

Колебания

Гармонические колебания. Затухающие и вынужденные
колебания

Энергия гармонического осциллятора

- Свободные колебания любого осциллятора в отсутствие трения будут гармоническими, если действующая в нем сила (или момент силы) является квазиупругой, т. е. силой, направленной к положению равновесия и зависящей от смещения из этого положения линейно.
- Рассмотрим материальную точку массы m , колеблющейся под действием квазиупругой силы $F_x = -\kappa x$. Потенциальная и кинетическая энергии частицы имеют в данном случае такой вид:

$$U = \kappa x^2 / 2 = (\kappa a^2 / 2) \cos^2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$K = m \dot{x}^2 / 2 = (m a^2 \omega_0^2 / 2) \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad \bullet (5.12)$$

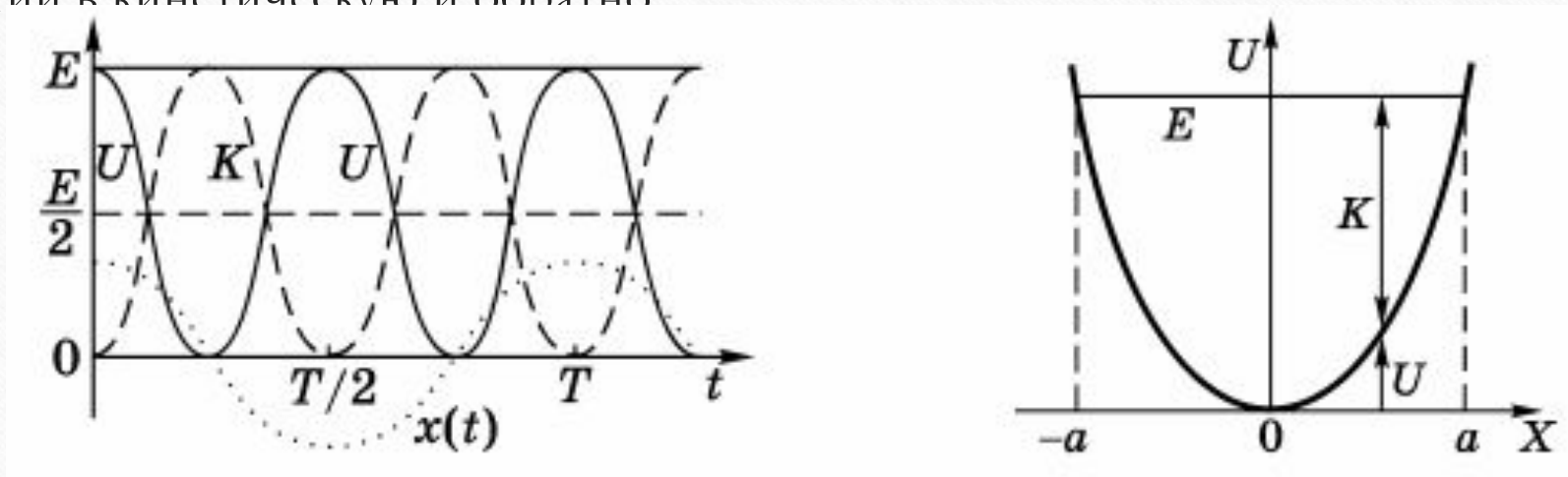
- Из этих соотношений видно, что значения U и K сдвинуты друг относительно друга по фазе на $\pi/2$: когда U максимальна, K минимальна, и наоборот. При этом полная энергия сохраняется:

$$E = U + K = \chi a^2 / 2 = m a^2 \omega_0^2 / 2, \quad \bullet (5.13)$$

- Принимая во внимание (5.13), формулы (5.12) можно переписать так:

$$U = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad K = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad \bullet (5.14)$$

- Из графиков видно, что в процессе колебаний происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно



Сложение колебаний одного направления

- Можно изобразить колебания графически с помощью **вектора-амплитуды** \mathbf{a} , вращающегося с угловой скоростью ω против часовой стрелки. Если в момент $t = 0$ вектор \mathbf{a} образует с осью X угол α , то проекция вектора \mathbf{a} на ось X изменяется со временем по гармоническому закону. Такой способ представления колебаний, называемый **векторной диаграммой**, удобно использовать при сложении колебаний одного направления.

- 1) Случай, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. В этом случае результирующее смещение

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

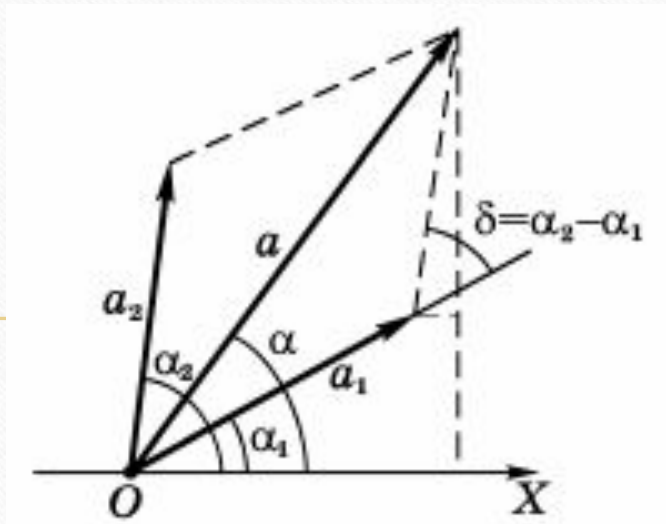
- Каждое из складываемых колебаний можно представить с помощью векторов \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , сумма проекций которых на ось X равна проекции суммы векторов $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$. Поскольку векторы и вращаются с одной и той же угловой скоростью ω , с той же угловой скоростью вращается и вектор \mathbf{a} . Значит результирующее колебание является тоже гармоническим и имеет вид

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

- где a и α находим из рисунка

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}.$$



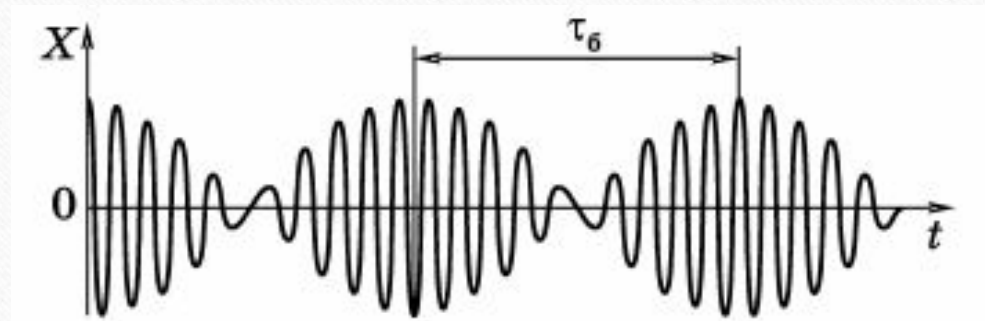
- Разность фаз δ в данном случае не зависит от времени и равна

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

- При сложении синфазных колебаний ($\delta = 0$) a максимально, при сложении же «противофазных» колебаний ($\delta = \pi$) a минимально:

$$a_{\text{макс}} = a_1 + a_2, \quad a_{\text{мин}} = |a_1 - a_2|.$$

- 2) Случай, когда $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ и ω_2 . Поскольку теперь векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 вращаются с немного отличающимися угловыми скоростями, модуль результирующего вектора \mathbf{a} будет медленно изменяться от $a_{\text{макс}}$ до $a_{\text{мин}}$. Результирующее колебание уже не является гармоническим, однако его все же можно рассматривать как гармоническое, но с медленно и периодически меняющейся амплитудой. Такие колебания называют **биениями**. Для случая $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ получим график:



- Амплитуда колебаний описывается той же формулой, что в случае 1, но входящая в нее разность фаз зависит от времени:

$$\delta = (\alpha_2 + \omega_2 t) - (\alpha_1 + \omega_1 t) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\omega_2 - \omega_1)t.$$

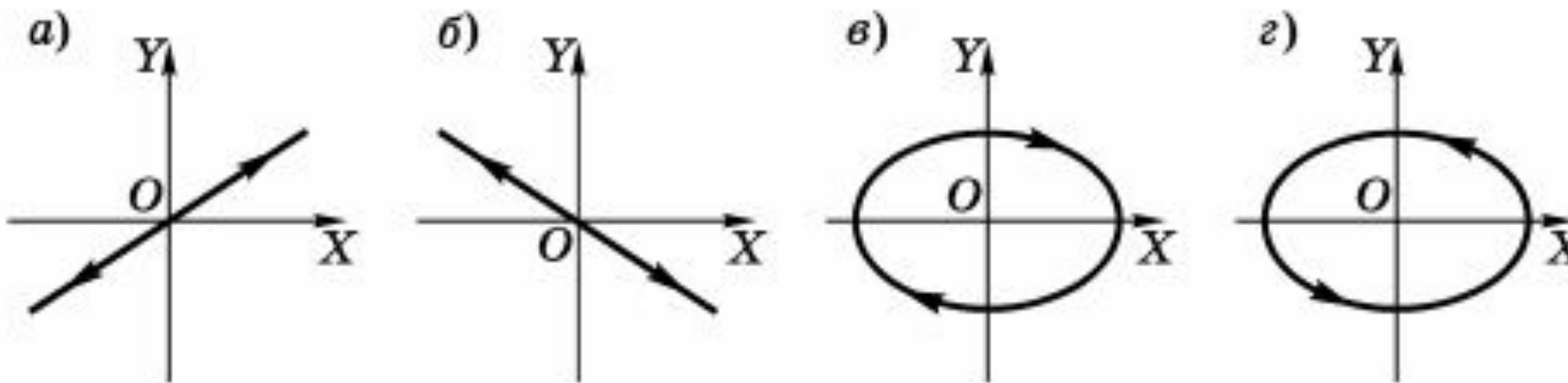
- Промежуток времени между соседними моментами, когда амплитуда \mathbf{a} максимальна, называют **периодом биений** τ_b .

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- Рассмотрим случай, когда частоты складываемых колебаний одинаковы. Пусть координаты x и y частицы изменяются по закону

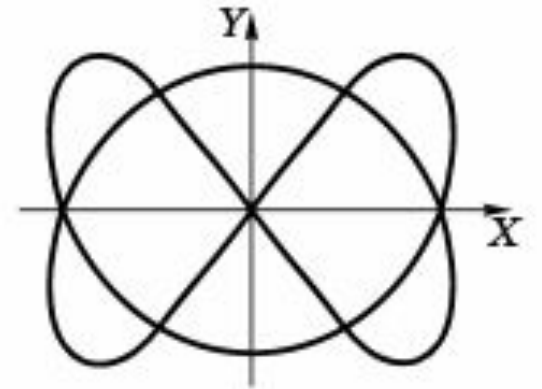
$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos(\omega t + \delta). \quad (5.15)$$

- Траекторией частицы при этом является эллипс, вид которого определяется отношением амплитуд a и b и разностью фаз δ . Рассмотрим четыре частных случая:
- a)** $\delta = 0, y = (b/a)x$ **б)** $\delta = \pi, y = -(b/a)x$ **в)** $\delta = \pi/2, x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ **г)** $\delta = 3\pi/2 (-\pi/2)$



Фигуры Лиссажу

- Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы и относятся как целые числа, то траектории результирующего движения имеют более сложные формы. Их называют **фигурами Лиссажу**. На рисунке – пример для отношения частот $y : x = 3 : 2$. При сложении взаимно перпендикулярных колебаний полная энергия



$$E = \left(\frac{\kappa_1 x^2}{2} + \frac{\kappa_2 y^2}{2} \right) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E_x + E_y, \quad (5.16)$$

складывается из энергий каждого колебания и равна, согласно (5.13),

$$E = \frac{m}{2} (a^2 \omega_x^2 + b^2 \omega_y^2). \quad (5.17)$$

Уравнение затухающих колебаний

- В любой реальной колебательной системе есть **силы сопротивления** (трения), действие которых приводит к уменьшению амплитуды и энергии колебаний. Такие свободные колебания называют **затухающими**. Будем исходить из основного уравнения динамики, полагая, что на частицу массы m действует кроме квазиупругой силы $(-\kappa x)$ сила сопротивления, пропорциональная скорости частицы, $F_x = -r\dot{x}$, где r – коэффициент сопротивления. Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -\kappa x - r\dot{x}, \quad \bullet \quad (5.18)$$

- или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \bullet \quad (5.19)$$

- где $2\beta = r/m$, $\omega_0^2 = \kappa/m$. ω_0 – это частота свободных колебаний без трения. Частоту ω_0 называют **собственной частотой** осциллятора, а β – **коэффициентом затухания**. Уравнение (5.19) при условии $\beta < \omega_0$ описывает затухающие колебания. Его решение имеет вид

- $$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha), \quad (5.20)$$

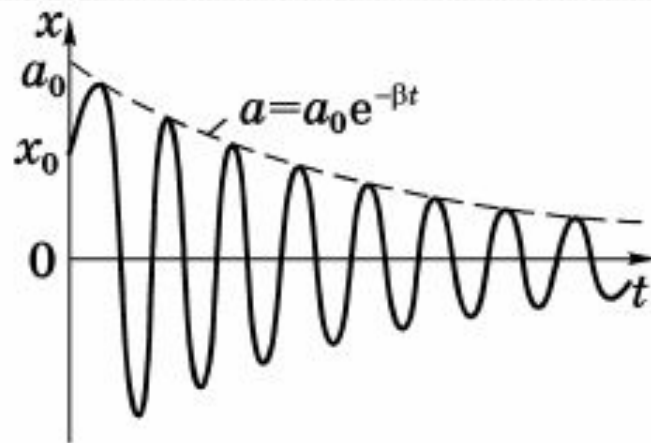
- где a_0 и α - постоянные, определяемые начальными условиями $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, ω' - **частота** затухающих колебаний:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (5.21)$$

- По графику видно, что эта функция не периодическая. Тем не менее величину $T = 2\pi / \omega'$ принято называть **периодом** затухающих колебаний:

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (5.22)$$

- Множитель перед косинусом в (5.20) называют **амплитудой** затухающих колебаний



Характеристики затухания

- Кроме коэффициента β затухание характеризуют и другими величинами. 1. **Время релаксации** τ - это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Из выражения $a = a_0 e^{-\beta t}$ видно, что

$$\tau = 1/\beta. \quad \bullet \quad (5.23)$$

- 2. **Логарифмический декремент затухания**. Его определяют как

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T, \quad \bullet \quad (5.24)$$

- где T - период затухающих колебаний. Из предыдущих двух формул следует, что

$$\lambda = 1/N_e \quad \bullet \quad (5.25)$$

- N_e - число колебаний за время τ , в течение которого амплитуда уменьшится в e раз.

- 3. **Добротность осциллятора**. По определению,

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e. \quad \bullet \quad (5.26)$$

Уравнение вынужденных колебаний

- Чтобы возбудить в системе незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные силами сопротивления (трения). Это можно — осуществить, воздействуя на систему переменной внешней силой F , изменяющейся в простейшем случае по гармоническому закону $F_x = F_m \cos \omega t$. Возникающие при этом колебания и называют **вынужденными**. Теперь на колеблющуюся частицу будут действовать одновременно три силы: квазиупругая ($-\kappa x$), сила сопротивления ($-r\dot{x}$) и внешняя, вынуждающая (F_x). Согласно основному уравнению динамики,

$$m\ddot{x} = -\kappa x - r\dot{x} + F_m \cos \omega t, \quad \bullet (5.27)$$

- или в более удобной форме

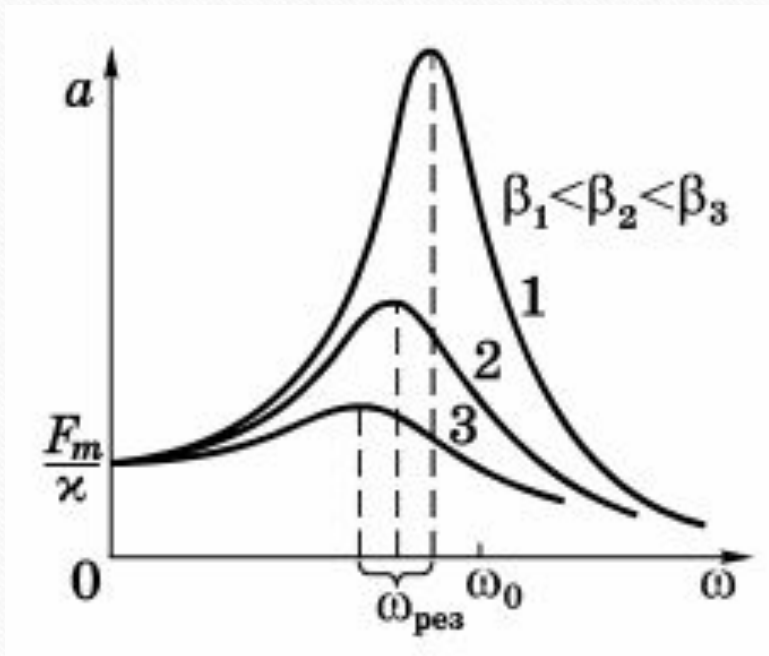
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t, \quad \bullet (5.28)$$

- где

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = \kappa/m, \quad f_m = F_m/m.$$

Резонанс

- Рассмотрим графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы $a(\omega)$ для трех коэффициентов затухания. Видно, что $a(\omega)$ имеет максимум при частоте, которую легко найти из условия $da/d\omega = 0$. Эту частоту называют **резонансной**, а существование максимума амплитуды a - явлением резонанса.



$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (5.29)$$

Соответствующие графики принято называть **резонансными кривыми**. Выражение для амплитуды при резонансе имеет вид

$$a_{\text{макс}} = \frac{f_m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (5.30)$$

Чем меньше затухание системы, тем более ярко выражен резонанс.