Государственное учреждение образования
«Гимназия №38 г. Минска»

Задача Иосифа Флавия

Авторы работы:
Рогова Валерия Владиславовна, ул. Шугаева, 19/2, 142, т.234-60-98;
Лебедева Виктория Алексеевна, д. Копище, ул. Лопатина 2, 65, т.290-35-11,
Карамач Николай Александровия, ул. Ф.Скорины, 41, 32

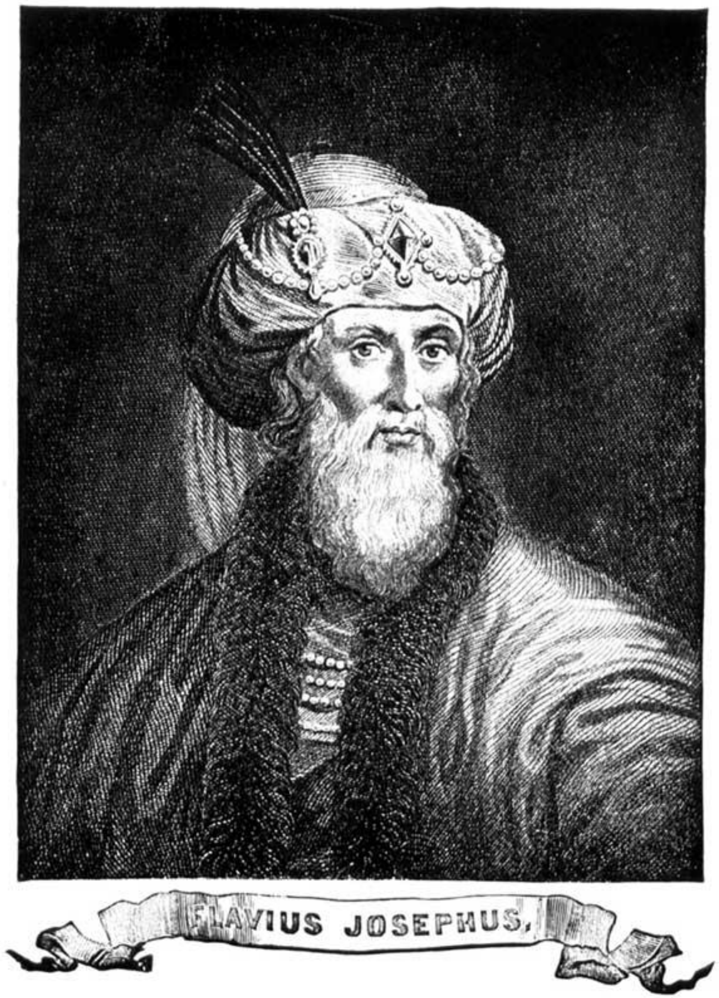
Научный руководитель работы:
Ларченко Андрей Николаевич
Учитель математики, гимназии 38.

Минск,2016

Цели:

Задачи:

Из истории…

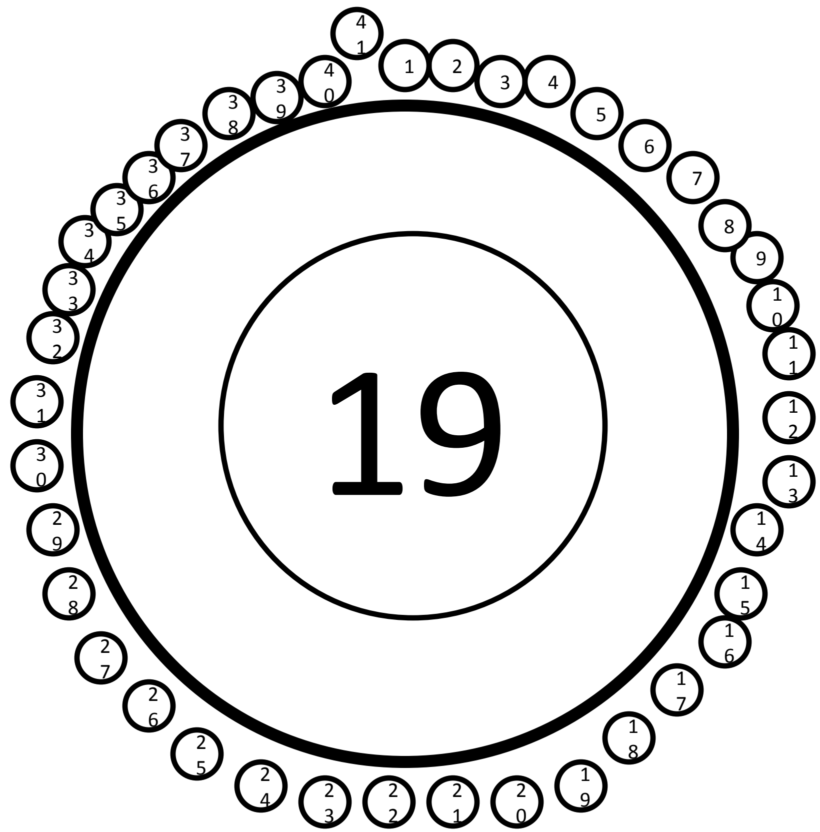


Иосиф Флавий - известный историк первого века - выжил и стал известным благодаря математической одаренности. В ходе иудейской войны он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего из живых до тех пор, пока не останется ни одного человека. Однако Иосиф наряду с одним из своих единомышленников счел подобный конец бессмысленным - он быстро вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища.

Задача Иосифа Флавия

Условие

Расставим натуральные числа по кругу от 1 до 41 и вычеркиваем каждое второе число до тех пор, пока не останется одно число. Это и будет решение задачи.



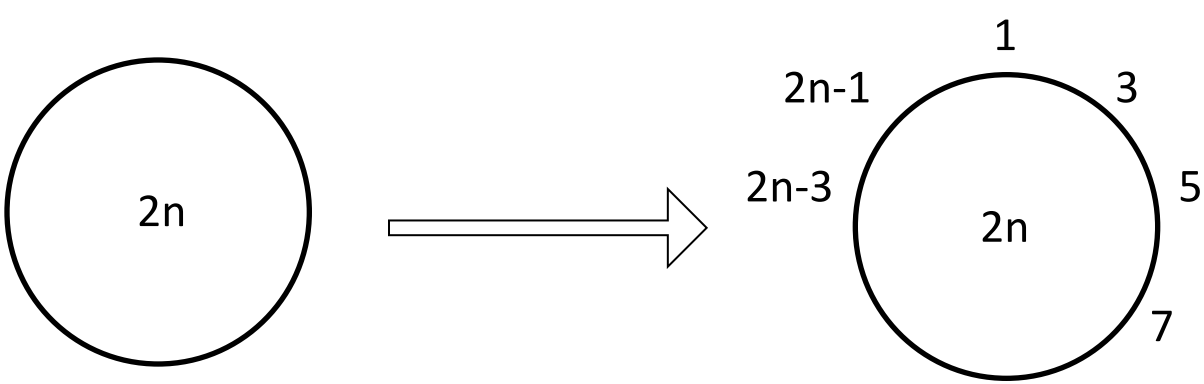
Четный случай. Выстроим в круг ***10*** чисел и будем исключать каждое второе до тех пор, пока не останется только одно.

Следовательно выживет человек с номером 5.

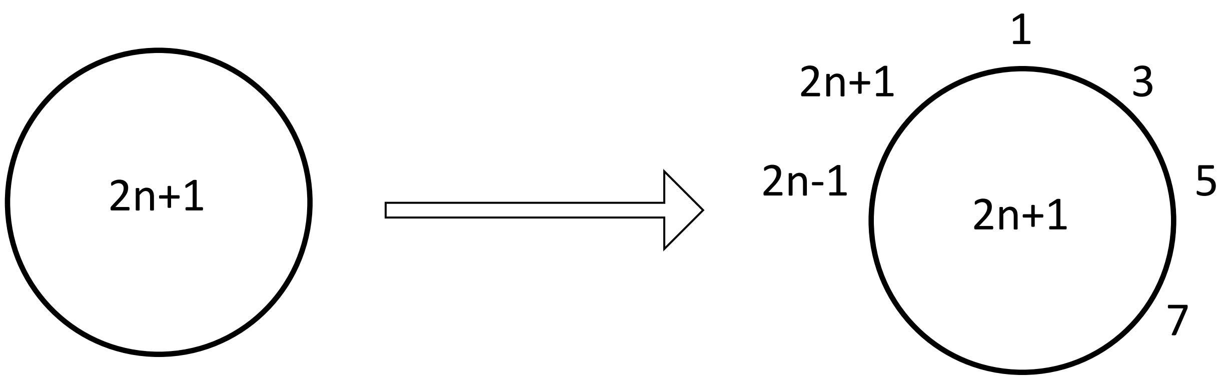
n

$$J(2n) = 2j(n) - 1$$

$$n > 0$$



Нечётный случай. В случае ***2n+1*** чисел, 1 убирается за вторым кругом.



Опять получаем первоначальную ситуацию с ***n*** числами, но на этот раз номера *удваиваются* и увеличиваются на 1. Таким образом,

$$J(2n+1) = 2j(n)+1 \qquad n > 0$$

Рекуррентное соотношение дает возможность очень быстро составить таблицу первых значений ***J(n)***.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

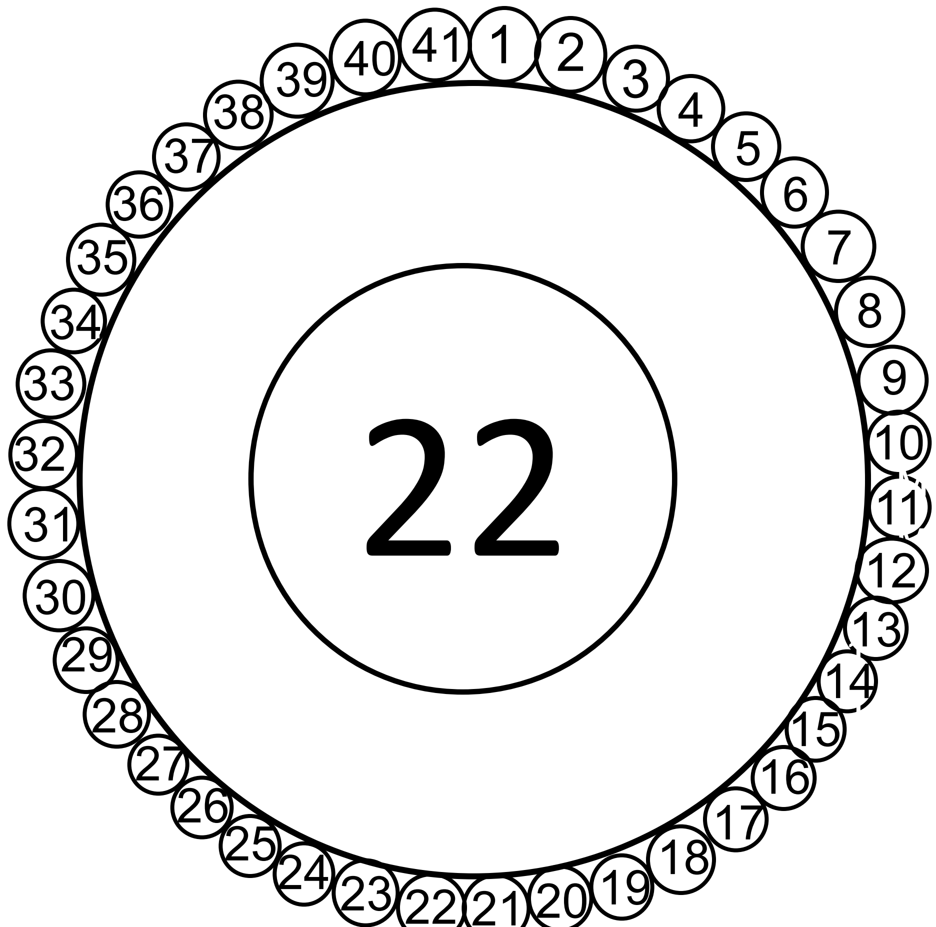
Если сгруппировать значения ***n*** по степеням 2 (в таблице эти группы отделены вертикальными линиями), то в каждой группе ***J(n)*** всегда будет начинаться с 1, а затем увеличиваться на 2.

$$J(2^n + k) = 2k + 1 \qquad n \in [0, +\infty] \qquad k \in [0, 2^n]$$

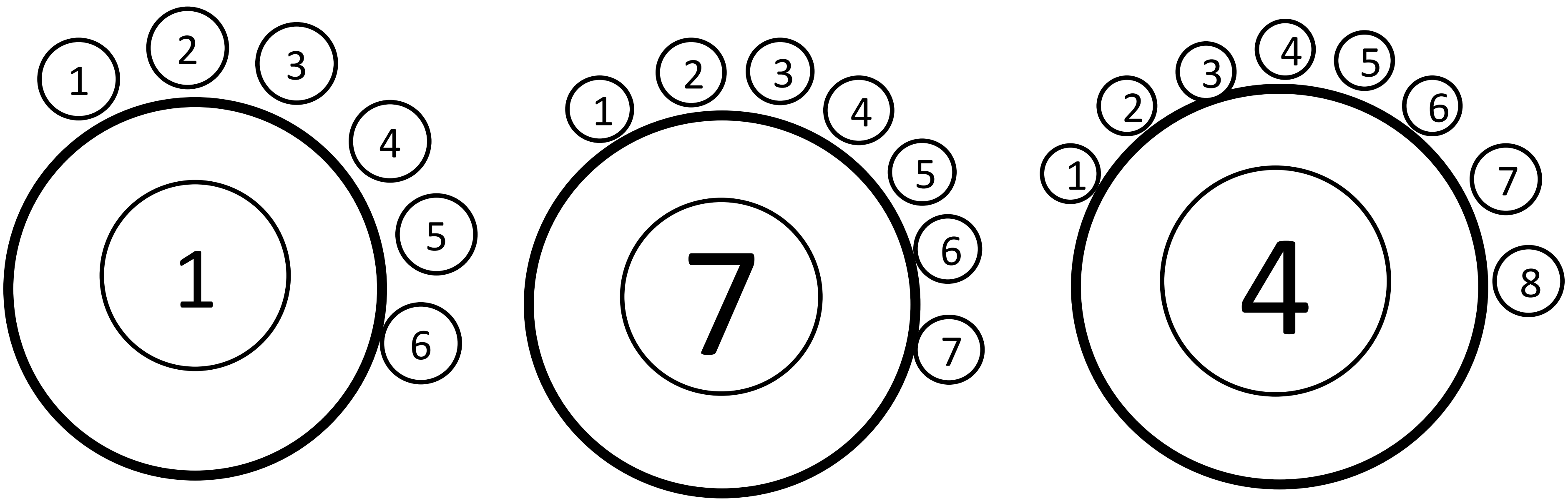
Решим другую задачу:

Расставим натуральные числа по кругу от 1 до n. Вычеркиваем числа 2, 3, пропускаем число 4, вычеркиваем два следующих числа и т.д. Вычеркиваем до тех пор, пока не останется одно число. Это число и будет решением задачи.

$J(41) = j(1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 7) = 3 \cdot 7 + 1 = 15$ $\quad$ $J(n) = j(r \cdot 3^s + 2l) = 3l + 1$

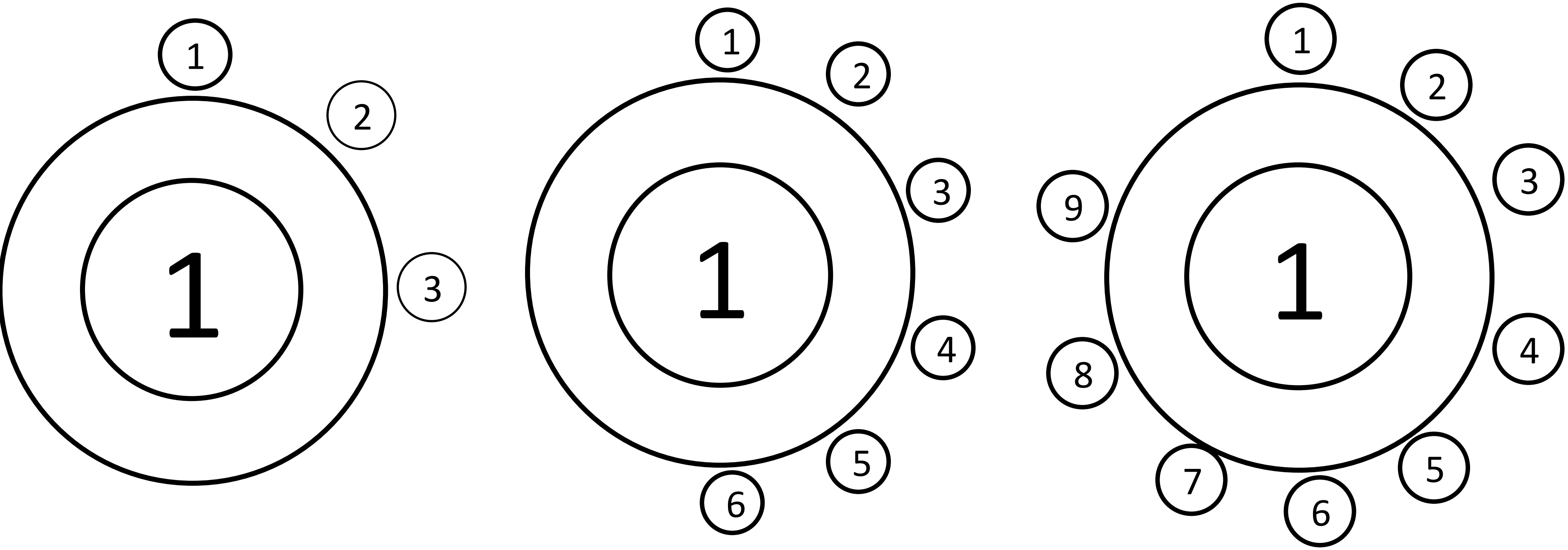


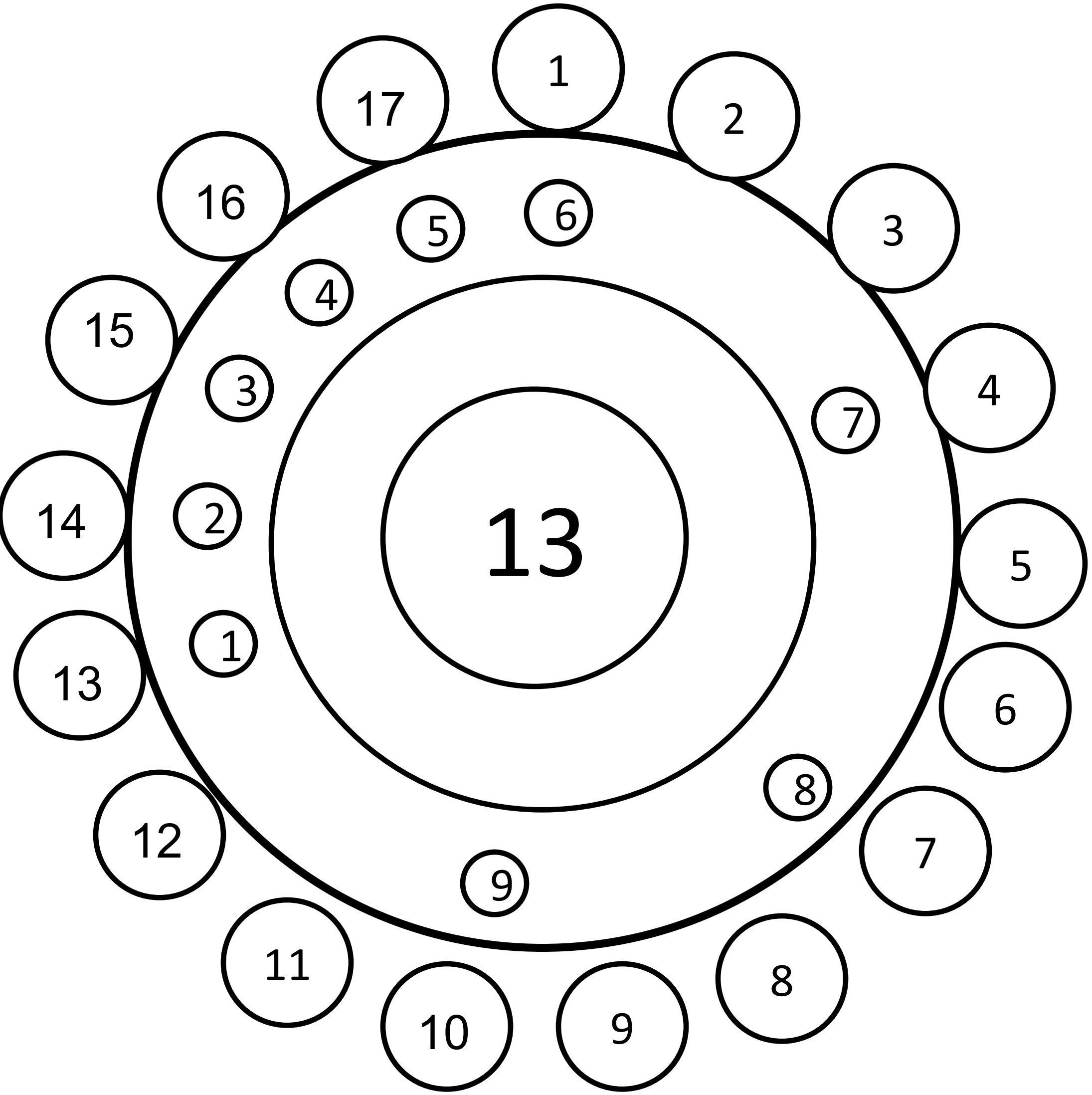
Расставим в круге соответственно 6, 7, 8 чисел. Чтобы число n осталось после первого круга, оно должно иметь вид n=3*k+1.
Мы делим n на тройки чисел, два из которых удаляем, значит после удаления
Остается k+1 число, т.к. удаляется 2*x чисел.



Количество чисел в круге	n=3k+1	n=3(3l-1)+1	n=3*3(3 m-1)+1	. . .
Вычеркива-ем	2k	2l	2m	. . .
Осталось	K+1	l	m	. . .
Количество чисел в круге	79=3*26+ +1	3(3*9-1)+1	3(3*3*3- -1)+1	3*3(3*3*1- -1)+1
Вычеркива-ем	52	18	6	2
осталось	27	9	3	1

$$n = 3 \cdot (t \cdot 3^{s-1} - 1) + 1 = 3 \cdot t \cdot s^{s-1} - 3 + 1 = t \cdot 3^{s} - 2, t < 3$$


1
1
2
3
1
1
2
3
4
5
6
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9



	J(17)	Вычер-киваем	Оста-лось
шаг 1	17	1*2	15
шаг 2	17	2*2	13
шаг 3	17	3*2	11
шаг 4	17	4*2	9
шаг 5	17	4*2	
…	…	…	…
	n	*l**2	r*

$$j(n) = j(2l + r \cdot 3^s) = 3l + 1$$

Рассмотрим табличные значения еще раз:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
j(n)	1	1	1	4	4	1	7	4	1	7	4	10	7	13	10

Пусть $k=4$

$j(k)=j(4)=4$

$j(3k)=j(12)=10$

$j(3k+1)=j(13)=7$

$j(k-1)=j(3)=1$

$j(3k+2)=j(14)=13$

Получаем рекурсивные формулы:

$$j(3k)=3j(k)-2$$

$$j(3k+1)=3j(k-1)+4$$

$$j(3k+2)=3j(k)+1$$

Доказательство полученной формулы по индукции:

1. Верность формулы при малых n проверяется подстановкой:

$$J(1) = j(1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 0) = 1 + 3 \cdot 0 = 1$$

$$J(2) = j(2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 0) = 1 + 3 \cdot 0 = 1$$

$$J(3) = j(1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 0) = 1 + 3 \cdot 0 = 1$$

$$J(4) = j(2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 1) = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$

Пусть формула верна для всех целых чисел, меньших $r \cdot 3^s + 2 \cdot l$.

Покажем, что формула верна и для $n - r \cdot 3^s + 2 \cdot l$.

$$j(r \cdot 3^s + 2 \cdot (3k)) = 3j \cdot (3^{s-1} + 2k) - 2 = 3 \cdot (3k+1) - 2 = 3l + 1$$

$$j(r \cdot 3^s + 2 \cdot (3k+1)) = j(r \cdot 3^s + 2 \cdot (3k) + 2) = 3j \cdot (r \cdot 3^{s-1} + 2k) + 1 =$$
$$= 3 \cdot (3k+1) + 1 = 3l + 1$$

$$j(r \cdot 3^s + 2 \cdot (3k+2)) = j(r \cdot 3^s + 3 \cdot (2k+1) + 1) =$$
$$= 3j \cdot (r \cdot 3^{s-1} + (2k+1) - 1) + 4 = 3 \cdot (3k+1) + 4 = 3 \cdot (3k+2) = 3l + 1$$