

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«Московский технологический университет» МИРЭА**

**Направление 12.04.01**  
**«Приборостроение»**

**Магистерская программа**  
**"Моделирование в биотехническом приборостроении"**

**В. Н. Каданцев**

**Планирование измерительного эксперимента**

**МОСКВА 2016**

## Введение.

- ❖ Методы планирования эксперимента особое значение приобрели в связи с крупными программами проведения и автоматизации научных исследований.
- ❖ Применение методов планирования эксперимента может дать более или менее значительный экономический эффект, но отсутствие соответствующего плана может сделать экспериментальную программу полностью безрезультатной.
- ❖ Это диктует необходимость подготовки специалистов различного уровня, владеющих уже известными методами планирования эксперимента и способных разрабатывать новые методы применительно к различным предметным областям.
- ❖ Важный вопрос — это создание математической модели реального эксперимента. Переход к такой модели должен осуществляться в рамках соответствующей предметной области.
- ❖ Для сельского хозяйства подобный переход требует понимания аграрных или животноводческих вопросов, в химии нужно иметь априорное понимание условий протекания соответствующих реакций: аналогичные проблемы возникают в физике, технике, биологии и др.

- ❖ В каждой области существуют специфические ограничения, и *только специалисты* могут указать группы факторов, которыми можно пренебречь.
- ❖ Специалист в конкретной предметной области редко владеет в полной мере математическим аппаратом. Обычно планирование реального эксперимента *требует совместной работы группы специалистов*.

### Сравнительные эксперименты

- Во многих областях экспериментирования следует отметить различие, между экспериментами, имеющими *целью оценивание абсолютных констант*, и *сравнительными экспериментами*.
- Во многих экспериментах *абсолютная характеристика* может меняться неустойчиво, а *относительная характеристика* двух способов обработки (или процессов, или разновидностей и т. д.) *оказывается довольно устойчивой*. Можно утверждать, что в подобных обстоятельствах *один способ обработки дает существенно лучшие результаты, чем другой, даже если мы не можем установить в точности, какие результаты дает каждый*. В таких областях экспериментирования эксперименты, по-

- В наших лекциях будут рассматриваться главным образом сравнительные эксперименты. Иначе говоря, они будут относиться скорее к таким предметам, как *сравнение эффектов различных доз лекарства*, чем к определению физических констант.

## ПОНЯТИЕ ПЛАНА

### Терминология

- Эксперимент является важнейшей частью научного исследования.
- Мы будем рассматривать лишь математические модели эксперимента. Это означает, что реальные физические, биологические и другие эксперименты будут фигурировать в дальнейшем изложении разве лишь в виде примеров.
- Преимущество такого подхода состоит в общности. Каждая математическая модель оказывается приложимой во многих конкретных ситуациях.
- Математические модели эксперимента тесно связаны с такими математическими дисциплинами, как *теория вероятностей* и *математическая статистика*.



- Единицу материала, подвергаемую обработке, мы будем называть *участком*. В соответствии с исходным смыслом участок может быть площадкой земли, на которой созревает урожай, но он может быть и пациентом больницы, куском животной ткани, местом на теле животного, куда производится инъекция специального назначения, или одной из ряда однотипных машин.
- *Цель эксперимента* состоит в *сравнении эффектов различных способов обработки*, каждый из которых применяется к одному или более участкам, с помощью количественной оценки результатов наблюдений, производимых на отдельных участках.
- Любая количественная мера, полученная с участка, может быть названа *урожаем*.
- *Группа участков в структуре плана*, имеющих некоторые присущие им общие черты, называется *блоком*.
- Иногда *испытываемые способы обработки объединены* в несколько *факторов (Факторный принцип)*.
- Некоторые *количественные или качественные состояния фактора* называются *уровнями*.

## Понятие плана

Под *планом эксперимента* понимают:

- 1) *множество способов обработки, выбираемых для сравнения;*
- 2) *спецификацию обрабатываемых участков;*
- 3) *правила, по которым способы обработки следует размещать на участках;*
- 4) *спецификацию измерений или других данных, которые должны быть получены на каждом участке.*

- ✓ Обычно окончательное *решение по пункту 1)* принимает *экспериментатор*, хотя часто для оптимального выбора способов обработки имеется *статистическая теория*.
- ✓ То, что можно было бы назвать *классической теорией планирования экспериментов*, заключено *в пункте 3)*.
- ✓ *Статистик* должен уметь делать полезные предложения по *спецификации соответствующих участков*.
- ✓ Основными моментами, которые следует при этом иметь в виду, являются: а) *пригодность*, б) *осуществимость*, в) *точность*.

## Рандомизация

- Необходимым условием для *получения несмещенных оценок разностей и их дисперсий* является то, что *принятое частное расположение* выбрано случайным образом из множества всех возможных.
- Этот случайный выбор, который достигается с помощью *таблицы случайных чисел* или *других способов обеспечения безобидной лотереи*, является сейчас, по общему признанию, существенной чертой планирования экспериментов.
- План *полностью определяется только с помощью множества всех допустимых расположений, из которых был выбран один действительно принятый план.*
- Изложение теории планирования мы будем проводить только для случая *рандомизованных планов*, если не оговорено противное.
- Следовательно, спецификация плана должна включать формулировку одного или большего числа процессов *требуемой рандомизации.*



- «Беспорядочное» расположение способов обработки или любое использование личного суждения при построении «случайных на вид» расположений *не следует смешивать с точными процессами рандомизации, которые описаны в специальной литературе.*
- Во всех планах, описанных далее, *рандомизация расположения способов обработки* по участкам в пределах любого определенного блока или при сходных ограничениях *является существенной для полной законности интерпретации.*
- *Понятие случайного выбора наблюдений присуще всей теории вероятностей и всей теории статистического оценивания.*
- Подходящая рандомизация имеет то следствие, что *в дисперсионном анализе при нулевой гипотезе о том, что способы обработки дают одинаковый эффект, средние квадраты для способов обработки и ошибок имеют равные математические ожидания.*



# Статистика

- В математике слово «*статистика*» имеет два значения.
  - Во-первых, так называется раздел математики, в котором *по выборке (результатам экспериментов) определяется вид распределения, из которого была извлечена эта выборка, оцениваются параметры этого распределения, проверяются гипотезы о виде этого распределения.*
  - Второе значение слова «**статистика**» – **это (измеримая) функция выборки.** Поскольку элементы выборки суть случайные величины, то и *статистика является случайной величиной.*
- Назначение статистик – *оценка параметров распределения, из которого извлечена выборка.*
- ❖ В этом разделе собраны основные сведения из *математической статистики, которые используются в планировании измерительных экспериментов.*

- **Вероятность события.** *Случайным событиям* можно приписать *вероятность* – число от нуля до единицы.
- Понятие вероятности можно применять только к тем событиям, которые еще не произошли, или *исход которых нам пока не известен.*
- Еще одним важным понятием является *пространство событий* – это полный набор всех возможных исходов.
- *Случайная величина* – это переменная, значение которой до опыта (реализации) неизвестно.
- Всякая случайная величина характеризуется:
  - ✓ *множеством своих возможных значений*
  - ✓ *неограниченным числом повторения реализаций*
  - ✓ *вероятностью попадания в любую наперед заданную область во множестве значений.*

## Распределение случайной величины

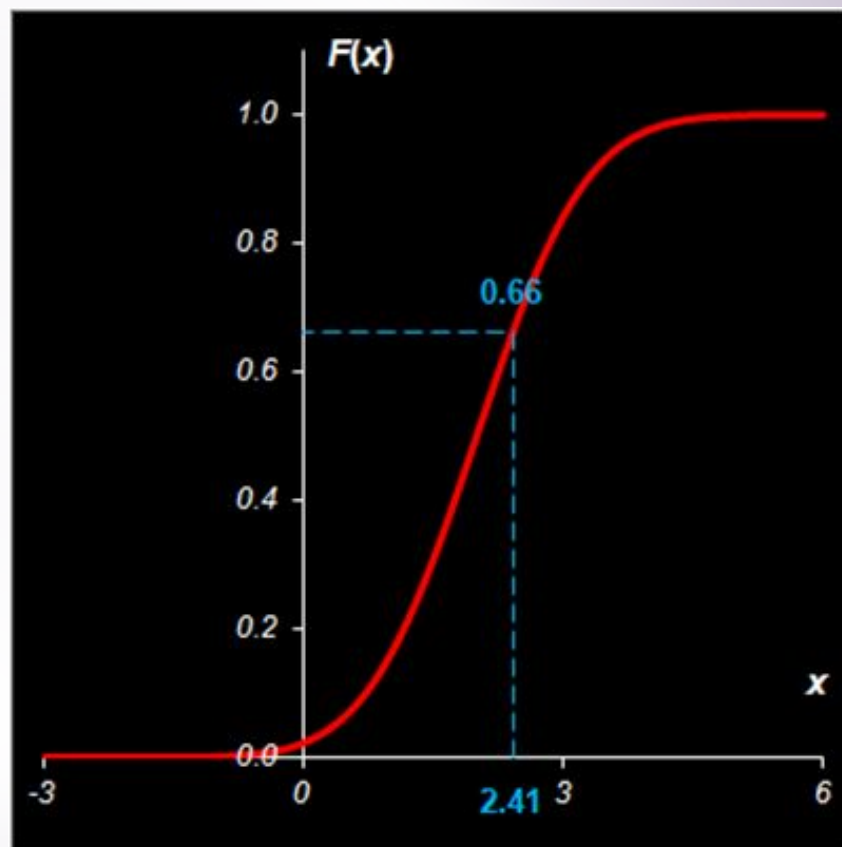
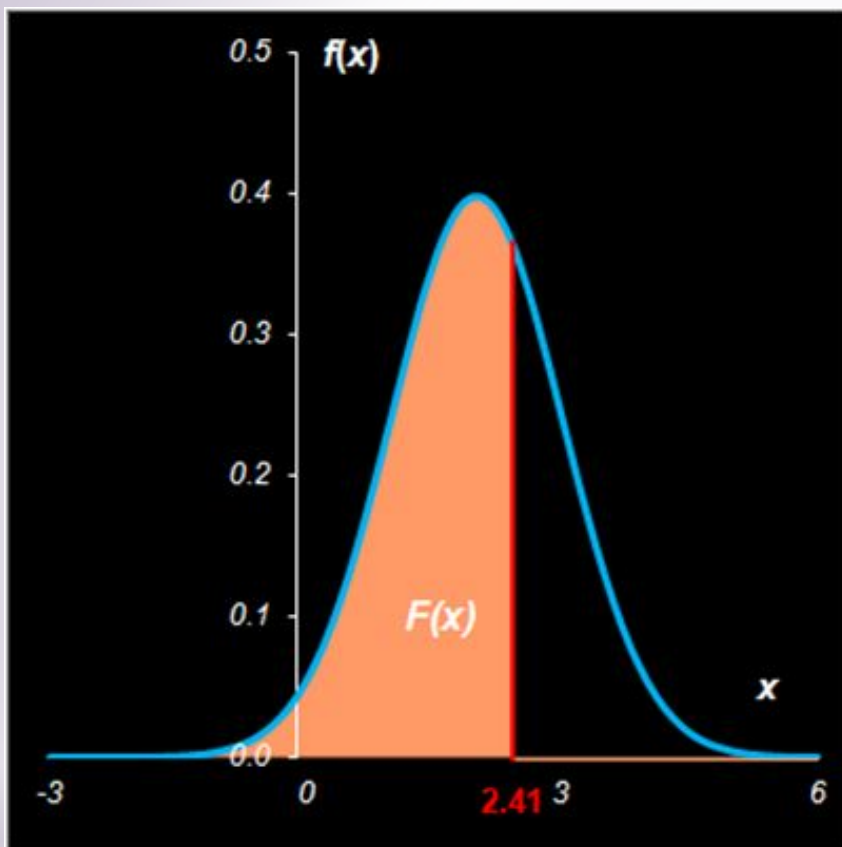
□ Пусть  $X$  – это случайная величина, множеством возможных значений которой являются действительные числа. Рассмотрим вероятность события, что реализация  $X$  не больше заданного числа  $x$ . Если рассматривать эту вероятность в зависимости от величины  $x$ , то получится функция  $F(x)$ , называемая (кумулятивной) *функцией распределения случайной величины* –

$$F(x) = Pr\{X \leq x\}.$$

□ *Функция распределения* это *неубывающая функция*, которая стремится к 0 при малых  $x$ , и стремится к 1 при больших значениях аргумента.

□ Производная функция распределения  $F(x)$  называется *плотностью вероятности*  $f(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



*Рис. 1 плотность вероятности  $f(x)$  и ф.р  $F(x)$  случайной величины*



## Математическое ожидание

- Пусть  $X$  – это случайная величина с плотностью вероятности  $f(x)$ .

*Математическим ожиданием*  $X$  называется величина

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

## Дисперсия и СКО

- Пусть  $X$  – это случайная величина с плотностью вероятности  $f(x)$ .

*Дисперсией*  $X$  называется величина

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = E((X - E(X))^2)$$

- Если из дисперсии извлечь квадратный корень, то получится величина, называемая *среднеквадратичным*  
(СКО)

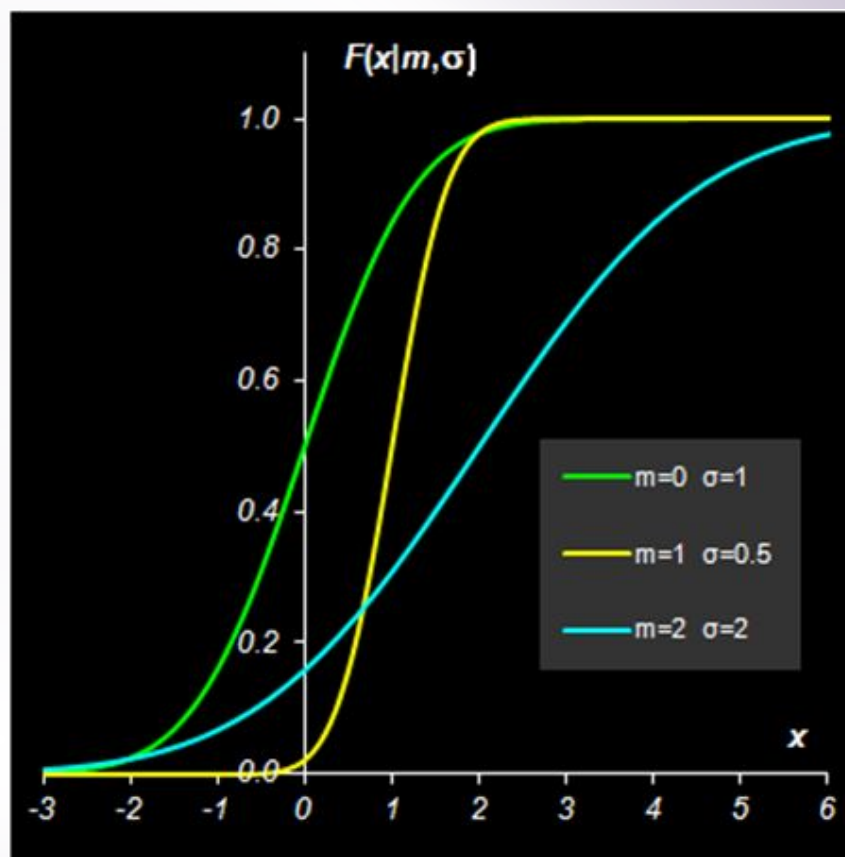
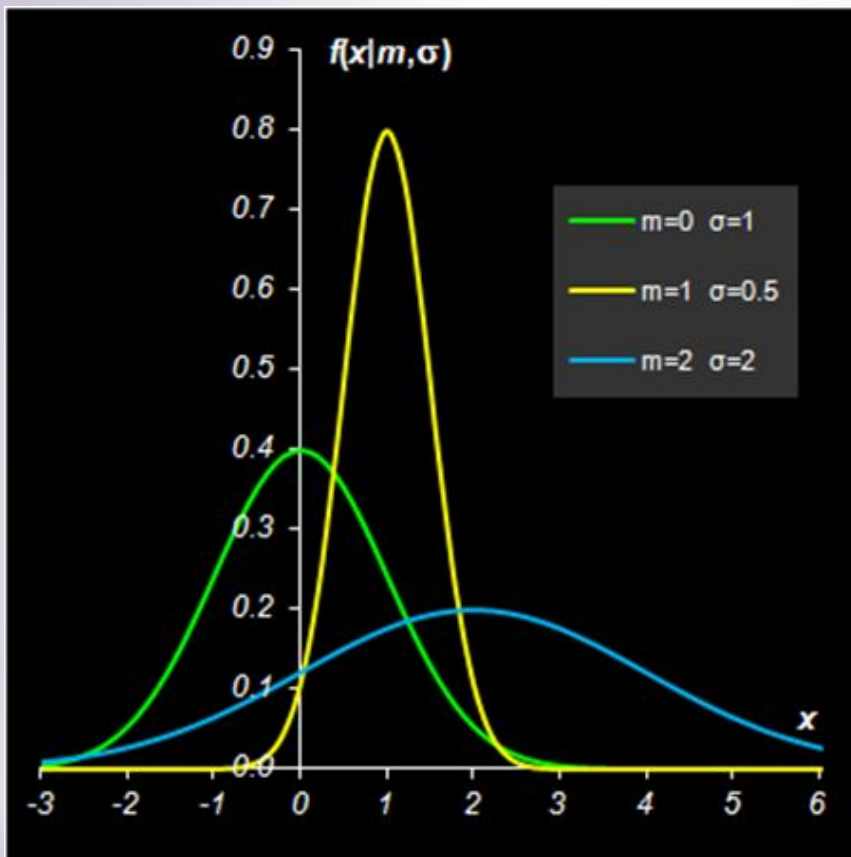
# Основные распределения

## Нормальное распределение

□ *Нормальное (или гауссово) распределение* – это, наверное, самое важное распределение в статистике. Плотность этого распределения имеет вид

$$f(x|m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

- Нормальное распределение зависит от двух параметров:  $m$  и  $\sigma^2$  и оно обычно обозначается  $N(m, \sigma^2)$  т.е.
- Математическое ожидание и дисперсия нормального распределения равны, соответственно  $(X)=m$ ,  $V(X)=\sigma^2$ .
- Нормальное распределение называется *стандартным*, если  $m=0$ ,  $\sigma^2=1$ .



*Рис. Функция распределения и плотность вероятности нормального распределения*

## Распределение хи-квадрат

□ Рассмотрим  $N$  независимых стандартных *нормальных случайных величин*  $X_1, \dots, X_n, \dots, X_N$

с нулевым мат. ожиданием и единичной дисперсией, т.е.

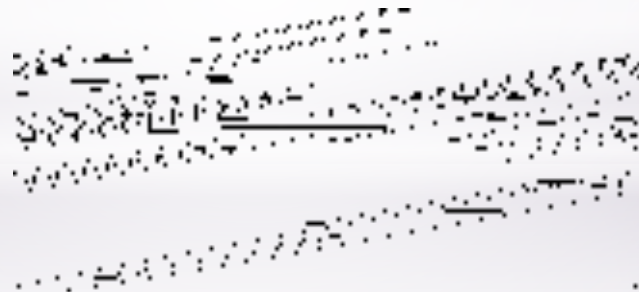
$$X_n \sim N(0, 1).$$

□ Величина

$$\chi^2(N) = X_1^2 + \dots + X_N^2$$

*является случайной*, распределение которой носит название *хи-квадрат*. Это распределение зависит от одного параметра –  $N$ , который называется *числом степеней свободы*.

□ Плотность вероятности распределения хи-квадрат имеет вид



Распределение хи-квадрат широко используется в статистике, например, при *проверке гипотез*.



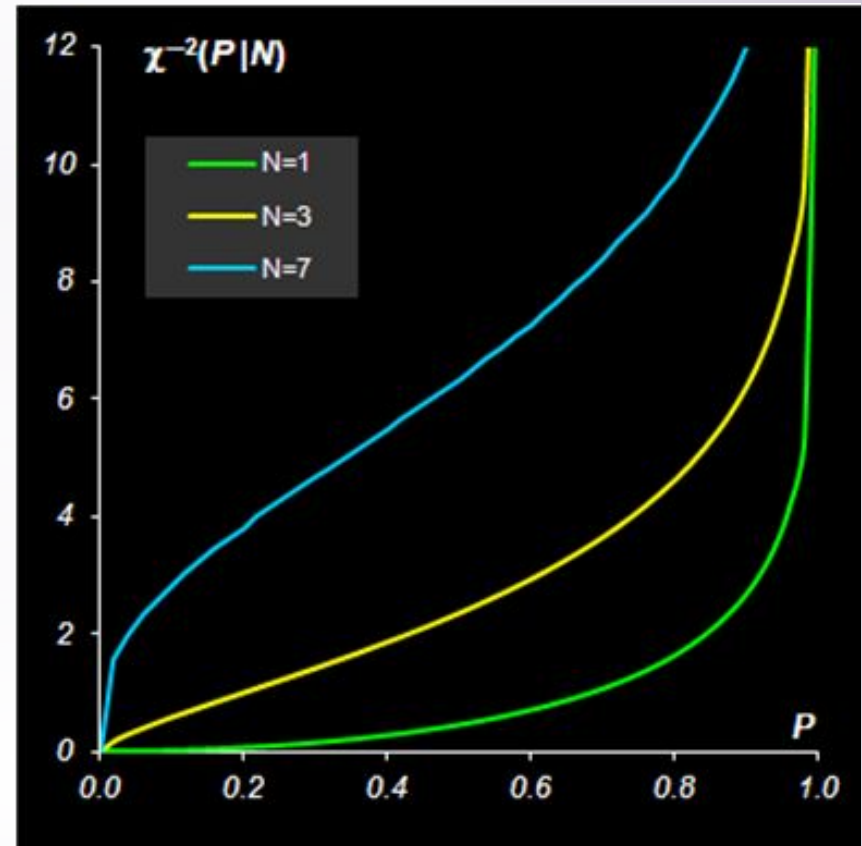
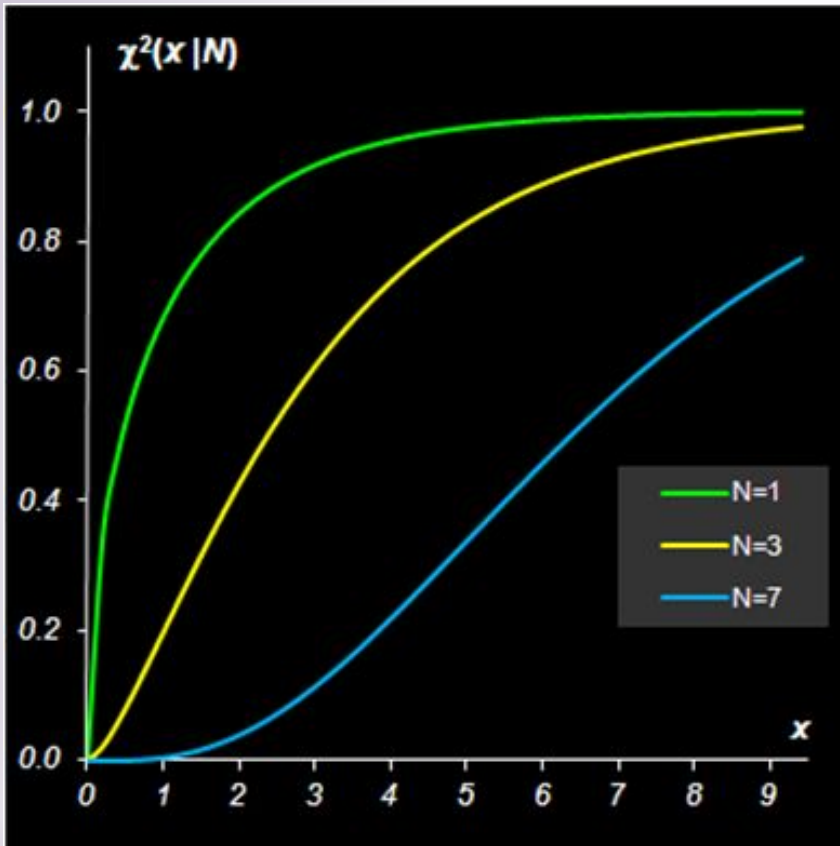


Рис. Функция распределения и квантиль распределения хи-квадрат. Квантили распределения  $\chi^2(N)$  обозначаются  $\chi^{-2}(P | N)$ .

# Распределение Стьюдента

- Рассмотрим две случайные величины:  $X$  – распределенную *стандартно-нормально*  $X \sim N(0, 1)$ , и  $Y$  – распределенную *по хи-квадрат с  $N$  степенями свободы*  $Y \sim \chi^2(N)$ .

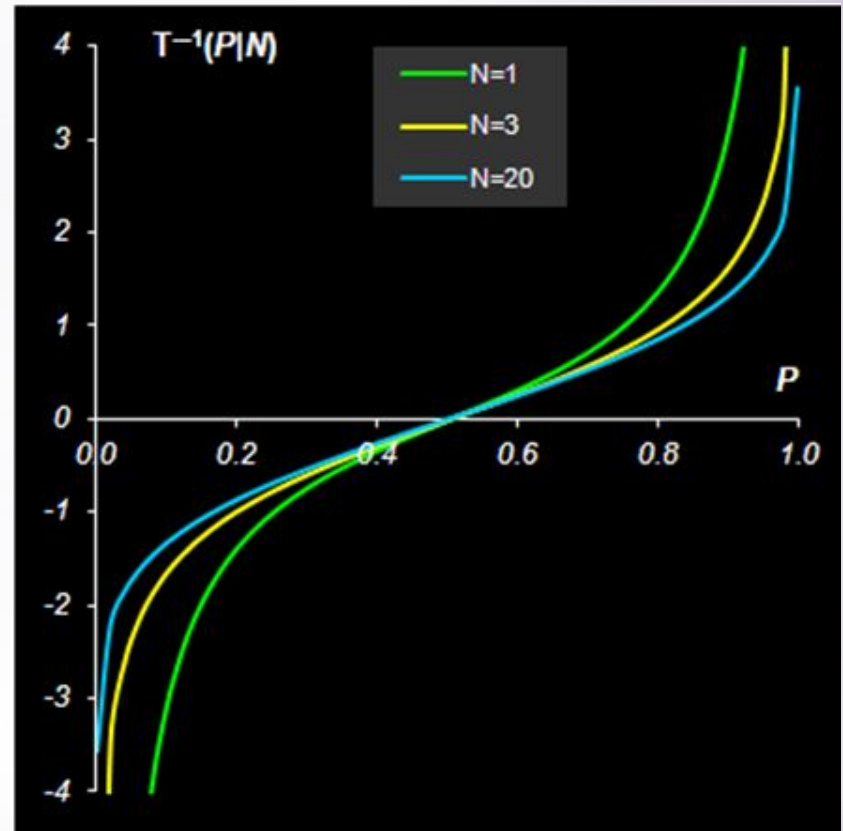
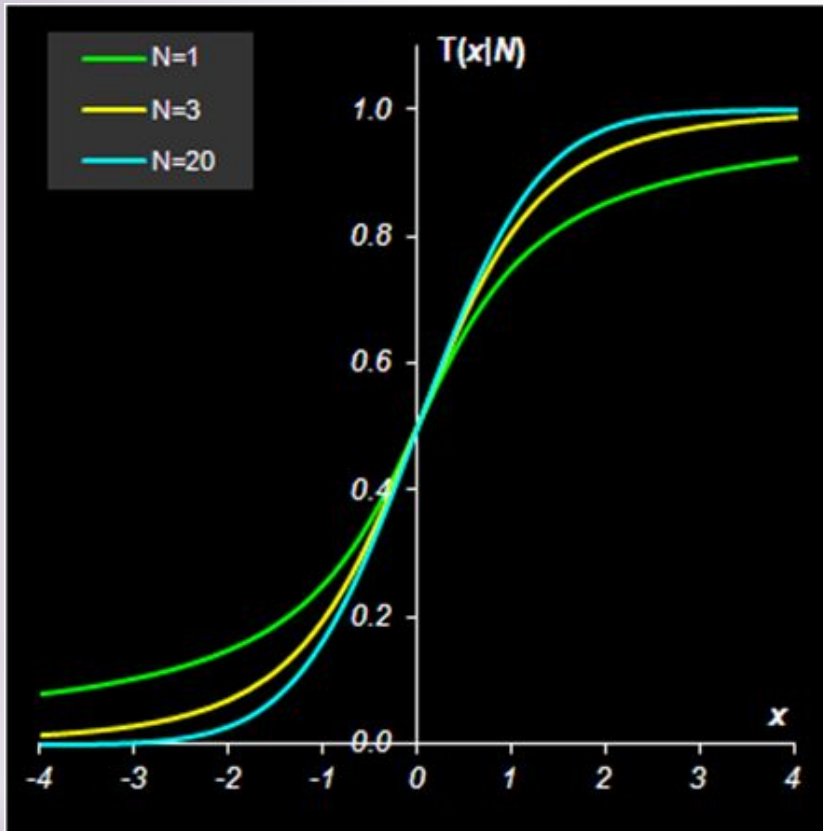
$$T(N) = \sqrt{N} \frac{X}{\sqrt{Y}}$$

- Случайная величина

подчиняется *распределению, которое носит имя Стьюдента*.

- Это распределение зависит от одного параметра  $N$ , который также называется числом степеней свободы.

**Распределение Стьюдента применяется в проверке гипотез и для построения доверительных интервалов.**



*Рис. Функция распределения и квантиль  
распределения Стьюдента*

# Распределение Фишера

- Пусть имеются две независимые случайные величины  $X_1$  и  $X_2$ , каждая из которых подчиняется распределению хи-квадрат с  $N_1$  и  $N_2$  степенями свободы, т.е.

$$X_1 \sim \chi^2(N_1) \text{ и } X_2 \sim \chi^2(N_2).$$

- Случайная величина

$$F(N_1, N_2) = \frac{N_2 X_1}{N_1 X_2}$$

подчиняется распределению, которое носит имя Фишера.

- Это распределение зависит от двух параметров  $N_1$  и  $N_2$ , которые также называются числами степеней свободы.

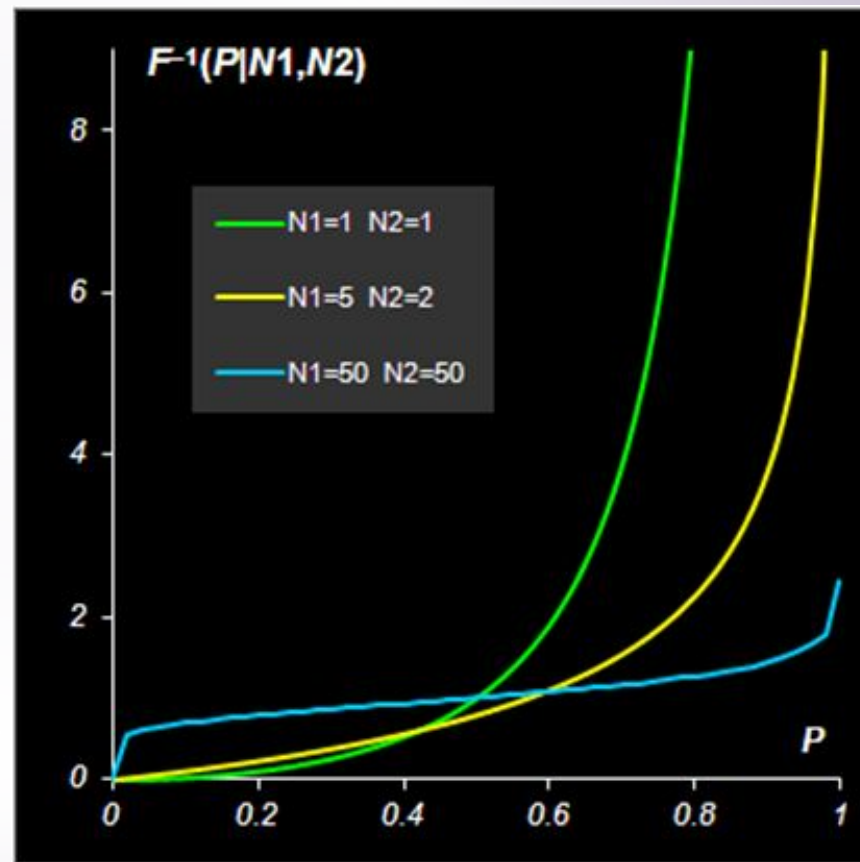
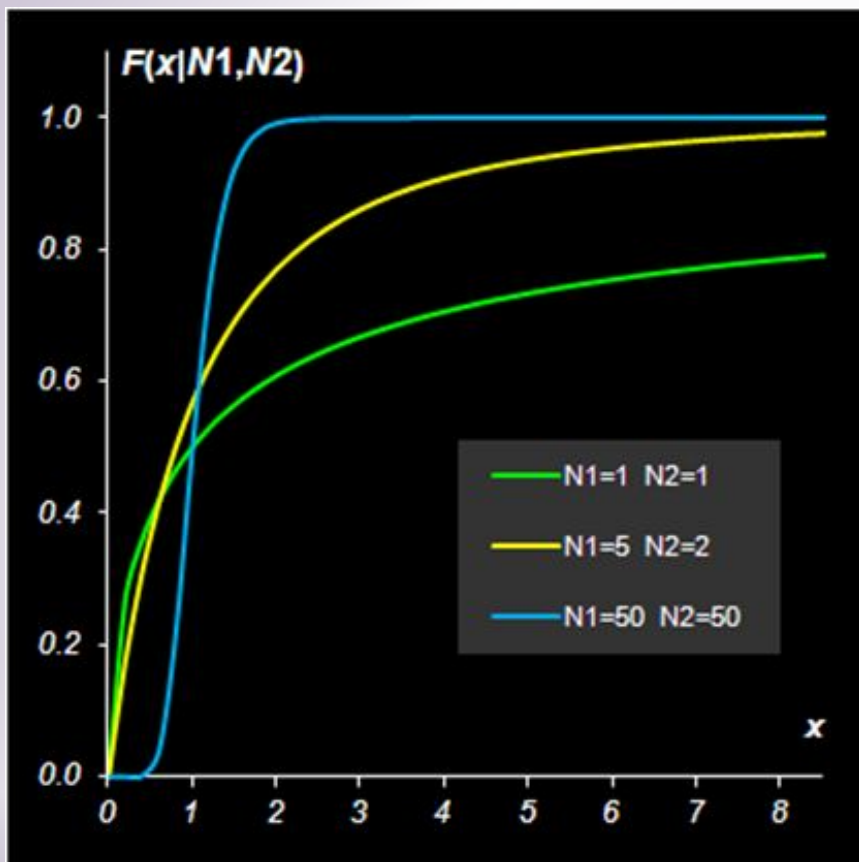
## ***□ Математическое ожидание и дисперсия распределения***

$F(N_1, N_2)$  равны, соответственно,

$$E(F(N_1, N_2)) = N_2 / (N_2 - 2), \quad N_2 > 2$$

$$V(F(N_1, N_2)) = \frac{2N_2^2(N_1 + N_2 - 2)}{N_1(N_2 - 2)^2(N_2 - 4)}, \quad N_2 > 4$$





*Рис. Функция распределения и квантиль  
распределения Фишера*

# Генерация случайных чисел

□ Иногда бывает полезно создать искусственную выборку случайных чисел, подчиняющихся заданному распределению.

□ Это можно сделать, используя следующее простое утверждение.

Пусть  $F(x)$  и  $F^{-1}(P)$  суть некоторая функция распределения и ее квантиль, соответственно.

□ Если случайная величина  $X$  распределена равномерно на отрезке  $[0, 1]$ , т.е

$$X \sim U(0,1),$$

тогда случайная величина

$$Y = F^{-1}(X)$$

имеет функция распределения  $F$ .

*□ Таким образом, если получить набор случайных величин, распределенных равномерно, то эти случайные величины можно превратить в новые, имеющие другое, заданное распределение.*

## Полностью рандомизованный план

- Простейшим из всех планов, не представляющим самостоятельного математического интереса, но *важным как в качестве основы для построения других планов, так и для практического применения*, в ряде случаев является *полностью рандомизованный план*.
  - Суть этого плана состоит в том, что *сначала выбирается число участков, к которым следует применить каждый из способов обработки, а затем производится рандомизация без каких-либо ограничений*.
  - Если имеется  $N$  участков и  $t$  подлежащих сравнению способов обработки, то выбираются числа  $r_1, r_2, \dots, r_t$  подчиненные лишь условию
- $$\sum r = N.$$
- Тогда правило *размещения* состоит в следующем: *выбираются случайным образом  $r_1$  участков для первого способа обработки, из оставшихся участков выбираются наугад  $r_2$  для второго способа и т. д., и последние  $r_t$  участков выделяются для способа обработки  $t$ .*

- **Дисперсионный анализ** в этом случае не представляет никаких трудностей и вытекает непосредственно из разбиения суммы квадратов. Вычисления сведены в табл.

Дисперсионный анализ для полностью рандомизованного плана \*)

Поправка для среднего		$\frac{(\sum y_j)^2}{N}$	Математическое ожидание среднего квадрата
источник изменчивости	степени свободы	сумма квадратов	
Между способами обработки	$t - 1$	$\sum_p \frac{Y_p^2}{r_p} - \frac{(\sum y_j)^2}{N}$	$\sigma^2 + \sum_p r_p \frac{(\tau_p - \bar{\tau})^2}{t - 1}$
Внутри способов обработки	$N - t$	$\sum_l y_l^2 - \sum_p \frac{Y_p^2}{r_p}$	$\sigma^2$
Сумма	$N - 1$	$\sum_l y_l^2 - \frac{(\sum y_j)^2}{N}$	...

\*) Здесь  $Y_p$  означает сумму  $r_p$  урожаев с участков, подвергнутых обработке  $p$ ;



□ **Модели.** Когда речь идет о *критериях значимости и оценивании компонент дисперсии*, модели важное значение приобретают *модели*.

- Две основные модели можно проиллюстрировать, обратившись к *полностью рандомизованному плану*.
- *Урожай*, в этом случае, *на каком-либо участке* может быть выражен равенством

$$y_{jp} = \eta + \tau_p + \varepsilon_j,$$

где  $\eta$  — *общий средний урожай*, который был бы получен, если бы каждый способ обработки можно было испытать по очереди на всех участках при одинаковых условиях,

а  $(\eta + \tau_p)$  — *средний урожай*, который был бы получен, если бы обработка  $p$  была применена к каждому участку.

Символ  $y_{jp}$  используется для обозначения того, что в *принятой конкретной рандомизации* участок  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) является одним из  $r_p$  ( $p = 1, 2, \dots, t$ ) участков, подвергнутых обработке  $p$ .

Остаток  $\varepsilon_j$  представляет собой величину, на которую *истинный урожай участка  $j$  отличается от среднего урожая для этого способа обработки*.

- В модели нормальных ошибок  $\varepsilon_j$  считается нормально распределенной величиной со средним нуль и дисперсией  $\sigma^2$ , причем предполагается, что дисперсия одинакова для всех  $j$ , а распределения  $\varepsilon_j$  при различных  $j$  независимы.
- Для более сложных планов обе эти модели уточняются включением дополнительных параметров в правую часть равенства (\*), что дает возможность учесть эффекты наложенных ограничений.
  - Модель нормальных ошибок проще в том смысле, что если она применима, то *отношения средних квадратов в дисперсионном анализе* (для полностью рандомизованных и других планов) *следуют распределению дисперсионного отношения, когда верны соответствующие нулевые гипотезы.*

□ **Компоненты дисперсии.** При применении дисперсионного анализа может появиться необходимость вычислить *математические ожидания средних квадратов* при использованной процедуре рандомизации.

- Для *полностью рандомизованного плана в модели нормальных ошибок* они могут быть получены с помощью формул

$$E(y_{j\rho}) = \eta + \tau_{\rho},$$
$$E[(y_{j\rho} - \eta - \tau_{\rho})^2] = \sigma^2.$$

- Тогда легко показать, что *«три способа обработки»* в дисперсионном анализе имеет математическое ожидание  $\sigma^2$  и, таким образом, не зависит от  $\tau_p$ . По этой причине для него обычно используют название *«ошибки»*.
- Математическое ожидание *среднего квадрата «между способами обработки»* равно

$$\sigma^2 + \frac{\sum_{\rho=1}^t r_{\rho} (\tau_{\rho} - \bar{\tau})^2}{t-1},$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{p=1}^t r_p \tau_p}{N}.$$

- Следовательно, математическое ожидание этого среднего квадрата с необходимостью превосходит  $\sigma^2$ , если только все  $\tau_p$  не равны между собой.

## РАНДОМИЗОВАННЫЕ БЛОКИ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КВАДРАТЫ

### Рандомизованный блок-план

Далее рассматриваются только планы для сравнительных экспериментов. Даже специальные типы экспериментирования, часто включают эти планы в качестве составной части своей структуры. Напомним, что

- ✓ *полностью рандомизованный план, предусматривает сравнение любого числа способов обработки при репликах (т. е. наборах участков) из каждого способа обработки, полностью зависящих от выбора потребителя.*