Колебания

Гармонические колебания. Затухающие и вынужденные колебания

Энергия гармонического осциллятора

- Свободные колебания любого осциллятора в отсутствие трения будут гармоническими, если действующая в нем сила (или момент силы) является квазиупругой, т. е. силой, направленной к положению равновесия и зависящей от смещения из этого положения линейно.
- Рассмотрим материальную точку массы m, колеблющейся под действием квазиупругой силы $F_x = -\varkappa x$. Потенциальная и кинетическая энергии частицы имеют в данном случае такой вид:

$$U = \varkappa x^2/2 = (\varkappa a^2/2)\cos^2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$K = m\dot{x}^2/2 = (m a^2 \omega_0^2/2)\sin^2(\omega_0 t + \alpha).$$

- (5.12)

- Из этих соотношений видно, что значения U и K сдвинуты друг относительно друга по фазе на π/2: когда U максимальна, K минимальна, и наоборот. При этом полная энергия сохраняется:

$$E = U + K = \varkappa a^2/2 = m a^2 \omega_0^2/2,$$

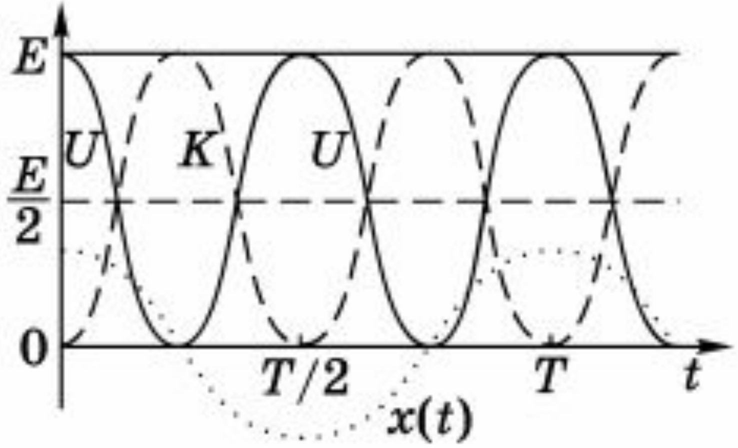
- (5.13)

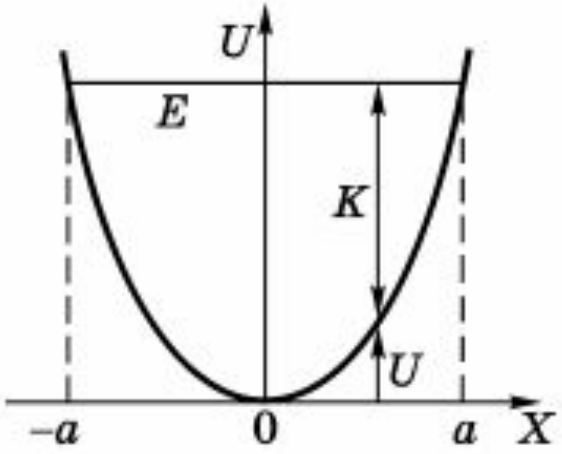
- Принимая во внимание (5.13), формулы (5.12) можно переписать так:

$$U = E\cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad K = E\sin^2(\omega_0 t + \alpha).$$

- (5.14)

- Из графиков видно, что в процессе колебаний происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно.





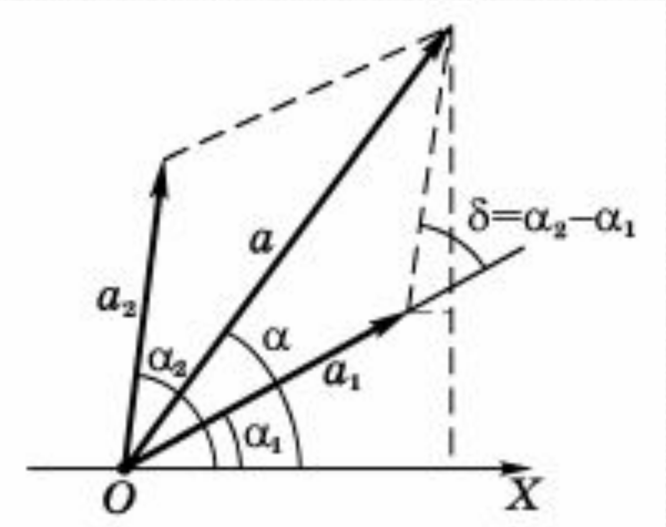
Сложение колебаний одного направления

- Можно изобразить колебания графически с помощью вектора-амплитуды **a**, вращающегося с угловой скоростью ω против часовой стрелки. Если в момент t = 0 вектор **a** образует с осью X угол α, то проекция вектора a на ось X изменяется со временем по гармоническому закону. Такой способ представления колебаний, называемый векторной диаграммой, удобно использовать при сложении колебаний одного направления.
- 1) Случай, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. В этом случае результирующее смещение

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

- Каждое из складываемых колебаний можно представить с помощью векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, сумма проекций которых на ось X равна проекции суммы векторов $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$. Поскольку векторы и вращаются с одной и той же угловой скоростью ω, с той же угловой скоростью вращается и вектор **a**. Значит результирующее колебание является тоже гармоническим и имеет вид

$$x = a\cos(\omega t + \alpha),$$



- где **a** и α находим из рисунка

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}.$$

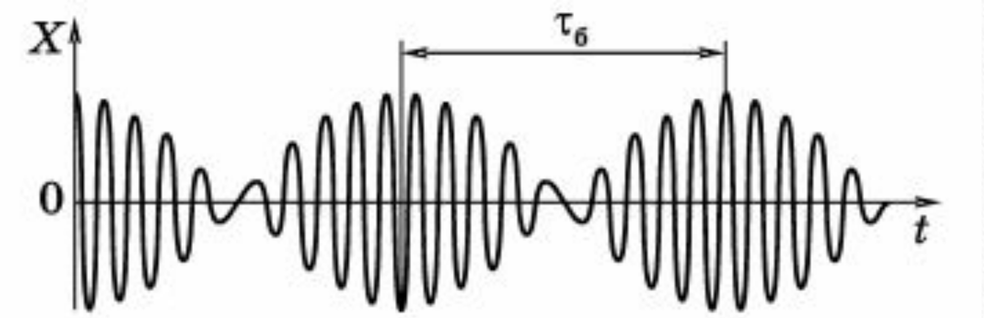
- Разность фаз δ в данном случае не зависит от времени и равна

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

- При сложении синфазных колебаний (δ = 0) **a** максимально, при сложении же «противофазных» колебаний (δ = π) **a** минимально:

$$a_{\text{макс}} = a_1 + a_2, \quad a_{\text{мин}} = |a_1 - a_2|.$$

- 2) Случай, когда $| \omega_1 = \omega_2 | << \omega_1$ и ω_2 . Поскольку теперь векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ вращаются с немного отличающимися угловыми скоростями, модуль результирующего вектора **a** будет медленно изменяться от $a_{макс}$ до $a_{мин}$. Результирующее колебание уже не является гармоническим, однако его все же можно рассматривать как гармоническое, но с медленно и периодически меняющейся амплитудой. Такие колебания называют биениями. Для случая $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ получим график:



- Амплитуда колебаний описывается той же формулой, что в случае 1, но входящая в нее разность фаз зависит от времени:

$$\delta = (\alpha_2 + \omega_2 t) - (\alpha_1 + \omega_1 t) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\omega_2 - \omega_1) t.$$

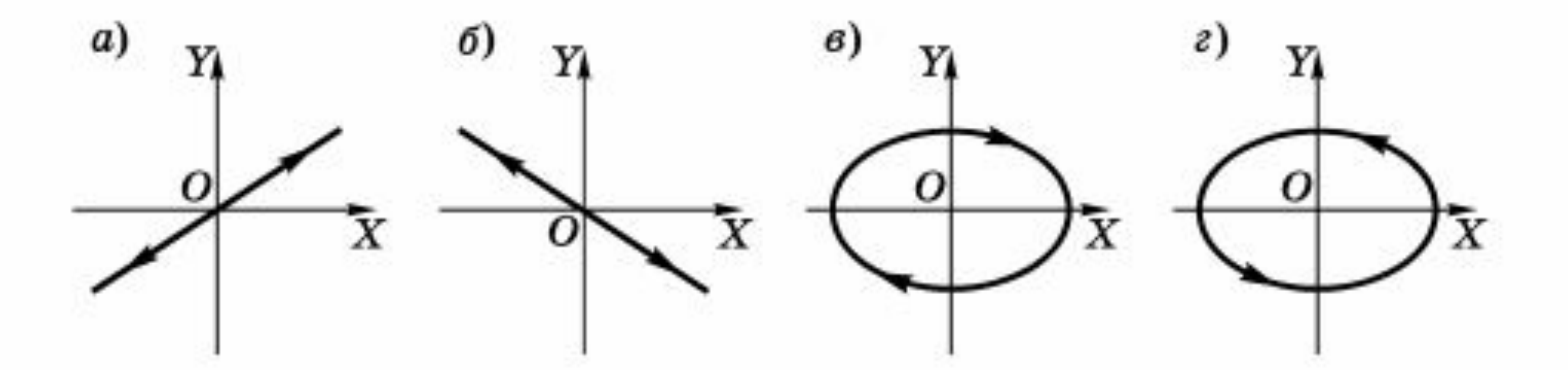
- Промежуток времени между соседними моментами, когда амплитуда **a** максимальна, называют периодом биений $\tau_б$.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- Рассмотрим случай, когда частоты складываемых колебаний одинаковы. Пусть координаты x и y частицы изменяются по закону

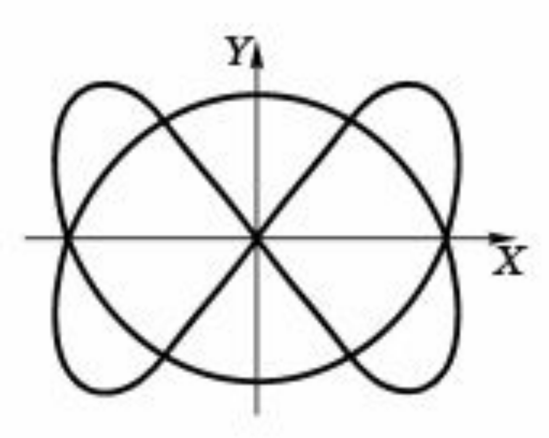
$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\cos(\omega t + \delta). \qquad (5.15)$$

- Траекторией частицы при этом является эллипс, вид которого определяется отношением амплитуд *a* и *b* и разностью фаз δ. Рассмотрим четыре частных случая:
- ***а)*** $\delta = 0$, $y = (b/a)x$ ***б)*** $\delta = \pi$, $y = -(b/a)x$ ***в)*** $\delta = \pi/2$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ***г)*** $\delta = 3\pi/2$ $(-\pi/2)$



Фигуры Лиссажу

- Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы и относятся как целые числа, то траектории результирующего движения имеют более сложные формы. Их называют фигурами Лиссажу. На рисунке – пример для отношения частот y : x = 3 : 2. При сложении взаимно перпендикулярных колебаний полная энергия



$$E = \left(\frac{\varkappa_1 x^2}{2} + \frac{\varkappa_2 y^2}{2}\right) + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E_x + E_y, \quad (5.16)$$

складывается из энергий каждого колебания и равна, согласно (5.13),

$$E = \frac{m}{2}(a^2\omega_x^2 + b^2\omega_y^2). \quad (5.17)$$

Уравнение затухающих колебаний

- В любой реальной колебательной системе есть силы сопротивления (трения), действие которых приводит к уменьшению амплитуды и энергии колебаний. Такие свободные колебания называют затухающими. Будем исходить из основного уравнения динамики, полагая, что на частицу массы *m* действует кроме квазиупругой силы ($-\varkappa x$) сила сопротивления, пропорциональная скорости частицы, $F_x = -r\dot{x}$, где *r* − коэффициент сопротивления. Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -\varkappa x - r\dot{x}, \qquad (5.18)$$

- или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (5.19)$$

- где $2\beta = r/m$, $\omega^2{}_0 = \varkappa/m$. ω_0 - это частота свободных колебаний без трения. Частоту ω_0 называют собственной частотой осциллятора, а β - коэффициентом затухания. Уравнение (5.19) при условии $\beta < \omega_0$ описывает затухающие колебания. Его решение имеет вид

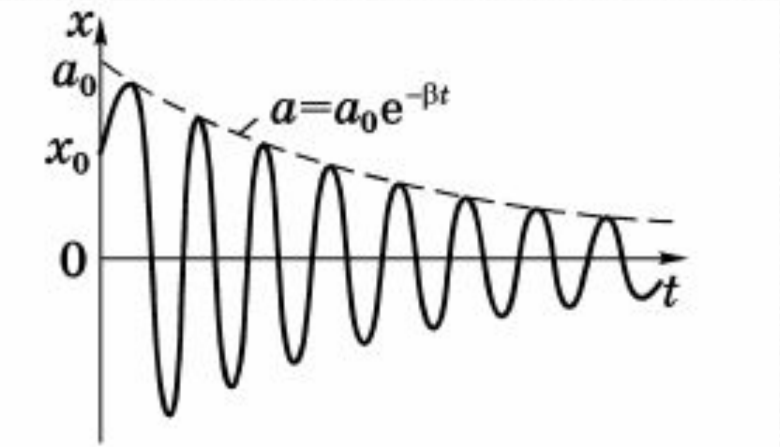
- $$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha),$$ (5.20)
- где a_0 и α - постоянные, определяемые начальными условиями $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, ω' - частота затухающих колебаний:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$ (5.21)

- По графику видно, что эта функция не периодическая. Тем не менее величину T = 2π/ ω' принято называть периодом затухающих колебаний:

$$T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$ (5.22)

- Множитель перед косинусом в (5.20) называют амплитудой затухающих колебаний



Характеристики затухания

- Кроме коэффициента β затухание характеризуют и другими величинами. 1. Время релаксации τ - это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз. Из выражения $a = a_0 e^{-\beta t}$ видно, что

$$\tau = 1/\beta. \qquad (5.23)$$

- 2. Логарифмический декремент затухания. Его определяют как

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T, \qquad (5.24)$$

- где T - период затухающих колебаний. Из предыдущих двух формул следует, что

$$\lambda = 1/N_e \qquad (5.25)$$

- N_e - число колебаний за время τ, в течение которого амплитуда уменьшится в *e* раз.
- 3. Добротность осциллятора. По определению,

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e. \qquad (5.26)$$

Уравнение вынужденных колебаний

- Чтобы возбудить в системе незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные силами сопротивления (трения). Это можно осуществить, воздействуя на систему переменной внешней силой F, изменяющейся в простейшем случае по гармоническому закону $F_x = F_m \cos\omega t$. Возникающие при этом колебания и называют вынужденными. Теперь на колеблющуюся частицу будут действовать одновременно три силы: квазиупругая ($-\varkappa x$), сила сопротивления ($-r\dot{x}$) и внешняя, вынуждающая (F_x). Согласно основному уравнению динамики,

$$m\ddot{x} = -\varkappa x - r\dot{x} + F_m \cos\omega t,$$

- (5.27)

- или в более удобной форме

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos\omega t,$$

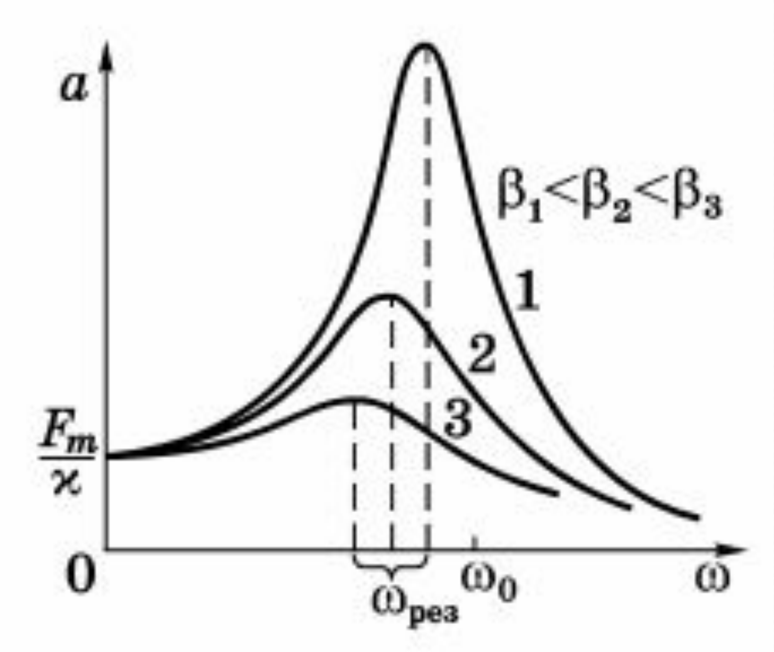
- (5.28)

- где

$$2\beta = r/m,\ \ \omega_0^2 = \varkappa/m,\ \ f_m = F_m/m.$$

Резонанс

- Рассмотрим графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы $a(\omega)$ для трех коэффициентов затухания. Видно, что $a(\omega)$ имеет максимум при частоте, которую легко найти из условия $da/d\omega = 0$. Эту частоту называют резонансной, а существование максимума амплитуды a - явлением резонанса.



$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \qquad (5.29)$$

Соответствующие графики принято называть резонансными кривыми. Выражение для амплитуды при резонансе имеет вид

$$a_{макс} = \frac{f_m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (5.30)$$

Чем меньше затухание системы, тем более ярко выражен резонанс.