МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский технологический университет» МИРЭА

Направление 12.04.01
«Приборостроение»

Магистерская программа
"Моделирование в биотехническом приборостроении"

В. Н. Каданцев

Планирование измерительного эксперимента

МОСКВА 2016

Введение.

- Методы планирования эксперимента особое значение приобрели в связи с крупными программами проведения и автоматизации научных исследований.
- Применение методов планирования эксперимента может дать более или менее значительный экономический эффект, но отсутствие соответствующего плана может сделать экспериментальную программу полностью безрезультатной.
- Это диктует необходимость подготовки специалистов различного уровня, владеющих уже известными методами планирования эксперимента и способных разрабатывать новые методы применительно к различным предметным областям.
- Важный вопрос — это создание математической модели реального эксперимента. Переход к такой модели должен осуществляться в рамках соответствующей предметной области.
- Для сельского хозяйства подобный переход требует понимания аграрных или животноводческих вопросов, в химии нужно иметь априорное понимание условий протекания соответствующих реакций: аналогичные проблемы возникают в физике, технике, биологии и др.

- В каждой области существуют специфические ограничения, и *только специалисты* могут указать группы факторов, которыми можно пренебречь.
- Специалист в конкретной предметной области редко владеет в полной мере математическим аппаратом. Обычно планирование реального эксперимента *требует совместной работы группы специалистов*.

Сравнительные эксперименты

- Во многих областях экспериментирования следует отметить различие, между экспериментами, имеющими *целью оценивание абсолютных констант*, и *сравнительными экспериментами*.
- Во многих экспериментах *абсолютная характеристика* может меняться неустойчиво, а *относительная характеристика* двух способов обработки (или процессов, или разновидностей и т. д.) *оказывается довольно устойчивой*. Можно утверждать, что в подобных обстоятельствах *один способ обработки дает существенно лучшие результаты, чем другой, даже если мы не можем установить в точности, какие результаты дает каждый*. В таких областях экспериментирования эксперименты, по-

- В наших лекциях будут рассматриваться главным образом сравнительные эксперименты. Иначе говоря, они будут относиться скорее к таким предметам, как *сравнение эффектов различных доз лекарства*, чем к определению физических констант.

ПОНЯТИЕ ПЛАНА

Терминология

- Эксперимент является важнейшей частью научного исследования.
- Мы будем рассматривать лишь математические модели эксперимента. Это означает, что реальные физические, биологические и другие эксперименты будут фигурировать в дальнейшем изложении разве лишь в виде примеров.
- Преимущество такого подхода состоит в общности. Каждая математическая модель оказывается приложимой во многих конкретных ситуациях.
- Математические модели эксперимента тесно связаны с такими математическими дисциплинами, как *теория вероятностей* и *математическая статистика*.

- Единицу материала, подвергаемую обработке, мы будем называть ***участком***. В соответствии с исходным смыслом участок может быть площадкой земли, на которой созревает урожай, но он может быть и пациентом больницы, куском животной ткани, местом на теле животного, куда производится инъекция специального назначения, или одной из ряда однотипных машин.
- ***Цель эксперимента*** состоит ***в сравнении эффектов различных способов обработки***, каждый из которых применяется к одному или более участкам, с помощью количественной оценки результатов наблюдений, производимых на отдельных участках.
- Любая количественная мера, полученная с участка, может быть названа ***урожаем***.
- ***Группа участков в структуре плана***, имеющих некоторые присущие им общие черты, называется ***блоком***.
- Иногда ***испытываемые способы обработки объединены*** в несколько ***факторов*** (***Факторный принцип***).
- Некоторые ***количественные или качественные состояния фактора*** называются ***уровнями***.

Понятие плана

Под ***планом эксперимента*** понимают:

1) ***множество способов обработки, выбираемых для сравнения***;

2) спецификацию обрабатываемых участков;

3) ***правила, по которым способы обработки следует размещать на участках;***

4) спецификацию измерений или других данных, которые должны быть получены на каждом участке.

- ✔ Обычно окончательное ***решение по пункту 1)*** принимает ***экспериментатор***, хотя ***часто для оптимального выбора способов обработки имеется статистическая теория***.
- ✔ То, что можно было бы назвать ***классической теорией планирования экспериментов***, заключено ***в пункте 3***).
- ✔ ***Статистик*** должен уметь делать полезные предложения по ***спецификации соответствующих участков***.
- ✔ Основными моментами, которые следует при этом иметь в виду, являются: а) ***пригодность***, б) ***осуществимость***, в) ***точность***.

Рандомизация

- Необходимым условием для ***получения несмещенных оценок разностей и их дисперсий является то, что принятое частное расположение выбрано случайным образом из множества всех возможных***.
- Этот случайный выбор, который достигается с помощью ***таблицы случайных чисел*** или ***других способов обеспечения безобидной лотереи***, является сейчас, по общему признанию, существенной чертой планирования экспериментов.
- ***План полностью определяется только с помощью множества всех допустимых расположений, из которых был выбран один действительно принятый план.***
- Изложение теории планирования мы будем проводить только для случая ***рандомизованных планов,*** если не оговорено противное.
- ***Следовательно, спецификация плана должна включать формулировку одного или большего числа процессов требуемой рандомизации.***

- «Беспорядочное» расположение способов обработки или любое использование личного суждения при построении «случайных на вид» расположений ***не следует смешивать с точными процессами рандомизации, которые описаны в специальной литературе***.

- Во всех планах, описанных далее, ***рандомизация расположения способов обработки*** по участкам в пределах любого определенного блока или при сходных ограничениях ***является существенной для полной законности интерпретации.***

- ***Понятие случайного выбора наблюдений присуще всей теории вероятностей и всей теории статистического оценивания.***

- Подходящая рандомизация имеет то следствие, что ***в дисперсионном анализе при нулевой гипотезе о том, что способы обработки дают одинаковый эффект, средние квадраты для способов обработки и ошибок имеют равные математические ожидания.***

Статистика

- В математике слово «***статистика***» имеет два значения.

  - Во-первых, так называется раздел математики, в котором ***по выборке (результатам экспериментов) определяется вид распределения, из которого была извлечена эта выборка, оцениваются параметры этого распределения, проверяются гипотезы о виде этого распределения.***

  - Второе значение слова «**статистика**» – **это (измеримая) функция выборки.** Поскольку элементы выборки суть случайные величины, то и *статистика является случайной величиной*.
- Назначение статистик – *оценка параметров распределения, из которого извлечена выборка.*

❖ В этом разделе собраны основные сведения из ***математической статистики, которые используются в планировании измерительных экспериментов.***

- **Вероятность события.** *Случайным событиям* можно приписать ***вероятность*** – число от нуля до единицы.

- Понятие вероятности можно применять только к тем событиям, которые еще не произошли, или ***исход которых нам пока не известен.***

- Еще одним важным понятием является ***пространство событий – это полный набор всех возможных исходов.***

- ***Случайная величина — это переменная, значение которой до опыта (реализации) неизвестно.***

- Всякая случайная величина характеризуется*:*

✔ ***множеством своих возможных значений***
✔ ***неограниченным числом повторения реализаций***
✔ ***вероятностью попадания в любую наперед заданную область во множестве значений.***

Распределение случайной величины

- Пусть X – это случайная величина, множеством возможных значений которой являются действительные числа. Рассмотрим вероятность события, что реализация X не больше заданного числа x. Если рассматривать эту вероятность в зависимости от величины x, то получится функция F(x), называемая (кумулятивной) ***функцией распределения случайной величины*** –

$$F(x) = Pr\{X \le x\}.$$

- ***Функция распределения*** это ***неубывающая функция***, которая стремится к 0 при малых x, и стремится к 1 при больших значениях аргумента.

- Производная функция распределения $F(x)$называется *плотностью вероятности* $f(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

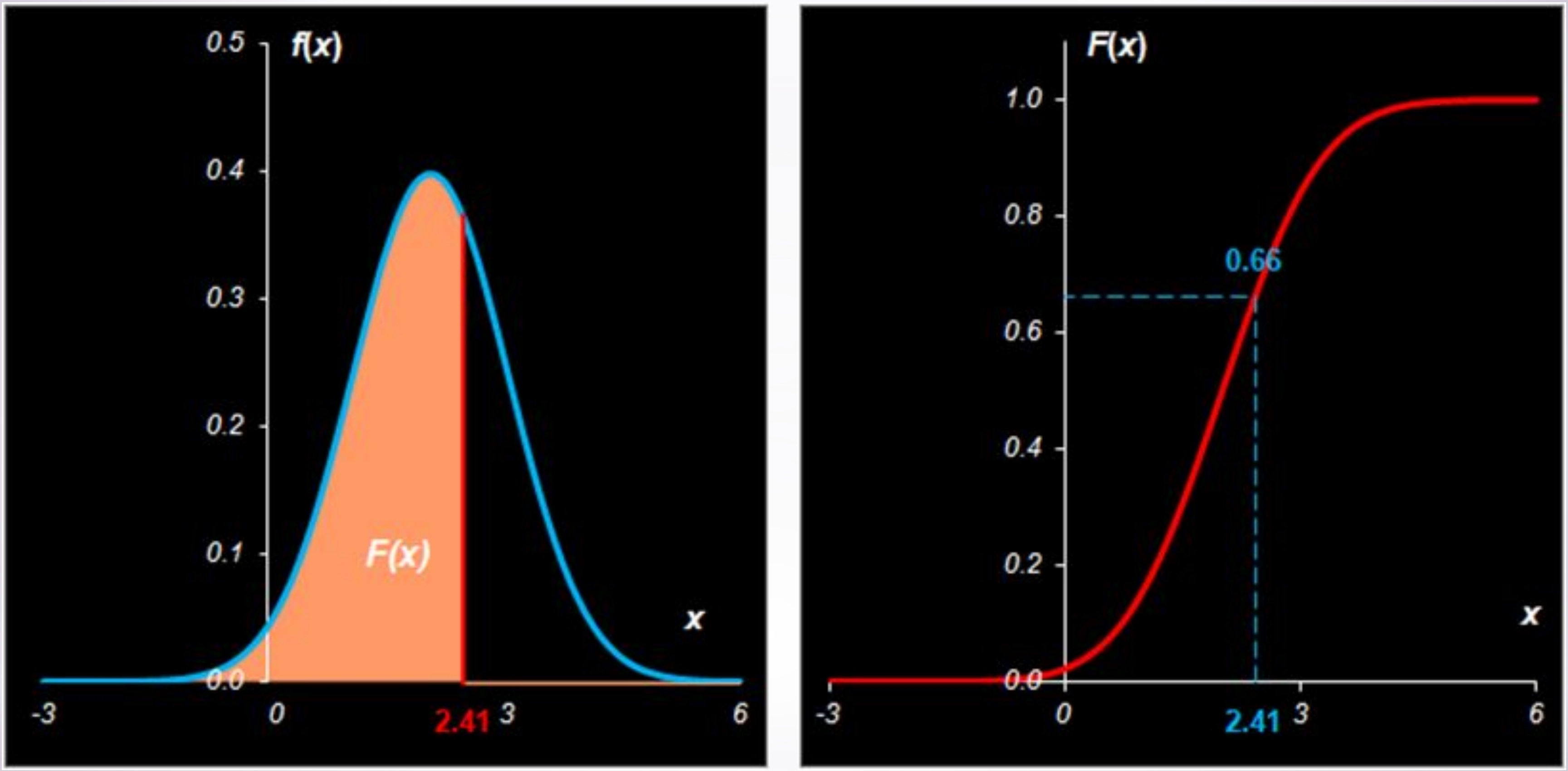


Рис. 1 плотность вероятности f(x) и ф.р F(x) случайной величины

Математическое ожидание

- Пусть X – это случайная величина с плотностью вероятности f(x).
  Математическим ожиданием X называется величина

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

Дисперсия и СКО

- Пусть X – это случайная величина с плотностью вероятности f(x).
  Дисперсией X называется величина

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-E(X)\right)^2 f(x)\,dx = E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$$

- Если из дисперсии извлечь квадратный корень, то получится величина, называемая ***среднеквадратичным*** ... ***(СКО)***

Основные распределения

Нормальное распределение

- ***Нормальное (или гауссово) распределение*** – это, наверное, самое важное распределение в статистике. Плотность этого распределения имеет вид

$$f(x|m,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

- Нормальное распределение зависит от двух параметров: *m* и σ^2 и оно обычно обозначается $N(m, \sigma^2)$ т.е.

- Математическое ожидание и дисперсия нормального распределения равны, соответственно $(X)=m$, $V(X)=\sigma^2$.

- Нормальное распределение называется *стандартным*, если $m=0$, $\sigma^2=1$.

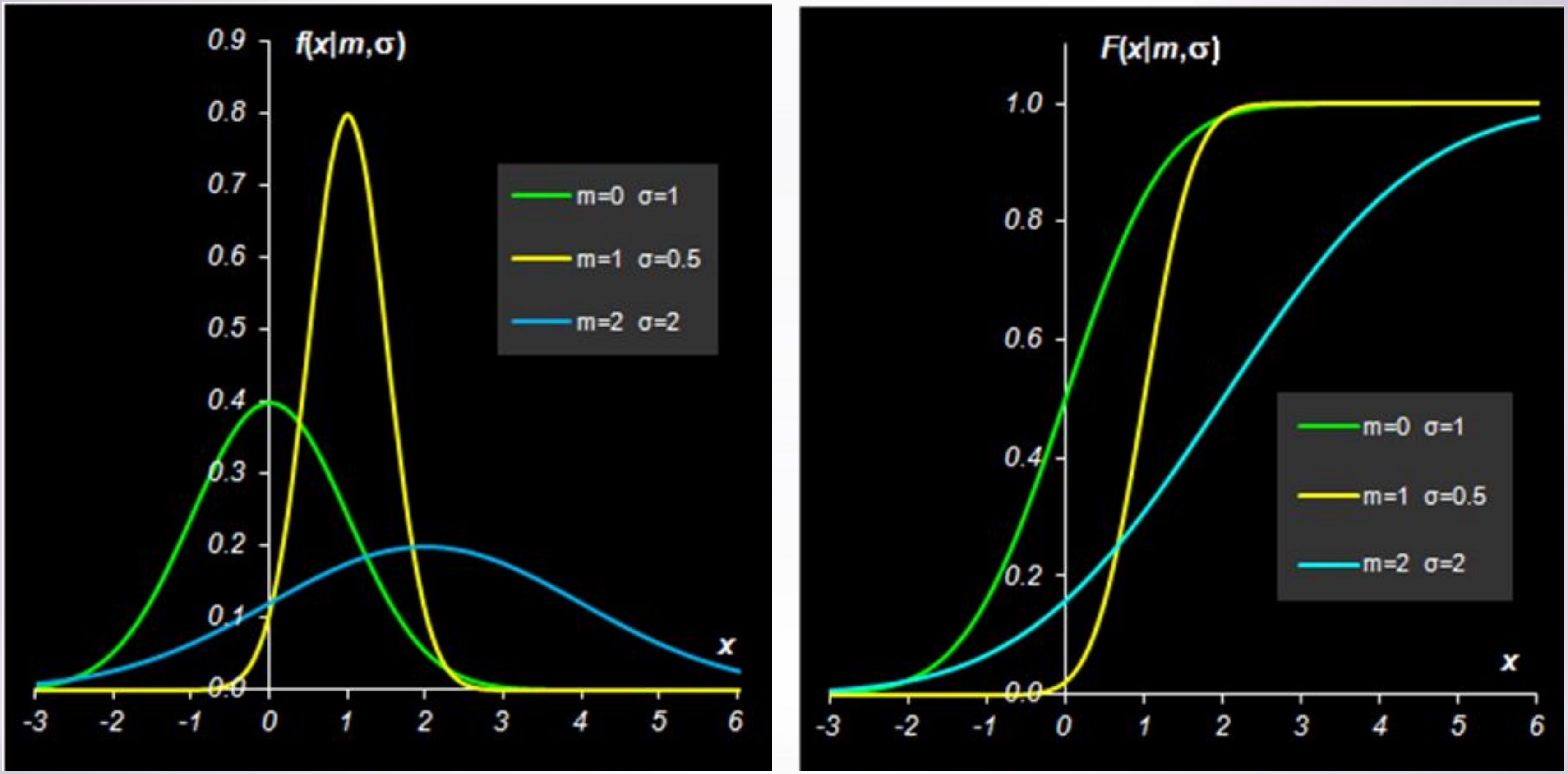


Рис. Функция распределения и плотность вероятности нормального распределения

Распределение хи-квадрат

- Рассмотрим N независимых стандартных ***нормальных случайных величин*** $X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_N$

  с нулевым мат. ожиданием и единичной дисперсией, т.е.

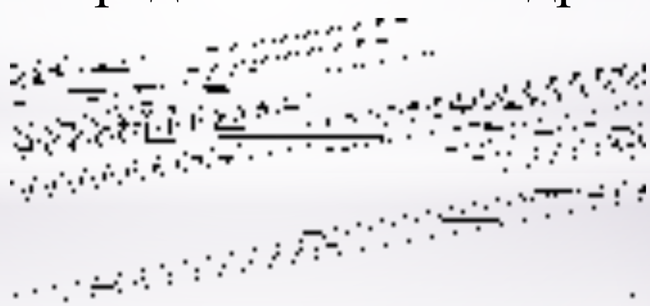
$$\boldsymbol{X_n \sim N(0,\ 1).}$$

- Величина

$$\chi^2(N) = X_1^2 + \ldots + X_N^2$$

  является случайной, распределение которой носит название ***хи-квадрат***. Это распределение зависит от одного параметра – N, который называется ***числом степеней свободы***.

- Плотность вероятности распределения хи-квадрат имеет вид



Распределение хи-квадрат широко используется в статистике, например, при *проверке гипотез.*

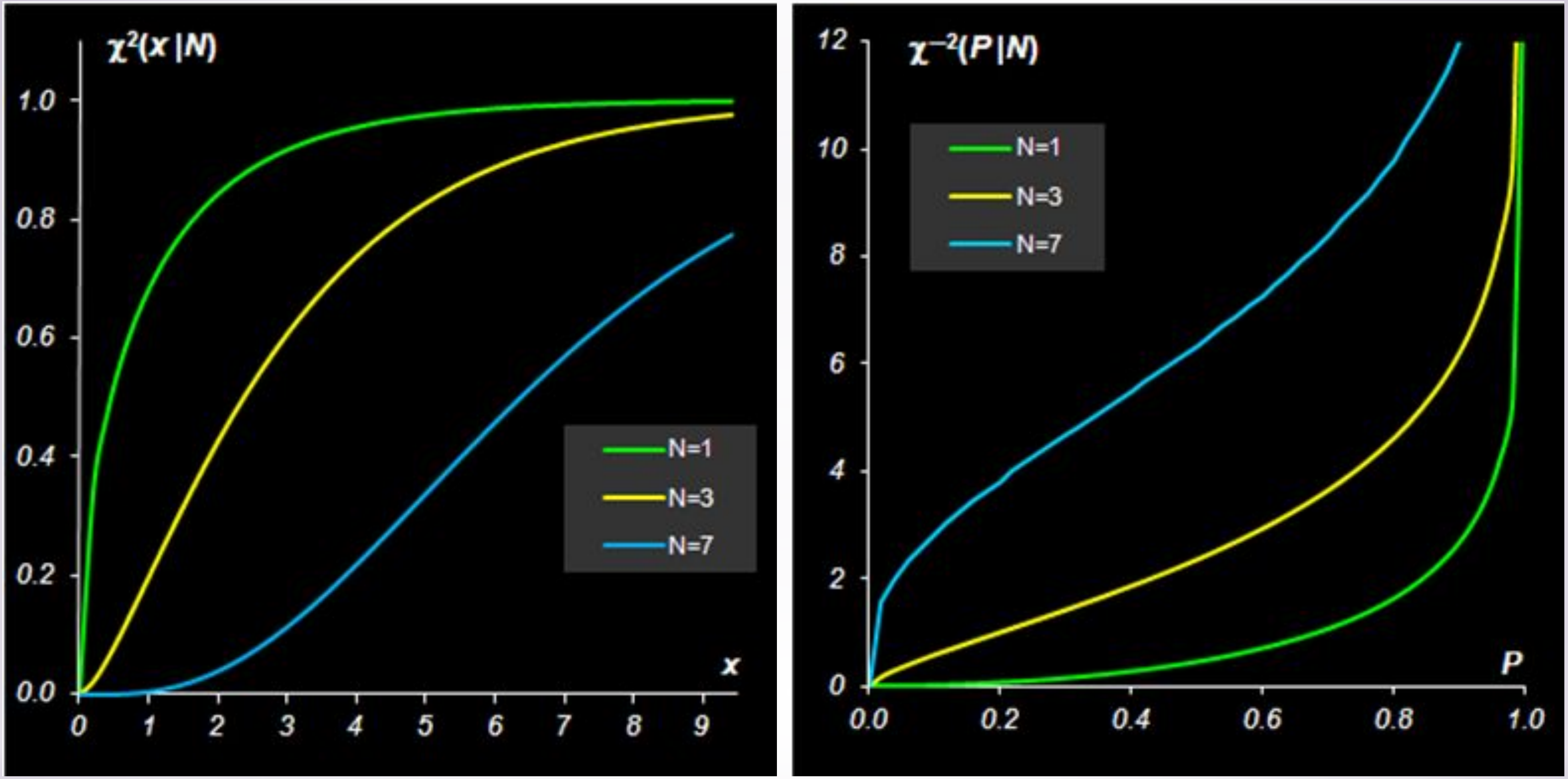


Рис. Функция распределения и квантиль распределения хи-квадрат. Квантили распределения χ2(N) обозначаются χ–2(P | N).

Распределение Стьюдента

- Рассмотрим две случайные величины: *X* – распределенную ***стандартно-нормально*** *X ~ N(0, 1)*, и *Y* – распределенную ***по хи-квадрат с N степенями свободы*** *Y ~ χ2(N)*.

$$T(N) = \sqrt{N}\frac{X}{\sqrt{Y}}$$

- Случайная величина

подчиняется ***распределению, которое носит имя Стьюдента***.

- Это распределение зависит от одного параметра *N*, который также называется числом степеней свободы.

Распределение Стьюдента применяется в проверке гипотез и для построения доверительных интервалов.

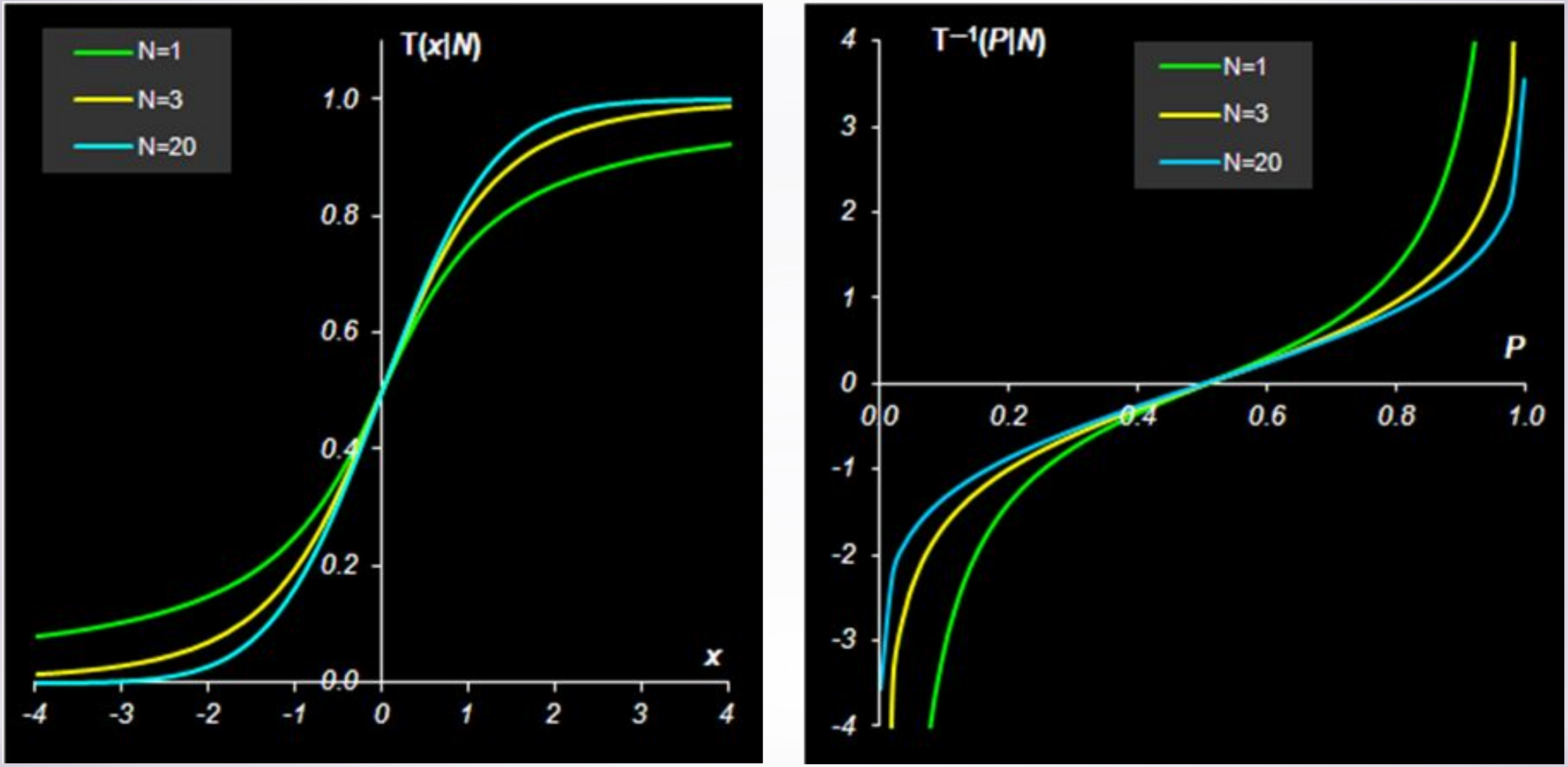


Рис. Функция распределения и квантиль распределения Стьюдента

Распределение Фишера

- Пусть имеются две независимые случайные величины X_1 и X_2 , каждая из которых подчиняется распределению хи-квадрат с N_1 и N_2 степенями свободы, т.е.

$$X_1 \sim \chi^2(N_1) \text{ и } X_2 \sim \chi^2(N_2).$$

- Случайная величина

$$\mathrm{F}(N_1, N_2) = \frac{N_2 X_1}{N_1 X_2}$$

подчиняется распределению, которое носит имя Фишера.

- Это распределение зависит от двух параметров N_1 и N_2, которые также называются числами степеней свободы.
- ***Математическое ожидание*** и ***дисперсия распределения*** $\mathrm{F}(N_1, N_2)$ равны , соответственно,

$$\mathrm{F}(N_1, N_2)) = N_2/(N_2 - 2), \quad N_2 > 2$$

$$\mathrm{V}\big(\mathrm{F}(N_1, N_2)\big) = \frac{2N_2^2(N_1 + N_2 - 2)}{N_1(N_2 - 2)^2(N_2 - 4)}, \quad N_2 > 4$$

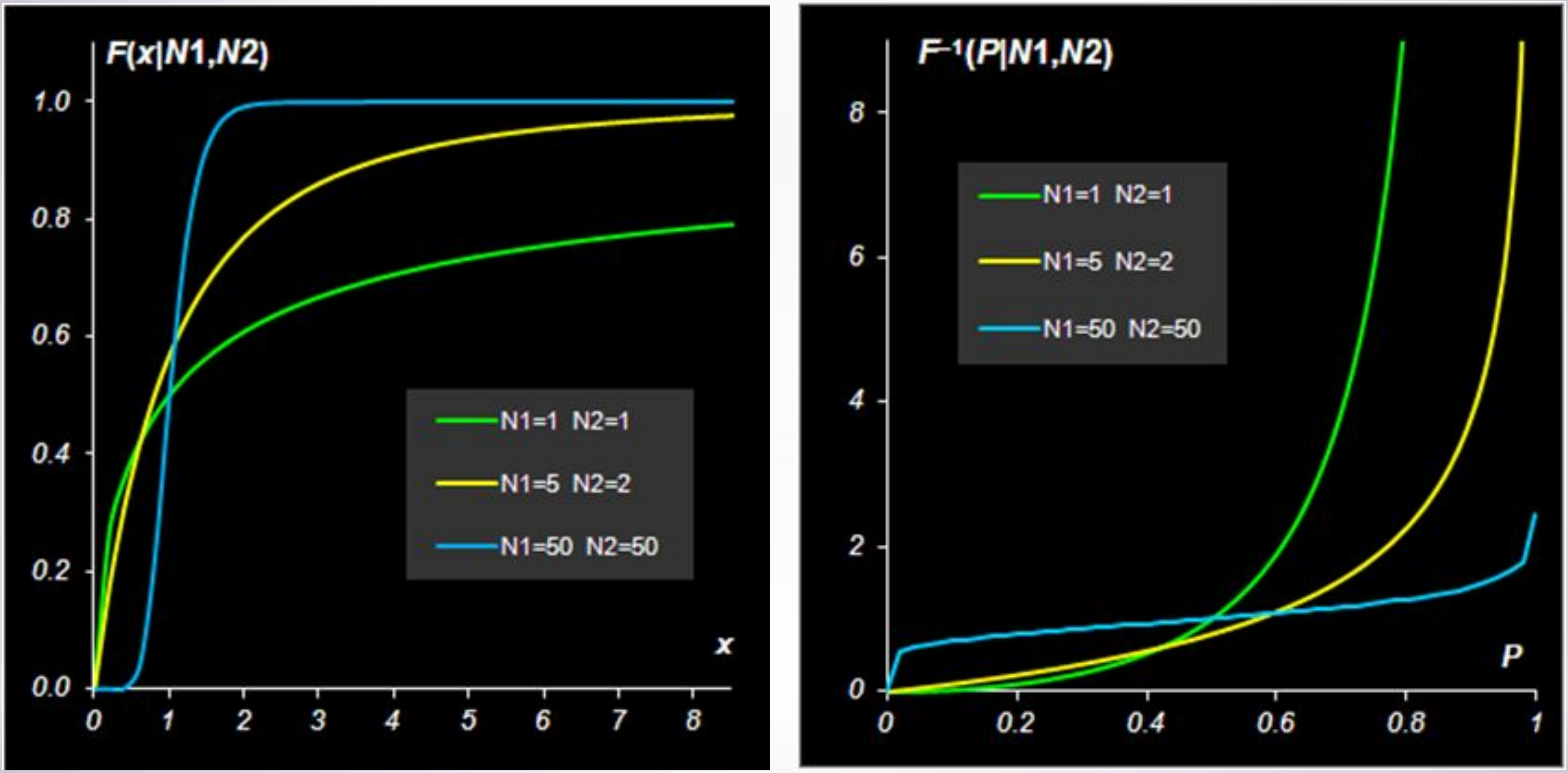


Рис. Функция распределения и квантиль распределения Фишера

Генерация случайных чисел

- Иногда бывает полезно создать искусственную выборку случайных чисел, подчиняющихся заданному распределению.

- Это можно сделать, используя следующее простое утверждение.
 Пусть $F(x)$ и $F^{-1}(P)$ суть некоторая функция распределения и ее квантиль, соответственно.
- Если случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0, 1], т.е

$$X \sim \mathrm{U}(0,1),$$

тогда случайная величина

$$Y = F^{-1}(X)$$

имеет функция распределения F.
- ***Таким образом, если получить набор случайных величин, распределенных равномерно, то эти случайные величины можно превратить в новые, имеющие другое, заданное распределение.***

Полностью рандомизованный план

- Простейшим из всех планов, не представляющим самостоятельного математического интереса, но *важным как в качестве основы для построения других планов, так и для практического применения*, в ряде случаев является *полностью рандомизованный план.*
- Суть этого плана состоит в том, что ***сначала выбирается число участков***, *к которым следует применить каждый из способов обработки*, а затем ***производится рандомизация без каких-либо ограничений.***
- Если имеется N участков и t подлежащих сравнению способов обработки, то выбираются числа r_1, r_2, ..., r_t подчиненные лишь условию

$$\sum r = N.$$

- Тогда правило размещения состоит в следующем: ***выбираются случайным образом*** r_t ***участков для первого способа обработки, из оставшихся участков выбираются наугад*** r_2 ***для второго способа и т. д., и последние*** r_t ***участков выделяются для способа обработки t.***

- ***Дисперсионный анализ*** в этом случае не представляет никаких трудностей и вытекает непосредственно из разбиения суммы квадратов. Вычисления сведены в **табл.**

Дисперсионный анализ для полностью рандомизованного плана *)

Поправка для среднего		$\frac{\left(\sum_j y_j\right)^2}{N}$	Математическое ожидание среднего квадрата
источник изменчивости	степени свободы	сумма квадратов	
Между способами обработки	$t-1$	$\sum_p \frac{Y_p^2}{r_p} - \frac{\left(\sum_j y_j\right)^2}{N}$	$\sigma^2 + \sum_p r_p \frac{(\tau_p - \bar{\tau})^2}{t-1}$
Внутри способов обработки	$N-t$	$\sum_j y_j^2 - \sum_p \frac{Y_p^2}{r_p}$	σ^2
Сумма	$N-1$	$\sum_j y_j^2 - \frac{\left(\sum_j y_j\right)^2}{N}$	. . .

*) Здесь Y_p означает сумму r_p урожаев с участков, подвергнутых обработке p;

 Модели. Когда речь идет о ***критериях значимости и оценивании компонент дисперсии***, модели важное значение приобретают ***модели***
.

- Две основные модели можно проиллюстрировать, обратившись *к полностью рандомизованному плану*.
- *Урожай,* в этом случае*, на каком-либо участке* может быть выражен равенством (*)

$$y_{jp} = \eta + \tau_p + \varepsilon_j,$$

где η — *общий средний урожай*, который был бы получен, если бы каждый способ обработки можно было испытать по очереди на всех участках при одинаковых условиях,

а $(\eta + \tau_p)$ — средний урожай, который был бы получен, если бы обработка р была применена к каждому участку.

Символ y_{ip} используется для обозначения того, что в *принятой конкретной рандомизации* участок *j* (*j* = 1, 2, . . . , *N)* является одним из r_p *(p* = 1, 2, ..., *t)* участков, подвергнутых обработке *p.*

Остаток ε_j представляет собой величину, на которую *истинный урожай участка j отличается от среднего урожая для этого способа обработки.*

- В ***модели нормальных ошибок*** ε_j считается ***нормально распределенной величиной со средним нуль и дисперсией*** σ^2, причем предполагается, что *дисперсия одинакова для всех j*, а *распределения* ε_j *при различных j независимы*.

- Для *более сложных планов* обе эти модели уточняются включением дополнительных параметров в правую часть равенства (*), что дает возможность учесть эффекты наложенных ограничений.

- Модель нормальных ошибок проще в том смысле, что если она применима, то ***отношения средних квадратов в дисперсионном анализе*** (для *полностью рандомизованных* и других планов) ***следуют распределению дисперсионного отношения***, ***когда верны соответствующие нулевые гипотезы.***

- **Компоненты дисперсии.** При применении дисперсионного анализа может появиться необходимость вычислить ***математические ожидания средних квадратов*** при использованной процедуре рандомизации.

- Для *полностью рандомизованного плана в модели нормальных ошибок* они могут быть получены с помощью формул

$$E(y_{jp}) = \eta + \tau_p,$$

$$E[(y_{jp} - \eta - \tau_p)^2] = \sigma^2.$$

- Тогда легко показат[illegible]***утри способов обработки»*** в дисперсионном анализе имеет математическое ожидание σ^2 и, таким образом, не зависит от τ_p. По этой причине для него обычно используют название ***«ошибки».***
- Математическое ожидание ***среднего квадрата «между способами обработки»*** равно

$$\sigma^2 + \frac{\sum_{p=1}^{t} r_p (\tau_p - \bar{\tau})^2}{t-1},$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{p=1}^{t} r_p \tau_p}{N}.$$

- Следовательно, математическое ожидание этого среднего квадрата с необходимостью превосходит σ^2, если только все τ_p не равны между собой.

РАНДОМИЗОВАННЫЕ БЛОКИ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КВАДРАТЫ

Рандомизованный блок-план

Далее рассматриваются только планы для сравнительных экспериментов. Даже специальные типы экспериментирования, часто включают эти планы в качестве составной части своей структуры. Напомним, что

✔ п*олностью рандомизованный план*, предусматривает *сравнение* любого числа способов обработки при *репликах* (т. е. наборах участков) из каждого способа обработки, *полностью зависящих от выбора потребителя*.