

Проверка домашней работы

Следующие пределы вычислите самостоятельно:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x - 3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{6x^3 - 4x^2}$$

$$4. \lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 + 6t + 9}{t^2 + t - 6}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{3x^2 + 8x - 3}$$

$$6. \lim_{a \rightarrow -2} \frac{5a^2 + 9a - 2}{3a^2 + 5a - 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 - 7x - 4}{6x^2 + 7x + 2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$$

Ответы

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 3x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+6) - (x+6)}{x(2x+5) - (2x+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+6)(x-1)}{(2x+5)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+6}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{7} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 + x - 12x - 3}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(4x+1) - 3(4x+1)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4x+1)(x-3)}{(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 4x+1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13 \end{aligned}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{6x^2 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x-1)}{2x^2(3x-2)} = \frac{0 \cdot 1}{3 \cdot 0 - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 4. \lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 + 6t + 9}{t^2 + t - 6} &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t+3)^2}{t(t+3) - 2(t+3)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t+3)^2}{(t+3)(t-2)} = \frac{-3+3}{-3-2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{3x^2 + 8x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x - 7x - 21}{3x^2 + 9x - x - 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3) - 7(x+3)}{3x(x+3) - (x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-7)}{(x+3)(3x-1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-7}{3x-1} = \frac{-3-7}{3(-3)-1} = \frac{1}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \lim_{a \rightarrow -2} \frac{5a^2 + 9a - 2}{3a^2 + 5a - 2} &= \lim_{a \rightarrow -2} \frac{5a^2 + 10a - a - 2}{3a^2 + 6a - a - 2} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -2} \frac{5a(a+2) - (a+2)}{3a(a+2) - (a+2)} = \lim_{a \rightarrow -2} \frac{(a+2)(5a-1)}{(a+2)(3a-1)} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -2} \frac{5a-1}{3a-1} = \frac{5(-2)-1}{3(-2)-1} = \frac{11}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 - 7x - 4}{6x^2 + 7x + 2} &= \frac{2(0,5)^2 - 3,5 - 4}{6(0,5)^2 + 3,5 + 2} = \\ &= \frac{0,5 - 7,5}{1,5 + 5,5} = \frac{-7}{7} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 5x + 15}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-3) - 5(x-3)}{(x+5)(x-5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-3)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

ОТВЕТЫ

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x + 2}{5x^2 + 3x + 1} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 3x + 7} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x^2 + 7}{x^2 + 4x + 3} = \infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x^3 + x + 13} = \frac{6}{2} = 3$$

V. Дополнительные свойства вычисления пределов для дробно - рациональных функций

1. Если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел при стремлении x к бесконечности будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} = 2$$

2) Придумать свой пример

2. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то при стремлении x к бесконечности равен нулю.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} = 0$$

2) Придумать свой пример

3. Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует.

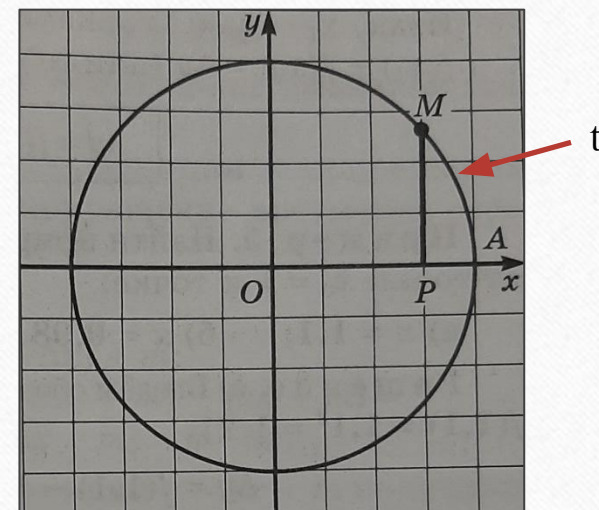
$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - x^2 + 1}{x^4 + 2x^3 + x} = \infty$$

2) Придумать свой пример

VI. Первый замечательный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$M(t)$ – точка на окружности
 t – длина дуги AM
 $\sin t$ – длина MP ($MP \perp OX$)



При $t \rightarrow 0$ $M \rightarrow A$. Тогда $MP \rightarrow MA$, т.е. $\frac{MP}{MA} \rightarrow 1$.

Значит, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Например,

$$\frac{\sin 1}{1} \approx 0,84147; \quad \frac{\sin 0,1}{0,1} \approx 0,99833;$$

$$\frac{\sin 0,01}{0,01} \approx 0,99998.$$

Пример.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 * 1 = 2$$