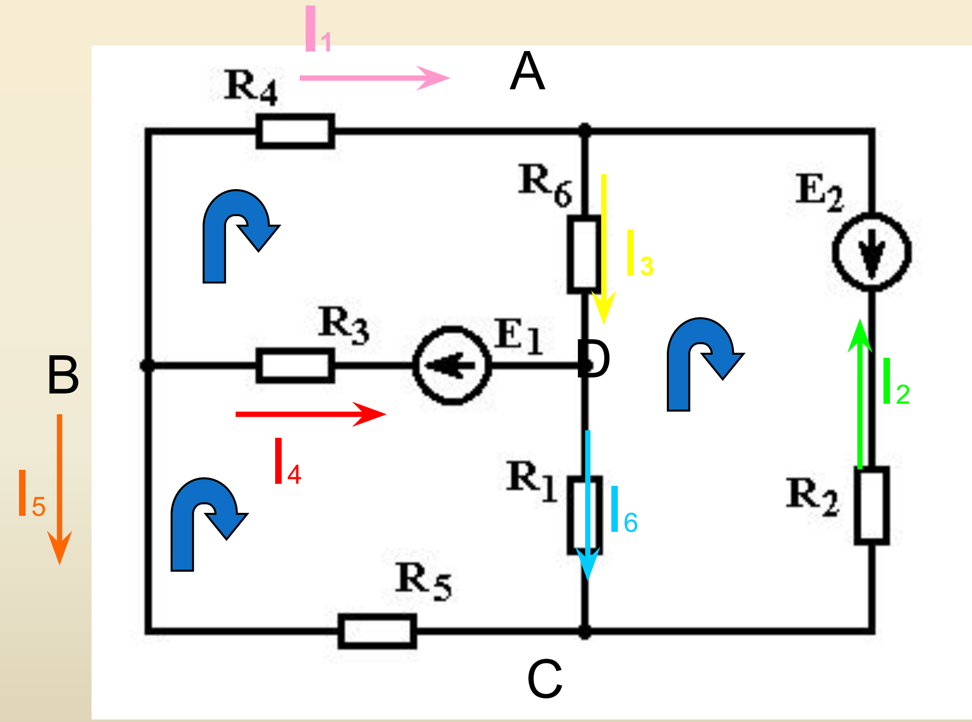
$E_1=I_3\cdot R_6-I_4\cdot R_3+I_1\cdot R_4$

BDCB:

$-E_1=I_4\cdot R_3+I_6\cdot R_1-I_5\cdot R_5$

ACA:

$E_2=-I_2\cdot R_2-I_6\cdot R_1-I_3\cdot R_6$



Количество уравнений

Общее количество уравнений равно числу ветвей.

Из них количество уравнений по первому закону составляет на единицу меньше количества узлов.

А количество уравнений по второму закону равно количеству независимых контуров.

Для представленной схемы:

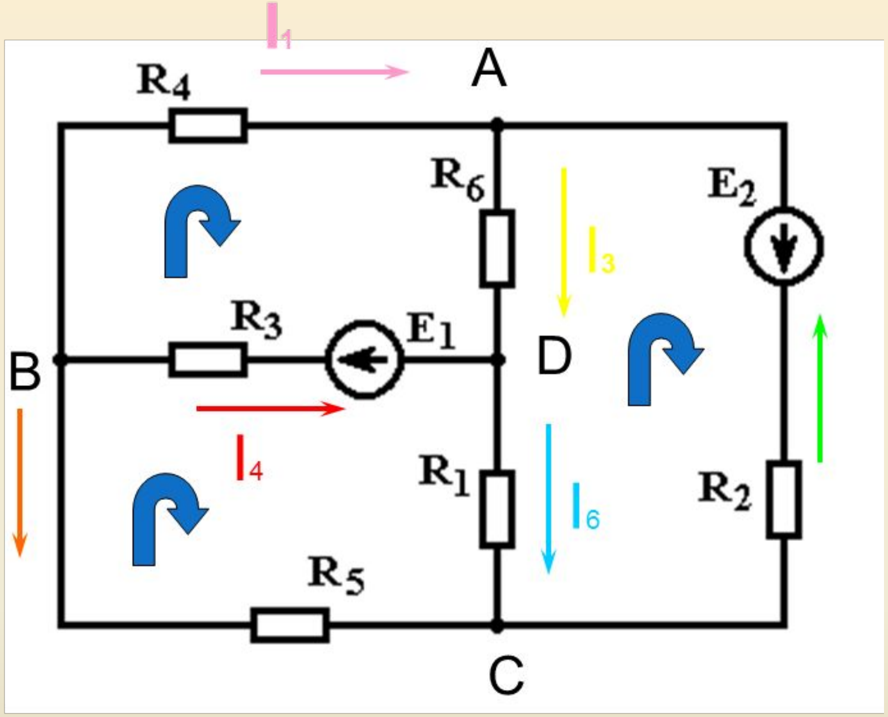
Общее количество уравнений: 6

По первому закону Кирхгофа: 3

По второму закону Кирхгофа: 3

Система уравнений с 6 неизвестными:

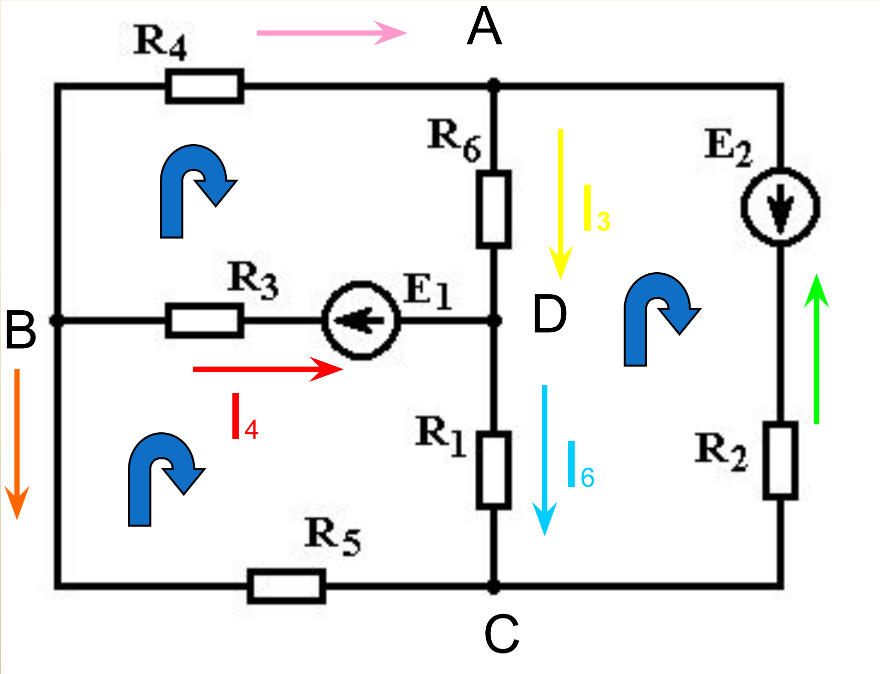
1. $I_1+I_2-I_3=0$
2. $-I_1-I_4-I_5=0$
3. $-I_2+I_5+I_6=0$
4. $E_1=I_3\cdot R_6-I_4\cdot R_3+I_1\cdot R_4$
5. $-E_1=I_4\cdot R_3+I_6\cdot R_1-I_5\cdot R_5$
6. $E_2= -I_2\cdot R_2-I_6\cdot R_1-I_3\cdot R_6$



Электротехническая задача

Дана электрическая цепь с заданными параметрами. Найти протекающие токи.

Дано:
R_1=2Ом
R_2=3Ом
R_3=5Ом
R_4=2Ом
R_5=4Ом
R_6=1Ом
E_1=10В
E_2=40В
Найти: I_1-I_6-?



Решим систему методом Гаусса

1. Составим расширенную матрицу по условию задачи

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 40 \end{array}\right)$$

2. От 2 и 4 строк отнимаем 1 строку, умноженную соответственно на -1 и 2

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 40 \end{array}\right)$$

3. от 1, 3, 4, и 6 строк отнимаем 2 строку, умноженную соответственно на 1; -1; -2; -3

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -1 & 40 \end{array}\right)$$

4. 3-ую строку делим на -1

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -1 & 40 \end{array}\right)$$

5. от 2, 4 и 6 строк отнимаем 3 строку, умноженную соответственно на -1; 1; -4

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 40 \end{array}\right)$$

6. 4-ую строку делим на -8

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}25 & -0{,}125 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 40 \end{array}\right)$$

7. от 1, 3, 5 и 6 строк отнимаем 4 строку, умноженную соответственно на 1; 1; 4; 1

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0{,}125 & 1{,}25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}25 & -0{,}825 & 1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}25 & -0{,}125 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1{,}5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3{,}25 & -4{,}875 & 41{,}25 \end{array}\right)$$

8. 5-ую строку делим на -5

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0{,}125 & 1{,}25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}25 & -0{,}825 & 1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}25 & -0{,}125 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3{,}25 & -4{,}875 & 41{,}25 \end{array}\right)$$

9. от 1, 2, 3, 4 и 6 строк отнимаем 5 строку, умноженную соответственно на 0,75; -1; -0,25; 0,25; -3,25

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}35 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1{,}3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0{,}95 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}05 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5{,}85 & 44{,}5 \end{array}\right)$$

10. 6-ую строку делим на -5,85

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}35 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1{,}3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0{,}95 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}05 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -890/117 \end{array}\right)$$

11. от 1, 2, 3, 4 и 5 строк отнимаем 6 строку, умноженную соответственно на 0,35; -1,3; -0,95; -0,05; -0,3

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 370/117 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -80/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -670/117 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -220/117 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -50/39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -890/117 \end{array}\right)$$

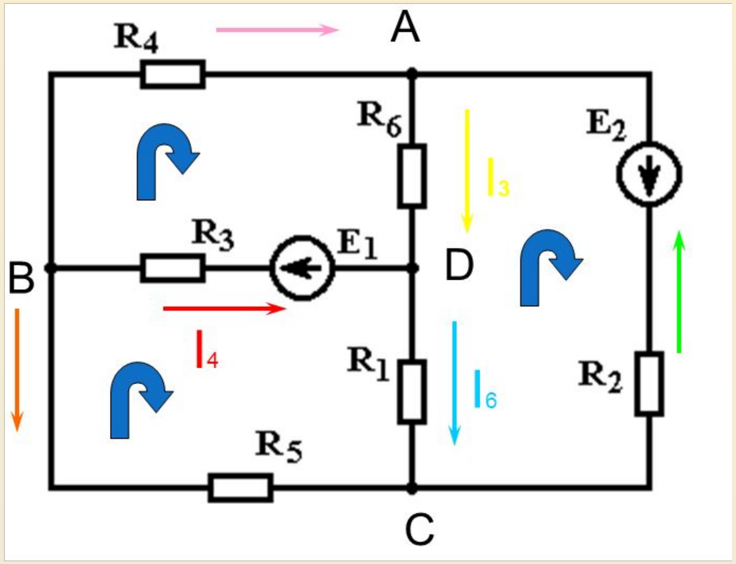
12. найдем приближенные значения

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8{,}89 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5{,}73 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1{,}88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1{,}28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7{,}61 \end{array}\right)$$

Найдем силы тока

Ответ:

$I_1 = 3{,}16$ A
$I_2 = -8{,}89$ A
$I_3 = -5{,}73$ A
$I_4 = -1{,}88$ A
$I_5 = -1{,}28$ A
$I_6 = -7{,}61$ A



Вывод: Если ток получился отрицательным, то нужно изменить направление тока в ветви на противоположное.

Решение СЛУ в Excel

Решение СЛУ методом Гаусса в Excel

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

1	1	-1	0	0	0	0
-1	0	0	-1	-1	0	0
0	-1	0	0	1	1	0
2	0	1	-5	0	0	10
0	0	0	4	-4	1	-10
0	-3	-1	0	0	-1	40

1 шаг. Работаем с первым столбцом

1	1	-1	0	0	0	0
0	1	-1	-1	-1	0	0
0	-1	0	0	1	1	0
0	-2	3	-5	0	0	10
0	0	0	4	-4	1	-10
0	-3	-1	0	0	-1	40

2 шаг. Работаем со вторым столбцом

1	1	-1	0	0	0	0
0	1	-1	-1	-1	0	0
0	0	-1	-1	0	1	0
0	0	1	-7	-2	0	10
0	0	0	4	-4	1	-10
0	0	-4	-3	-3	-1	40