ВоГУ

Лекция 33 (15)

Электромагнитные колебания
Метод векторных диаграмм
Метод комплексных амплитуд
Переменный ток

Кузина Л.А.,

к.ф.-м.н.,

доцент

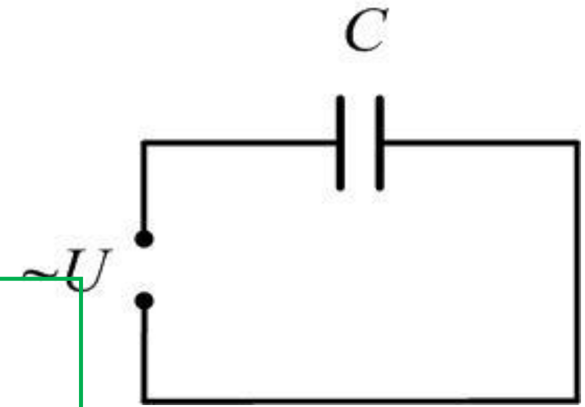
2017 г.

План

1. Метод векторных диаграмм. Метод комплексных амплитуд
   1.1. Ёмкость в цепи переменного тока
   1.2. Индуктивность в цепи переменного тока
   1. 3. Активное сопротивление в цепи переменного тока
   1. 4. Последовательная цепь переменного тока. Резонанс напряжений
   1. 5. Параллельная цепь переменного тока. Резонанс токов
2. Переменный ток, характеристики, получение. Мощность переменного тока
3. Элементы спектрального анализа
4. Модуляция

Метод векторных диаграмм

Ёмкость в цепи переменного тока



$$\begin{cases} I = \dfrac{dq}{dt} \\ I = I_0 \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$$

$$q = q_0 \sin(\omega \cdot t)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$I_0 = q_0\omega$$

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\sin(\omega \cdot t) = \frac{q_0}{C}\cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

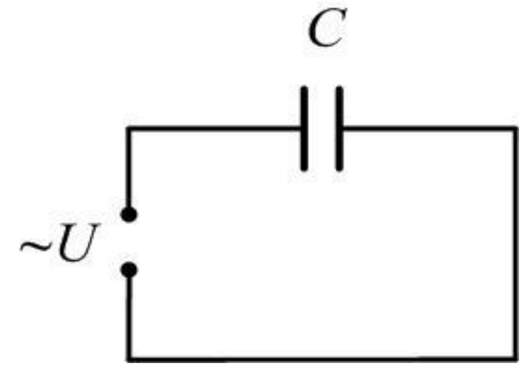
$$U_c = U_{C0}\cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_{C0} = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega C}$$

Емкость в цепи переменного тока

$$\boxed{U_{C0} = \frac{I_0}{\omega C} = I_0 R_C} \Rightarrow \boxed{R_C = \frac{1}{\omega C}}$$

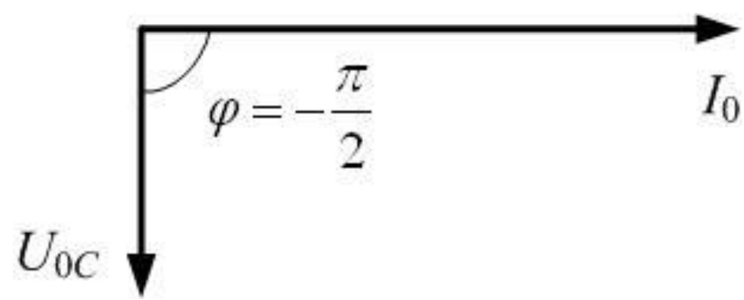
– ёмкостное сопротивление



$$\left.\begin{aligned} I &= I_0 \cos(\omega \cdot t) \\ U_c &= U_{C0} \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right]$$

напряжение отстаёт по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$

Векторная диаграмма:

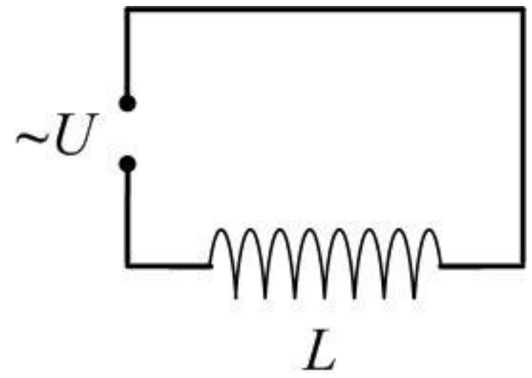


Метод векторных диаграмм

Индуктивность в цепи переменного тока

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t)$$

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt} = L \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



Второе правило Кирхгофа:

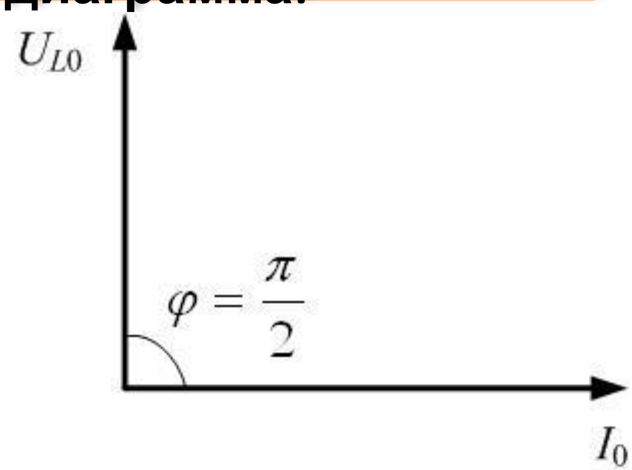
$$\boxed{\mathcal{E}_{si} + U_L = 0}$$

$$\boxed{U_L = -\mathcal{E}_{si} = -L\omega \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

$$\boxed{U_L = U_{L0} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

напряжение опережает ток по фазе на $\frac{\pi}{2}$

Векторная диаграмма:



$$\boxed{U_{L0} = L\omega \cdot I_0 = R_L \cdot I_0}$$

$$\boxed{R_L = L\omega}$$ **– индуктивное сопротивление**

Активное сопротивление в цепи переменного тока

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t)$$

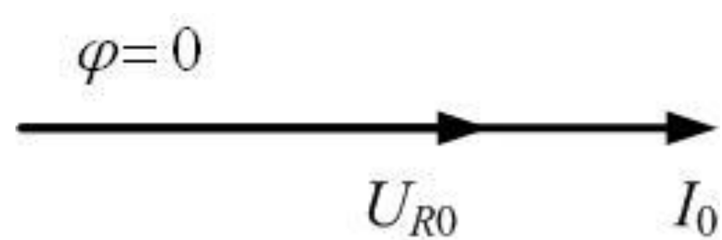
Закон Ома:

$$U_R = R \cdot I = R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = U_{R0} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

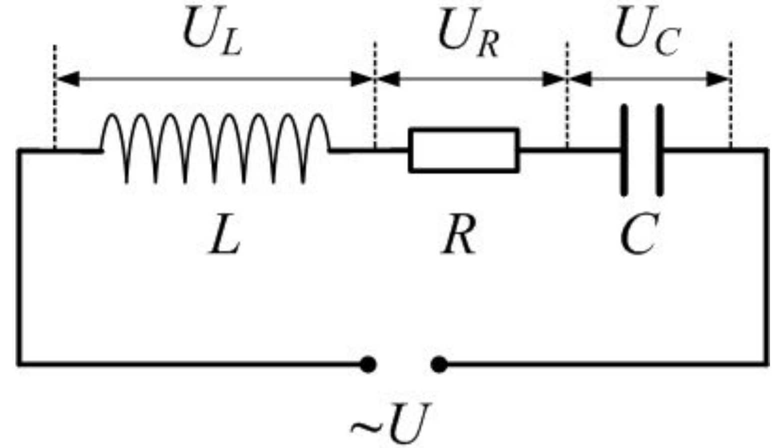
$$\boxed{U_{R0} = R \cdot I_0}$$

Фазы тока и напряжения совпадают

Векторная диаграмма:



Последовательная цепь переменного тока



Напряжения складываются; ток - общий

$$\vec{U}_0 = \vec{U}_{L0} + \vec{U}_{R0} + \vec{U}_{C0}$$

$$\sim U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\begin{cases} U_L = U_{L0} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ U_R = U_{R0} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ U_c = U_{C0} \cos\left(\omega \cdot t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{L0} = L\omega \cdot I_0 = R_L \cdot I_0 \\ U_{R0} = R \cdot I_0 \\ U_{C0} = \dfrac{1}{\omega C} \cdot I_0 = R_C \cdot I_0 \end{cases}$$

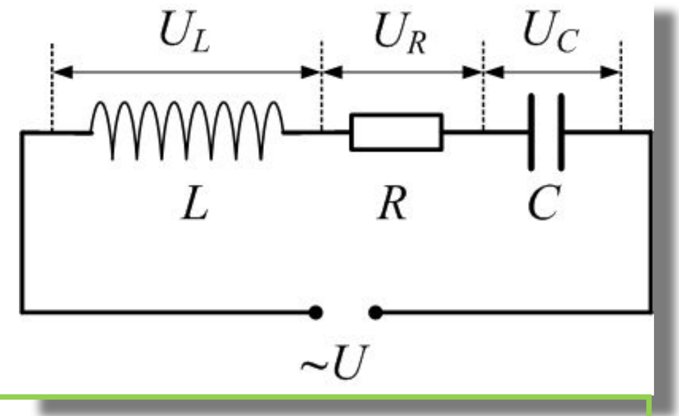
$$\vec{U}_0 = \vec{U}_{L0} + \vec{U}_{R0} + \vec{U}_{C0}$$

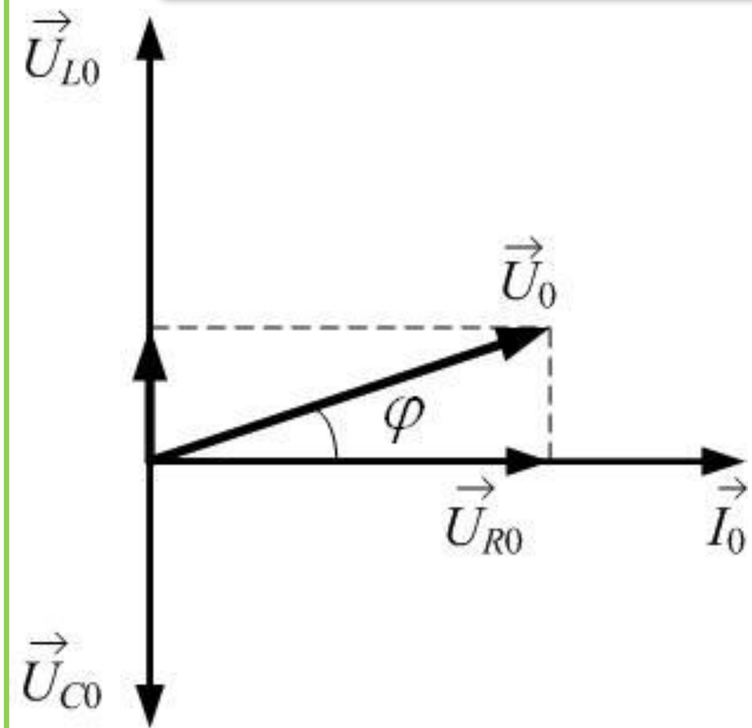
$$U_0^2 = (U_{L0} - U_{C0})^2 + U_{R0}^2$$

$$\begin{cases} U_{L0} = R_L \cdot I_0 \\ U_{R0} = R \cdot I_0 \\ U_{C0} = R_C \cdot I_0 \end{cases}$$

$$U_0^2 = I_0^2\left((R_L - R_C)^2 + R^2\right)$$

$$U_0 = I_0\sqrt{(R_L - R_C)^2 + R^2}$$



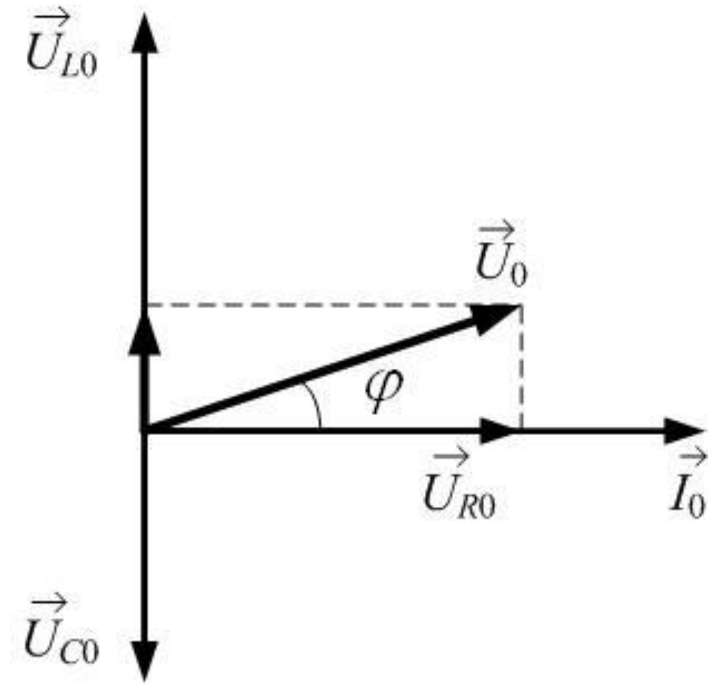


Последовательная цепь переменного тока

$$U_0 = I_0\sqrt{(R_L - R_C)^2 + R^2}$$

$$\begin{cases} R_L = \omega L \\ R_C = \dfrac{1}{\omega C} \end{cases}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

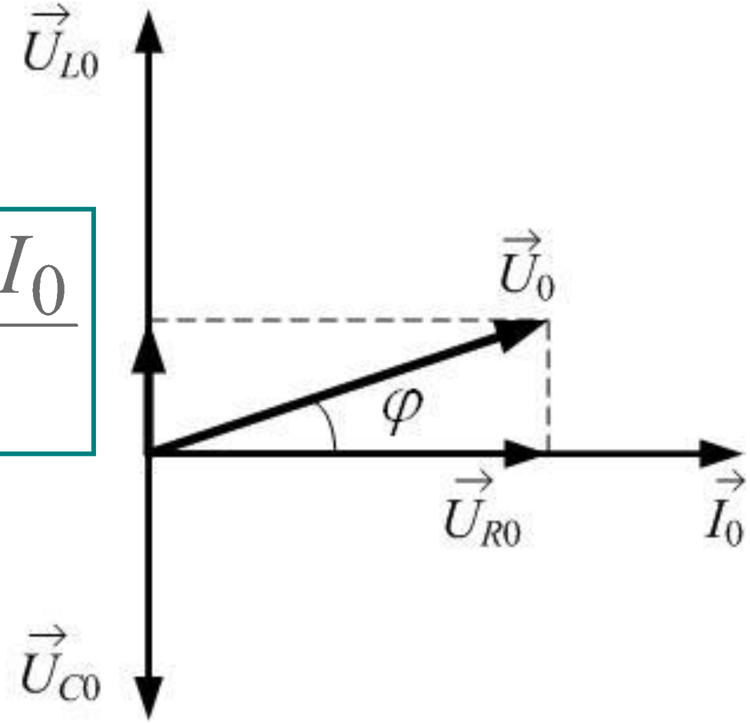


$$I_0 = \frac{U_0}{Z}$$ – закон Ома для последовательной цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$ - полное сопротивление последовательной цепи переменного тока

Угол сдвига фаз между током и напряжением:

$$tg\varphi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{R_L I_0 - R_C I_0}{R I_0}$$



$$tg\varphi = \frac{R_L - R_C}{R}$$

$$\begin{cases} R_L = \omega L \\ R_C = \dfrac{1}{\omega C} \end{cases}$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

Резонанс в последовательной цепи

$$\omega L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$R_L = R_C$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R$$

Ток максимален:

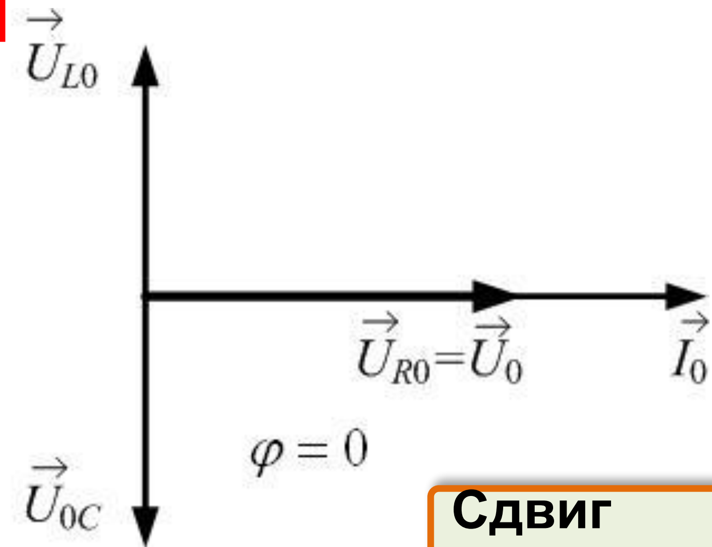
$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R}$$

$$U_{L0} = U_{C0}$$

$$\overset{\triangle}{U}_{L0} = -\overset{\triangle}{U}_{C0}$$

$$\overset{\triangle}{U}_0 = \overset{\triangle}{U}_{L0} + \overset{\triangle}{U}_{R0} + \overset{\triangle}{U}_{C0}$$

$$\overset{\triangle}{U}_0 = \overset{\triangle}{U}_{R0}$$



Это – резонанс напряжений: напряжения в противофазе и компенсируют друг друга

Сдвиг фаз:

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 0$$

Последовательная цепь: метод комплексных амплитуд

Колебательные процессы удобно описывать с помощью комплексных чисел

$$i^2 = -1$$

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\hat{U} = U_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

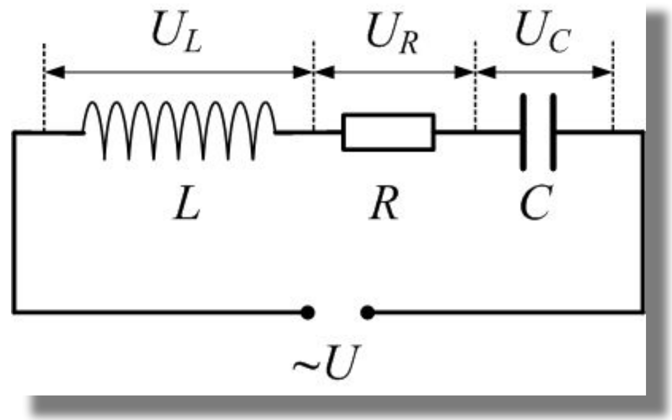
$$\hat{U} = U_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t)} = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + i \cdot U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\mathrm{Re}\,\hat{U} = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{U} = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Дифф. уравнение:

$$\ddot{\hat{q}} + 2\beta\cdot\dot{\hat{q}} + \omega_0^2\cdot\hat{q} = f_0\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$



Обозначения:

$$f_0 = \frac{U_0}{L}$$

$$2\beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Решение ищем в виде:

$$\hat{q} = \hat{A}\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$

$$\hat{q} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Считаем производные:

$$\dot{\hat{q}} = \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\ddot{\hat{q}} = \hat{A} \cdot (i \cdot \omega)^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = -\hat{A} \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Подставляем в дифф. ур.:

$$\ddot{\hat{q}} + 2\beta \cdot \dot{\hat{q}} + \omega_0^2 \cdot \hat{q} = f_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$-\hat{A} \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + 2\beta \cdot \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + \omega_0^2 \cdot \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = f_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Преобразуем:

$$-\hat{A} \cdot \omega^2 + 2\beta \cdot \hat{A} \cdot i \cdot \omega + \omega_0^2 \cdot \hat{A} = f_0$$

$$\hat{A} \cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega\right) = f_0$$

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

Модуль полученной комплексной амплитуды и есть обычная вещественная амплитуда заряда:

$$q_0 = \left|\hat{A}\right|$$

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

$$q_0 = \left|\hat{A}\right| = \frac{\left|f_0\right|}{\left|\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i \cdot 2\beta \cdot \omega\right|} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$q_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Аргумент комплексной амплитуды :

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

$$\hat{A} = \frac{f_0 \cdot \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2\beta \cdot i \cdot \omega\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$arctg\left(\frac{\operatorname{Im}\hat{A}}{\operatorname{Re}\hat{A}}\right)$$

$$arctg\left(\frac{\operatorname{Im}\hat{A}}{\operatorname{Re}\hat{A}}\right) = arctg\left(-\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = -arctg\left(\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$\hat{q} = \hat{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$

$$q_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$arctg\left(\frac{\operatorname{Im}\hat{A}}{\operatorname{Re}\hat{A}}\right) = -arctg\left(\frac{2\beta\cdot\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Полное решение:

$$\hat{q} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot e^{i\cdot\left(\omega\cdot t - arctg\left(\frac{2\beta\cdot\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)}$$

Вещественная часть решения:

$$q = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega\cdot t - arctg\left(\frac{2\beta\cdot\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

Вещественная часть решения:

$$q = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - arctg\left(\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

$$q = q_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi_0\right)$$

Амплитуда заряда:

$$q_0 \equiv q_0(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Фаза:

$$tg\varphi_0 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Сила тока:

$$\hat{I} = \dot{\hat{q}} = \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Напряжение:

$$\hat{U} = U_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Полное сопротивление:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_0 \cdot e^{i\omega \cdot t}}{\hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}} = \frac{U_0}{\hat{A} \cdot i \cdot \omega}$$

Комплексная амплитуда:

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

$$\hat{Z} = \frac{U_0 \cdot \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right) + i \cdot 2\beta \cdot \omega \right)}{f_0 \cdot i \cdot \omega}$$

Полное сопротивление:

$$\hat{Z} = \frac{U_0 \cdot \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i \cdot 2\beta \cdot \omega\right)}{f_0 \cdot i \cdot \omega}$$

$$f_0 = \frac{U_0}{L}$$

$$\hat{Z} = \frac{L \cdot \left(\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + i \cdot \frac{R}{L} \cdot \omega\right)}{i \cdot \omega} = L \cdot \left(\frac{i}{\omega} \cdot \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right) + \frac{R}{L}\right)$$

$$\hat{Z} = i \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + R$$

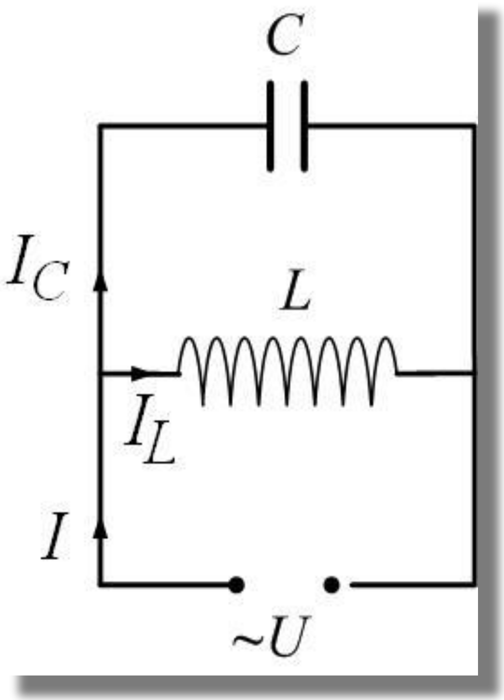
Модуль полного сопротивления:

$$Z = \left|\hat{Z}\right| = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

Метод векторных диаграмм для параллельной цепи переменного тока

Пусть
***R*=0**

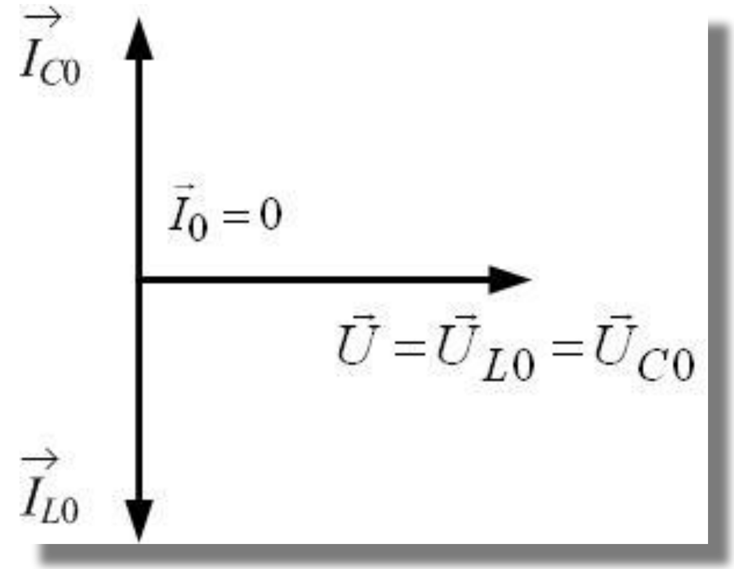
$$\vec{I}_0 = \vec{I}_{L0} + \vec{I}_{C0}$$



При резонансе:

$$\omega L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$R_L = R_C$$



Токи:

$$I_{L0} = \frac{U_{L0}}{R_L} = \frac{U_0}{R_L}$$

$$I_{C0} = \frac{U_{C0}}{R_C} = \frac{U_0}{R_C}$$

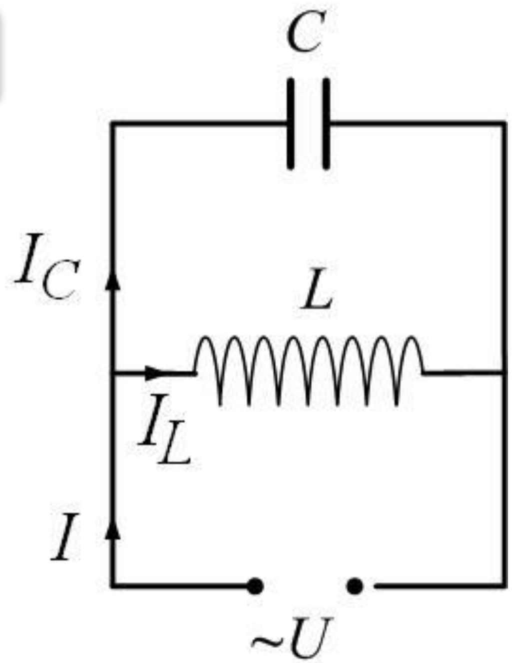
$$I_{L0} = I_{C0}$$

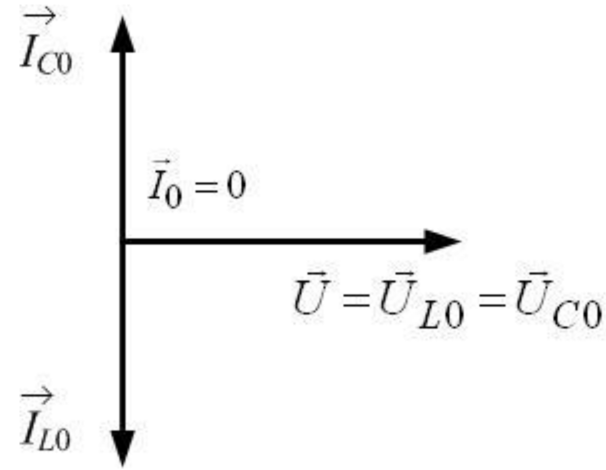
Резонанс токов

$$\vec{I}_0 = \vec{I}_{L0} + \vec{I}_{C0}$$

$$R_L = R_C$$

$$I_{L0} = I_{C0}$$





Токи в обеих ветвях одинаковы по величине, но колеблются в противофазе.
Они компенсируют друг друга, и общий ток равен нулю:

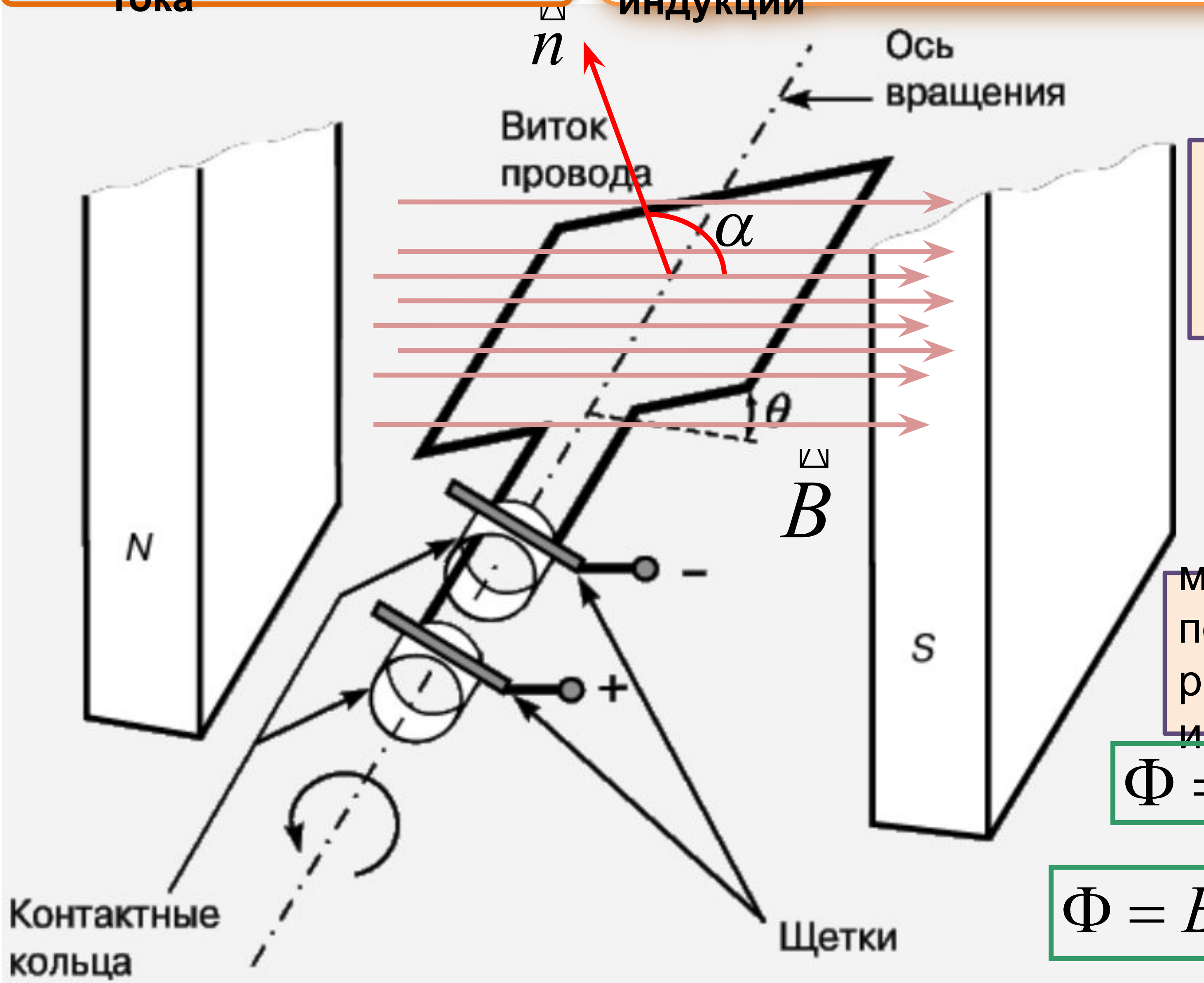
$$\vec{I}_0 = \vec{I}_{L0} + \vec{I}_{C0} = 0$$

Это - <u>резонанс токов</u>

Переменный ток

Генератор переменного тока

Принцип действия генератора переменного тока основан на явлении электромагнитной индукции



Рамка вращается в постоянном магнитном поле

$$\alpha = \omega \cdot t$$

магнитный поток через рамку изменяется:

$$\Phi = BS\cos\alpha$$

$$\Phi = BS\cos(\omega \cdot t)$$

Генератор переменного тока

$$\Phi = BS\cos(\omega \cdot t)$$

ЭДС индукции по закону Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt}\left(BS\cos(\omega \cdot t)\right) = BS\omega \sin(\omega \cdot t)$$

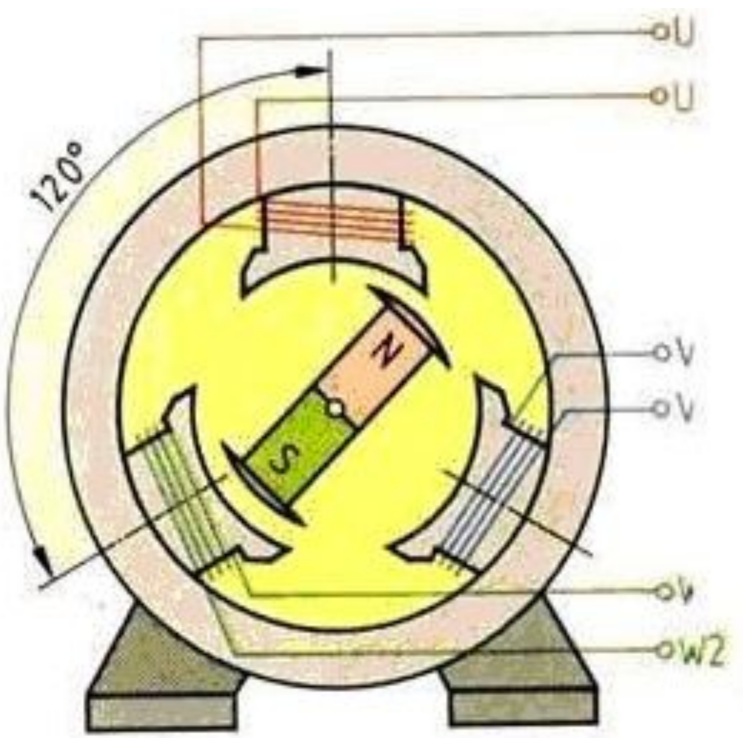
$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin(\omega \cdot t)$$

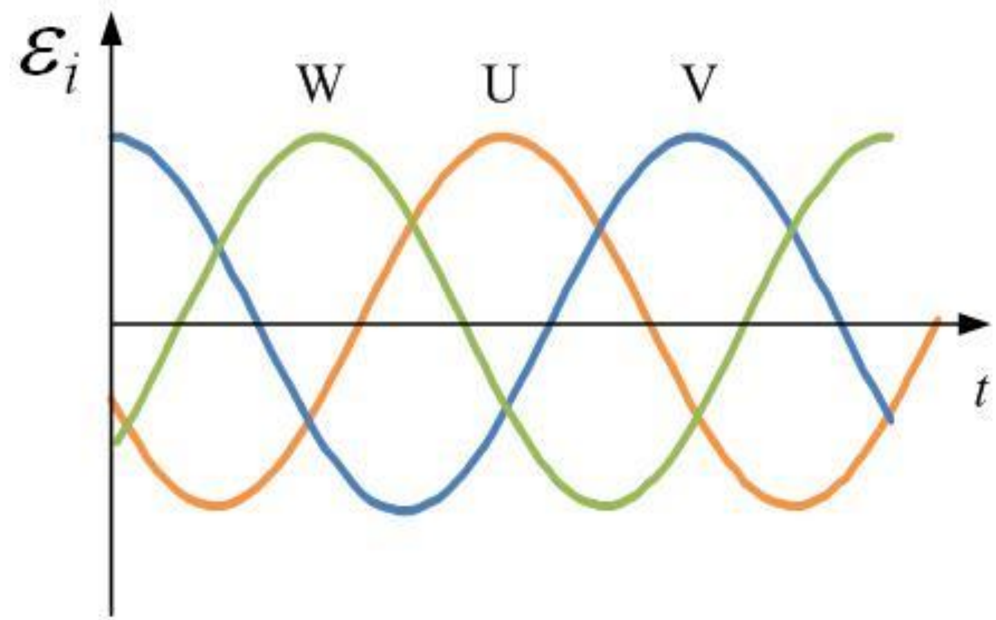
Максимальное значение ЭДС

Обычно витков в рамке не один, а много (N); тогда

$$\varepsilon_0 = NBS\omega$$

Генератор переменного тока





В промышленных генераторах вращается электромагнит, в то время как обмотки, в которых наводится ЭДС, остаются неподвижными. Если использовать, например, три симметрично расположенных обмотки, то в каждой из них фаза ЭДС индукции будет сдвинута на 120^0; это уже трёхфазный ток

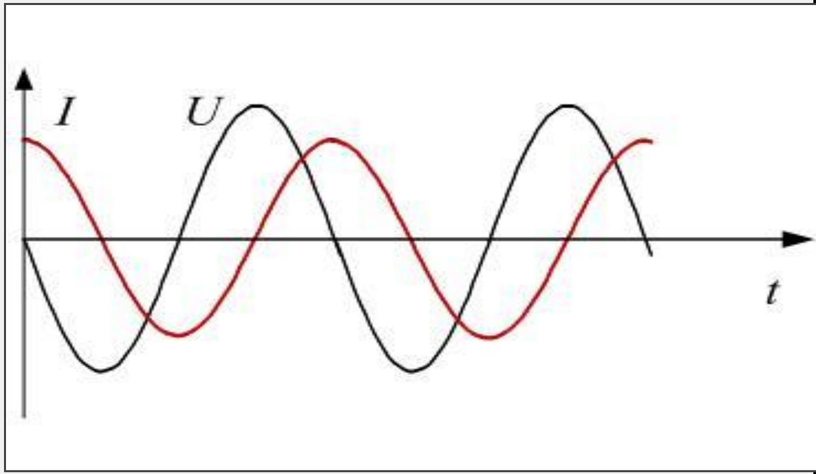
Мощность переменного тока

Сдвиг фаз между током и напряжением в общем случае равен φ

Мгновенные значения тока и напряжения:

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



Мгновенная мощность: $P_м = U \cdot I$

$$P_м = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$P_м = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}(\cos(2\omega \cdot t + \varphi) + \cos\varphi)$$

Мощность переменного тока

$$P_м = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega \cdot t + \varphi) + \cos\varphi\right)$$

Мгновенная мощность изменяется во времени с частотой, в два раза большей частоты тока
Мгновенные значения мощности неважны; важно знать среднюю мощность:

$$P \equiv \langle P_м \rangle = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}\left(\underbrace{\langle \cos(2\omega \cdot t + \varphi) \rangle}_{=0} + \langle \cos\varphi \rangle\right)$$

$$P = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}\cos\varphi$$

Эффективные значения тока и напряжения

Определения:

$$U_э = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_э = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$P = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} \cos\varphi$$

$$P = U_э \cdot I_э \cdot \cos\varphi$$

Смысл таких определений:

Эффективное значение переменного тока (или напряжения) численно равно такому постоянному току (или напряжению), который даёт ту же мощность, что и данный переменный ток

При отсутствии сдвига фаз (φ=0):

$$P = U_э \cdot I_э = I_э^2 R = \frac{U_э^2}{R}$$

Понятие о спектральном разложении. Ряд Фурье

Теорема Фурье:

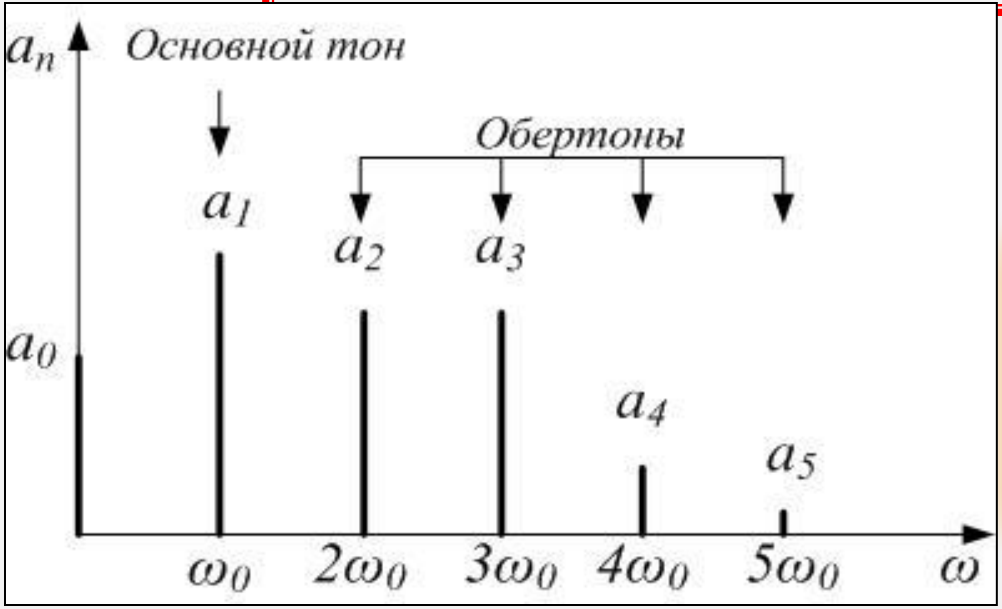
любую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье

(разложить по гармоническим составляющим)

$$f(t) = f(t+T)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right)$$



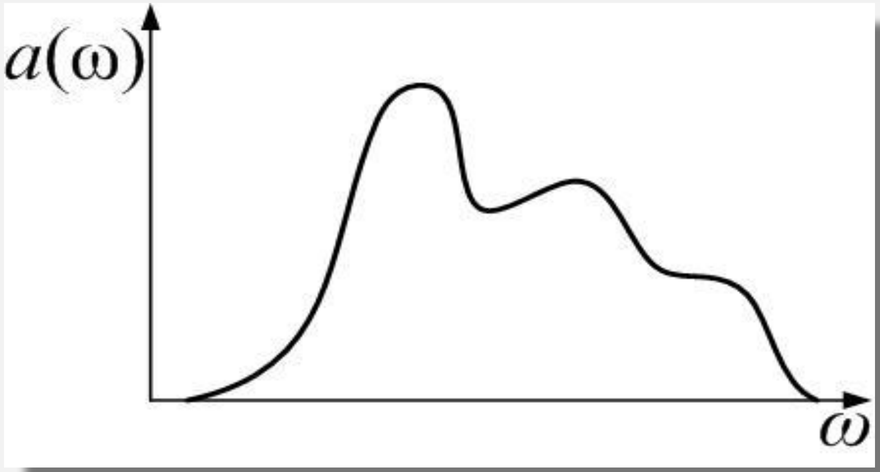
Для чётной функции:

$$f(t) = f(-t) \quad \Rightarrow \quad b_n = 0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t)\right)$$

Интеграл Фурье

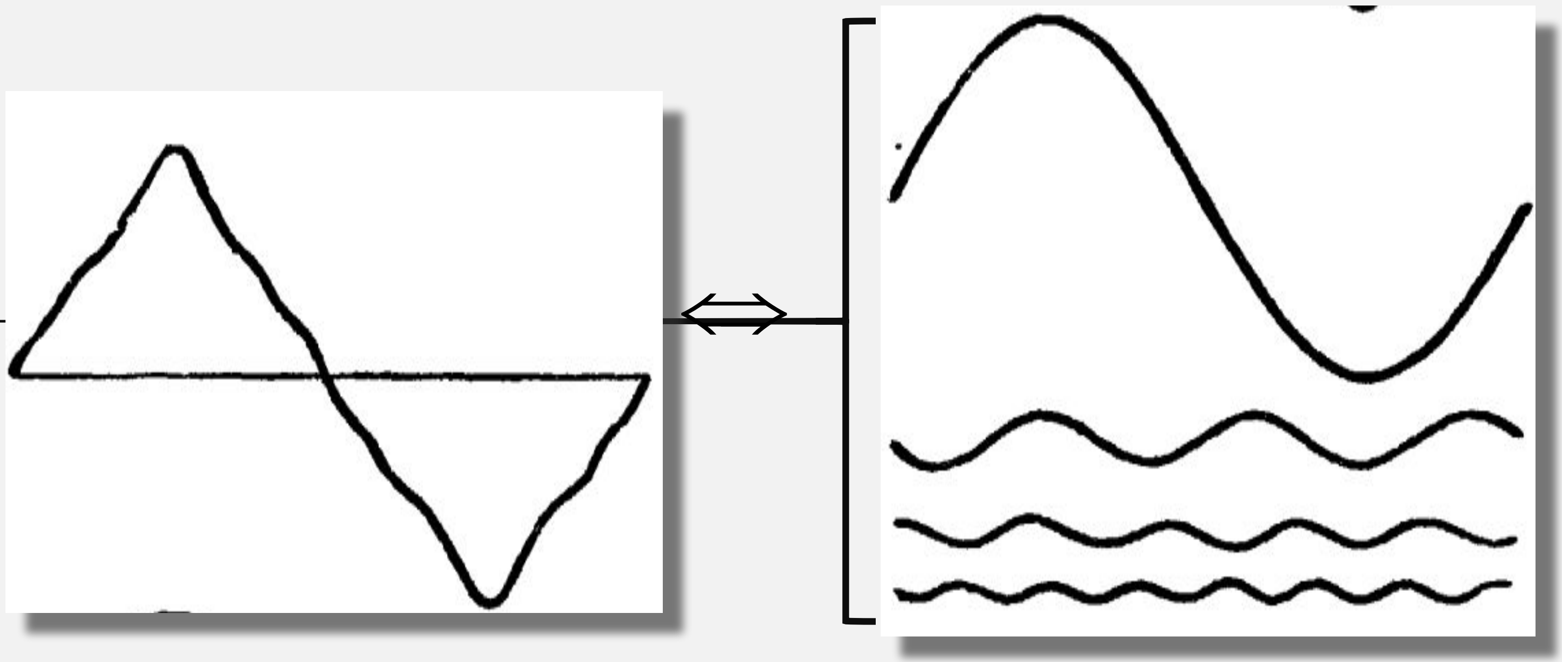
Непериодическую функцию тоже можно разложить по гармоническим составляющим, но это она будет **иметь непрерывный спектр:**



Ряд Фурье переходит в интеграл Фурье

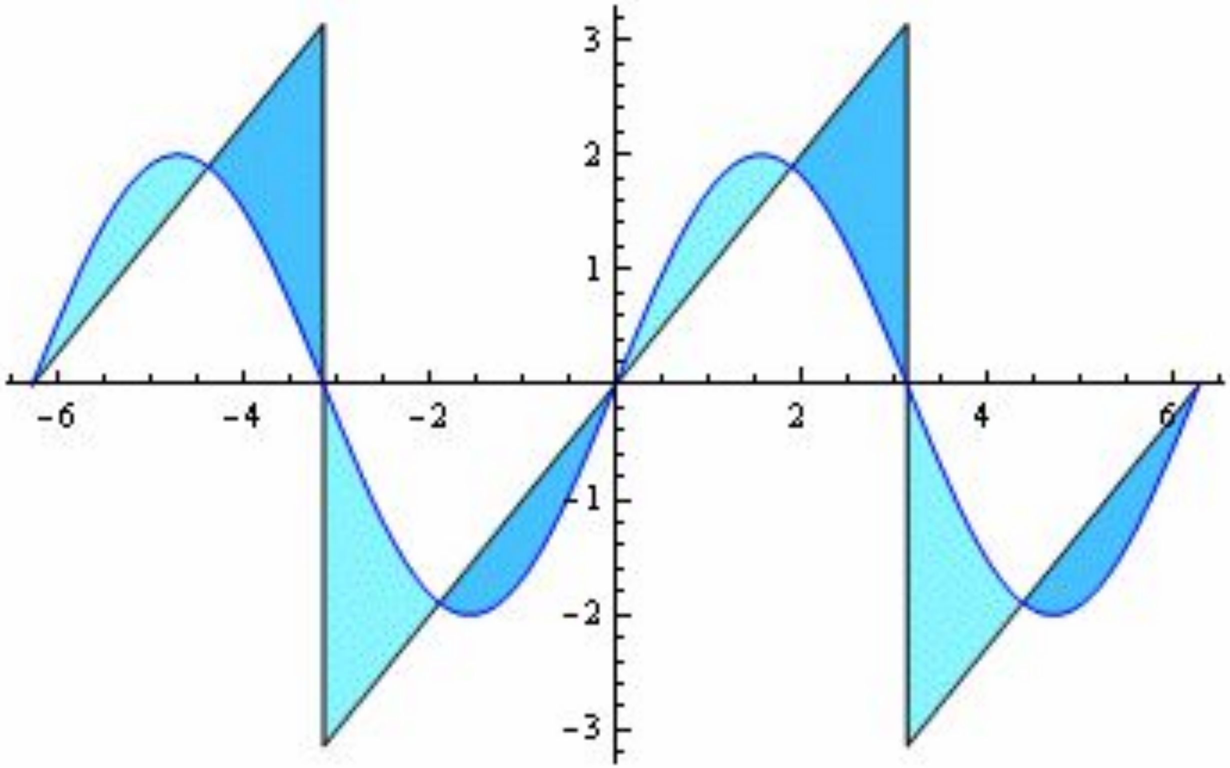
Примеры:

сложение 4-х синусоид даёт почти треугольный импульс

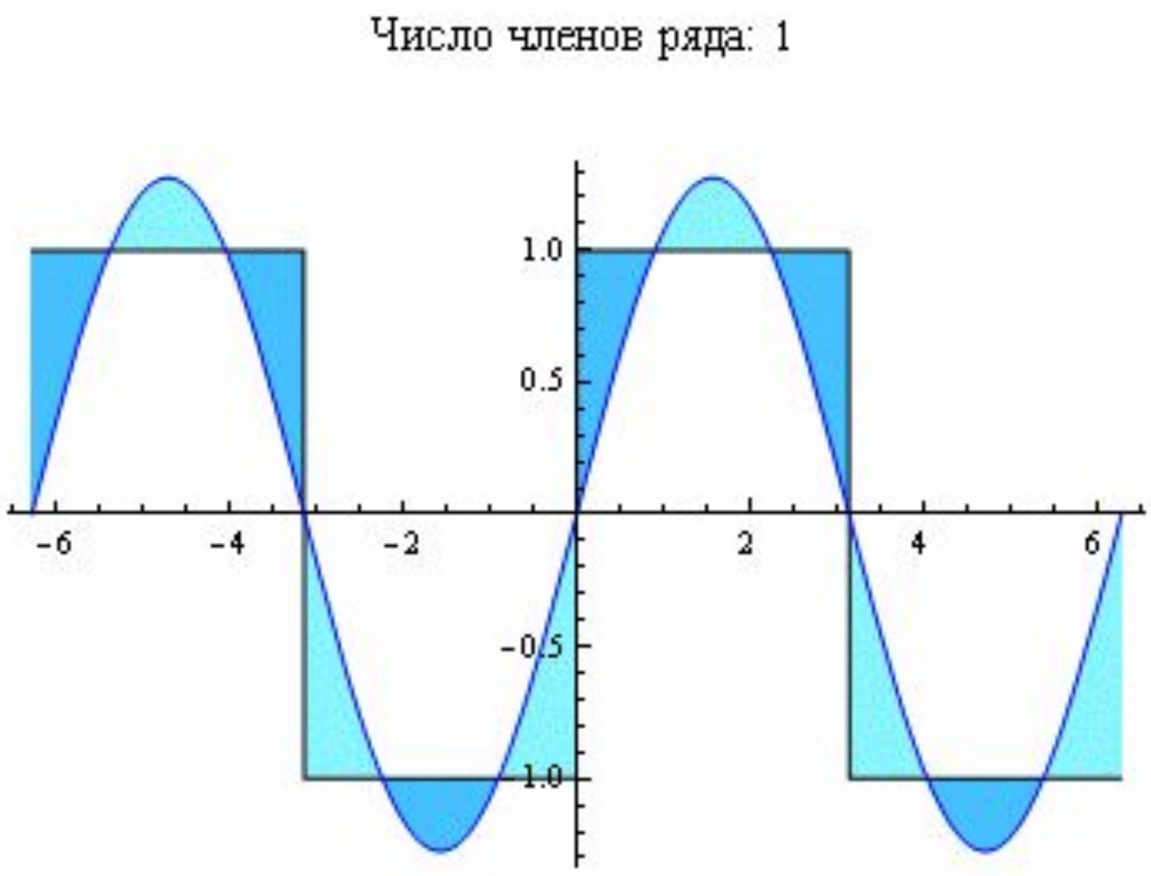


Примеры: «пила» раскладывается на гармонические составляющие тем точнее, чем больше членов ряда

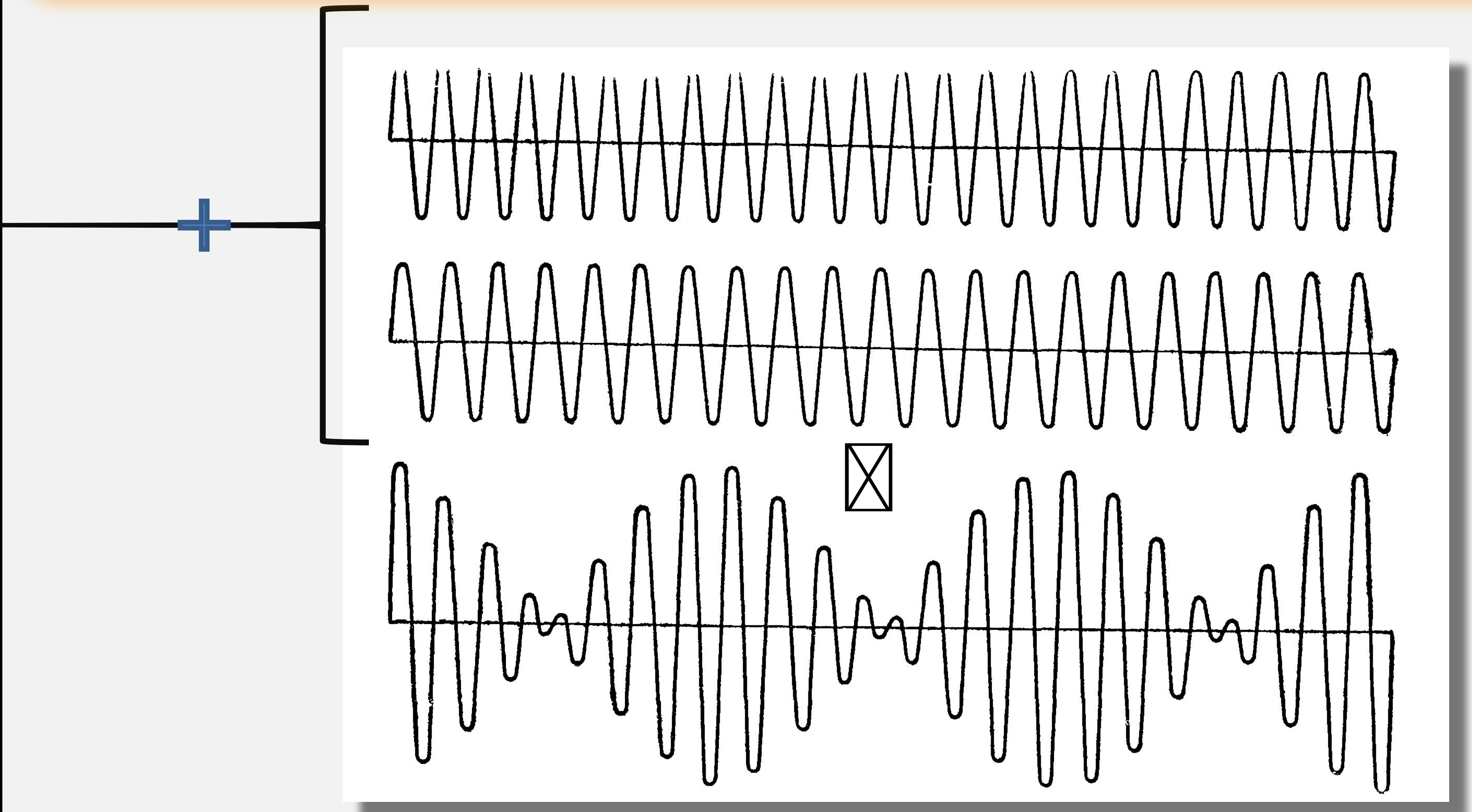
Число членов ряда: 1



Примеры: прямоугольный импульс



Сложение двух колебаний, близких по частоте, даёт биения



Модуляция

Для передачи информации на большие расстояния используют высокочастотные колебания.

В общем случае высокочастотное колебание имеет вид

$$a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где ω_o– несущая частота.

Если ω_o=const, φ_o=const, A(t)=A_0=*const,* то колебание является гармоническим.

Оно не содержит никакой информации.

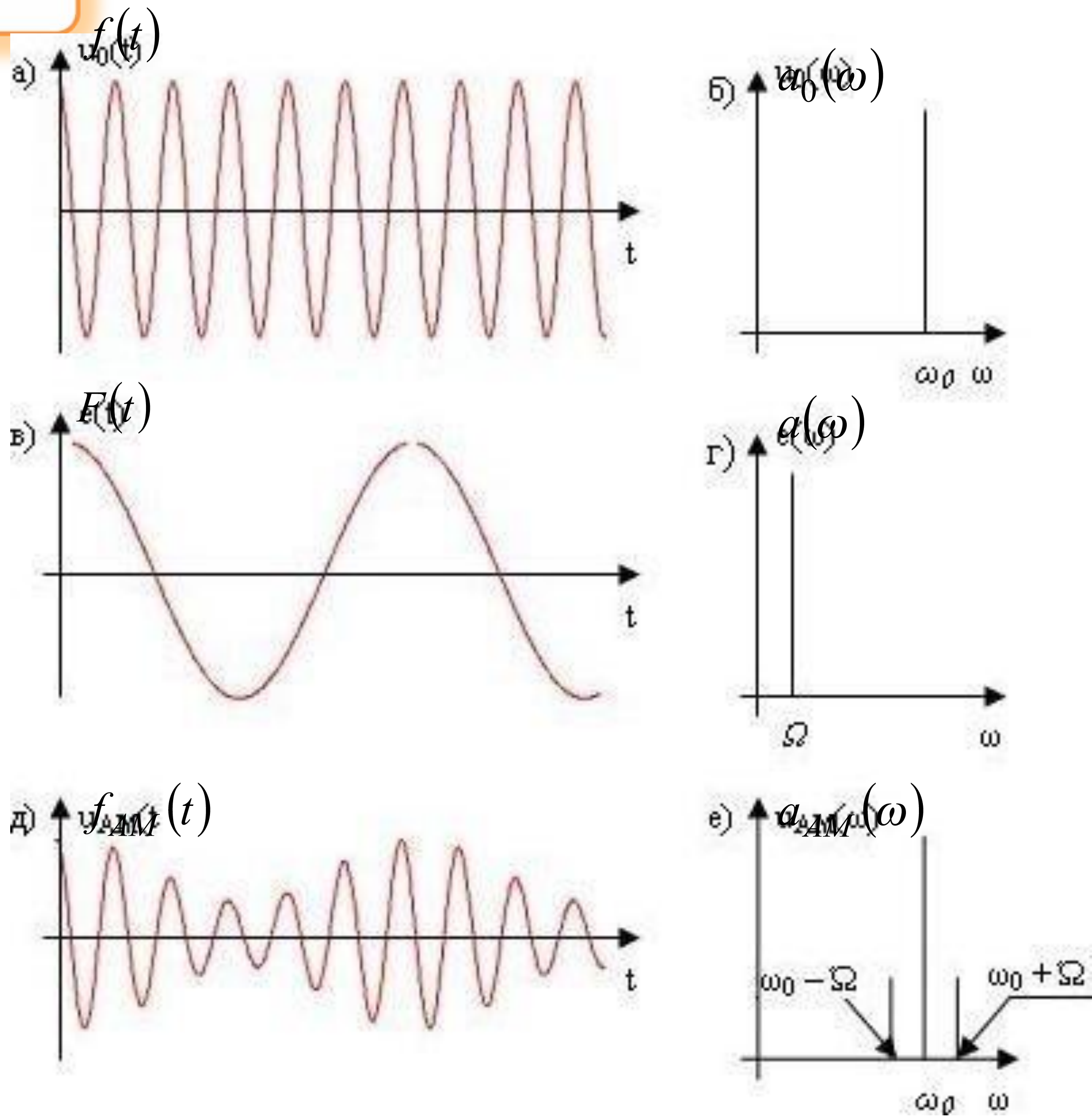
Процесс управления одним или несколькими параметрами высокочастотного колебания по закону управляющего сигнала называется модуляцией.

Амплитудная модуляция

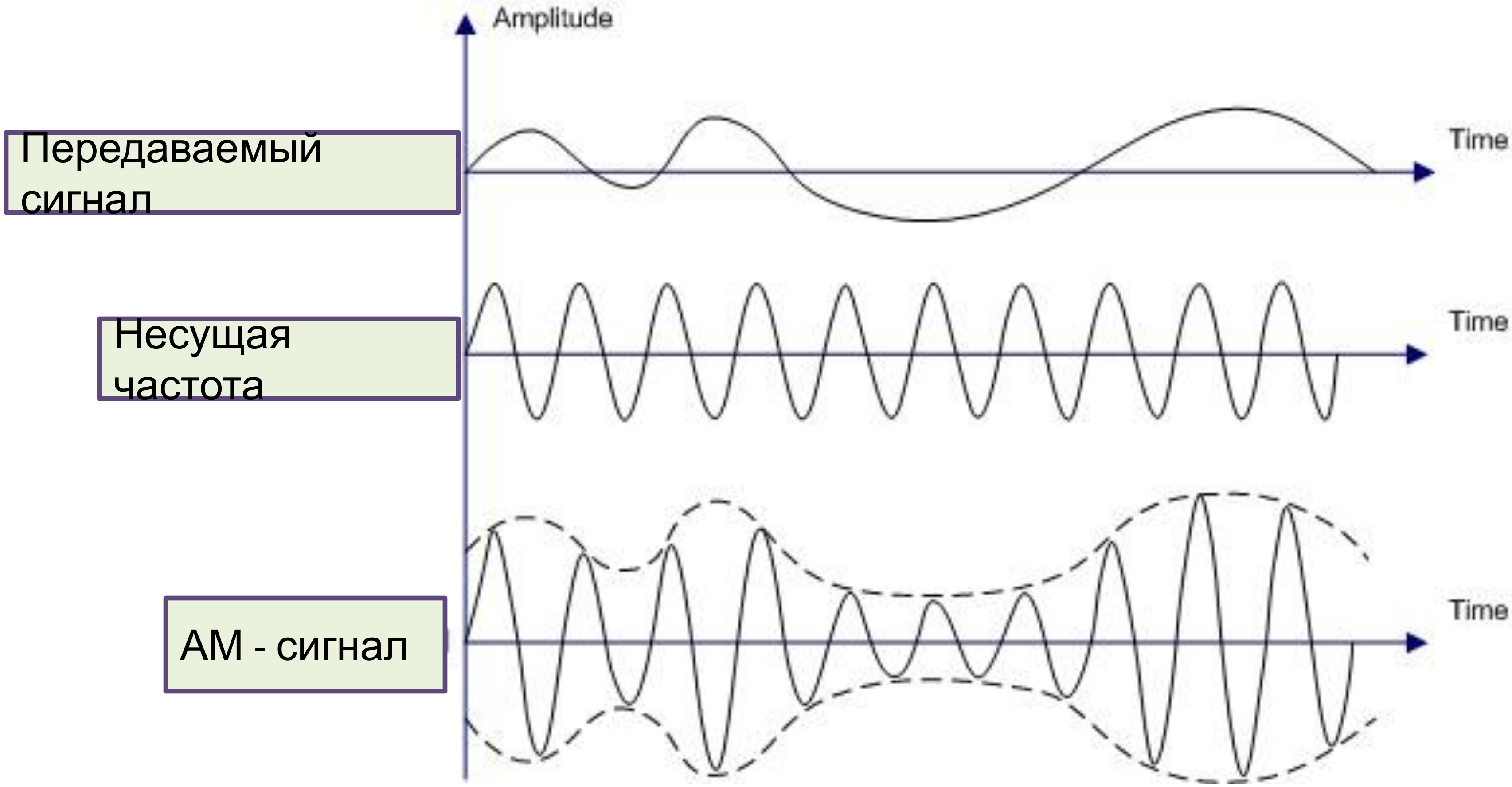
Несущее колебание

Передаваемый сигнал

Модулированный сигнал



Амплитудная модуляция

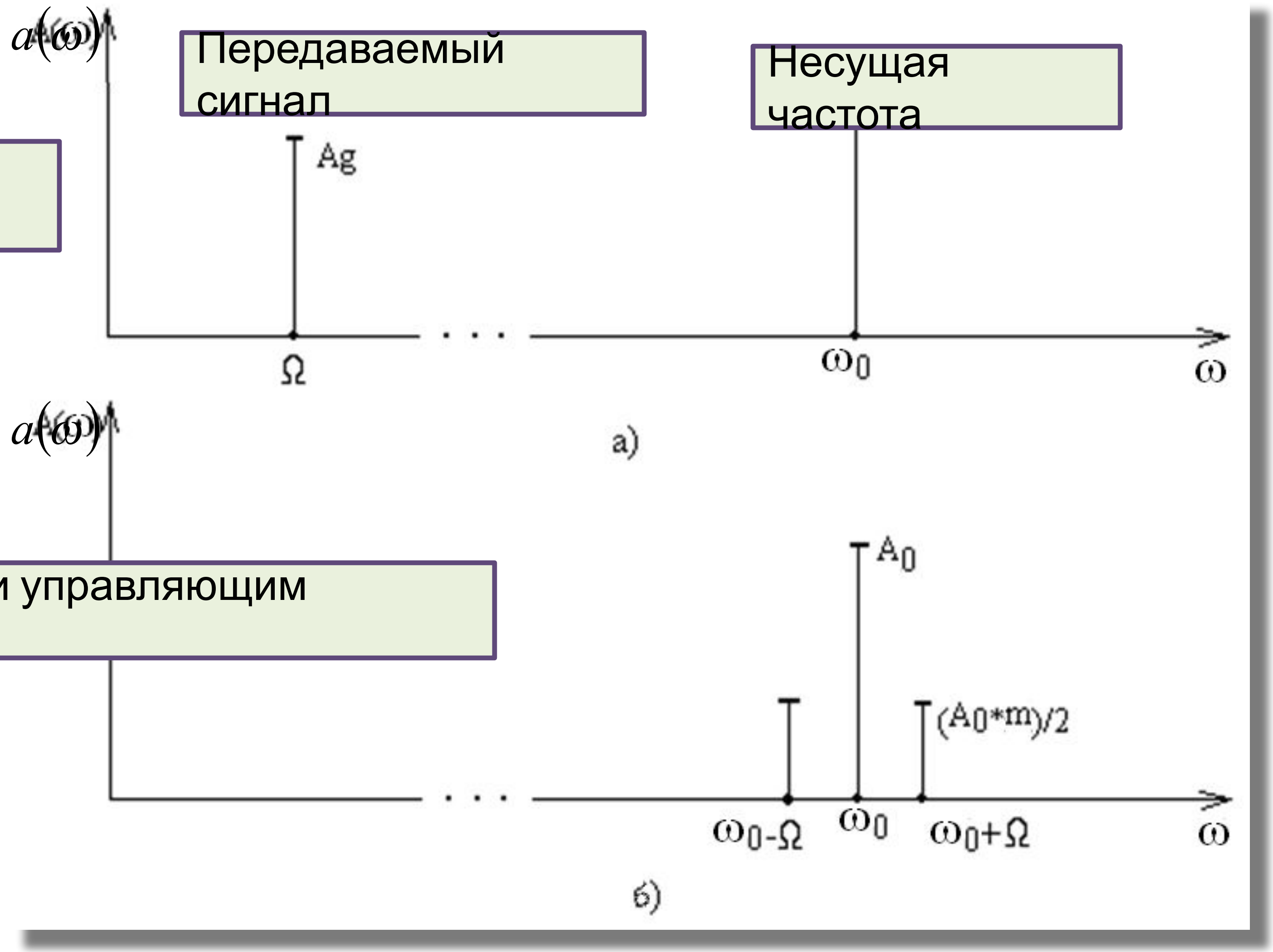


Амплитудная модуляция

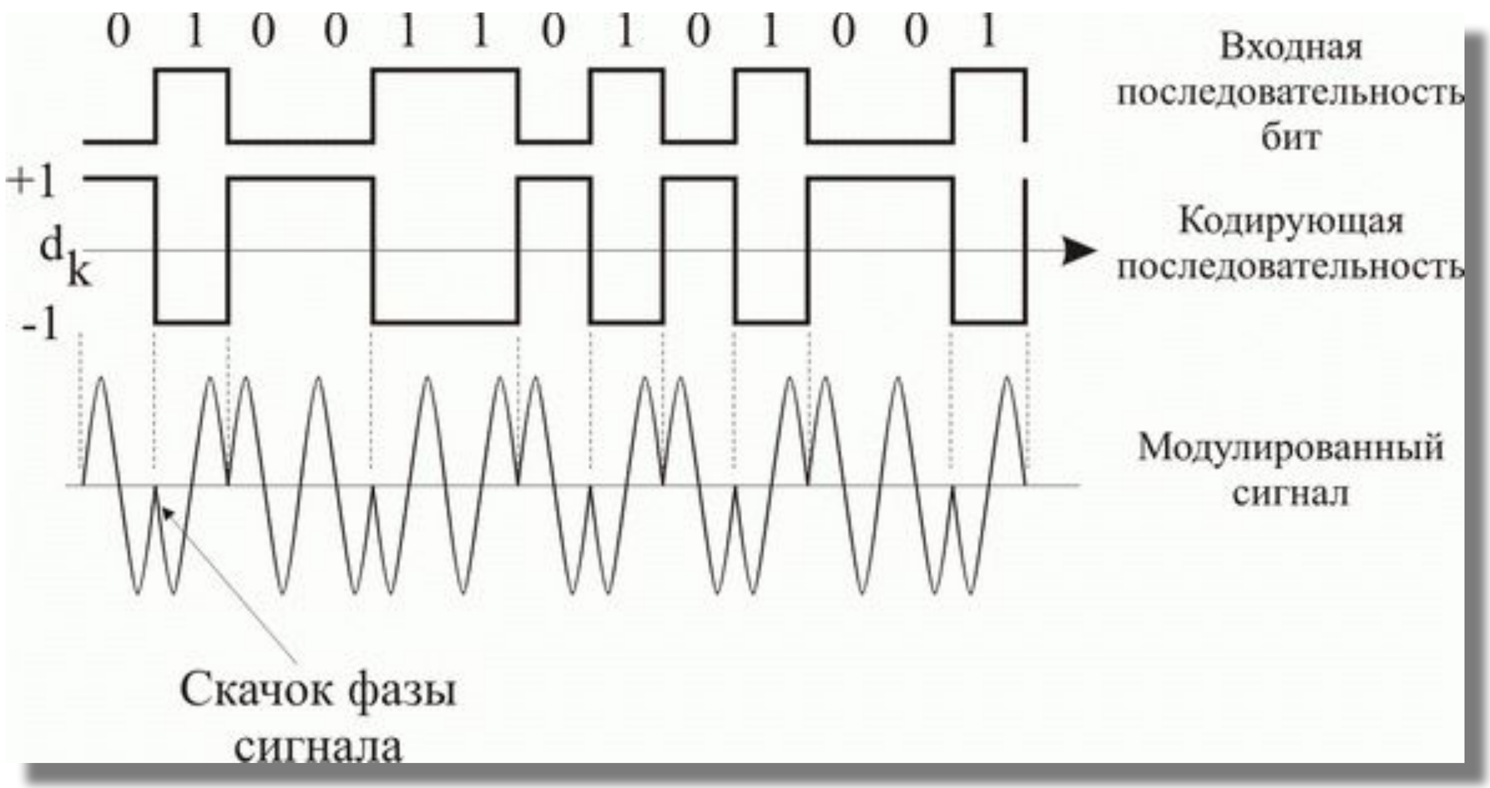
Спектральный состав:

а) до модуляции

б) после модуляции управляющим сигналом



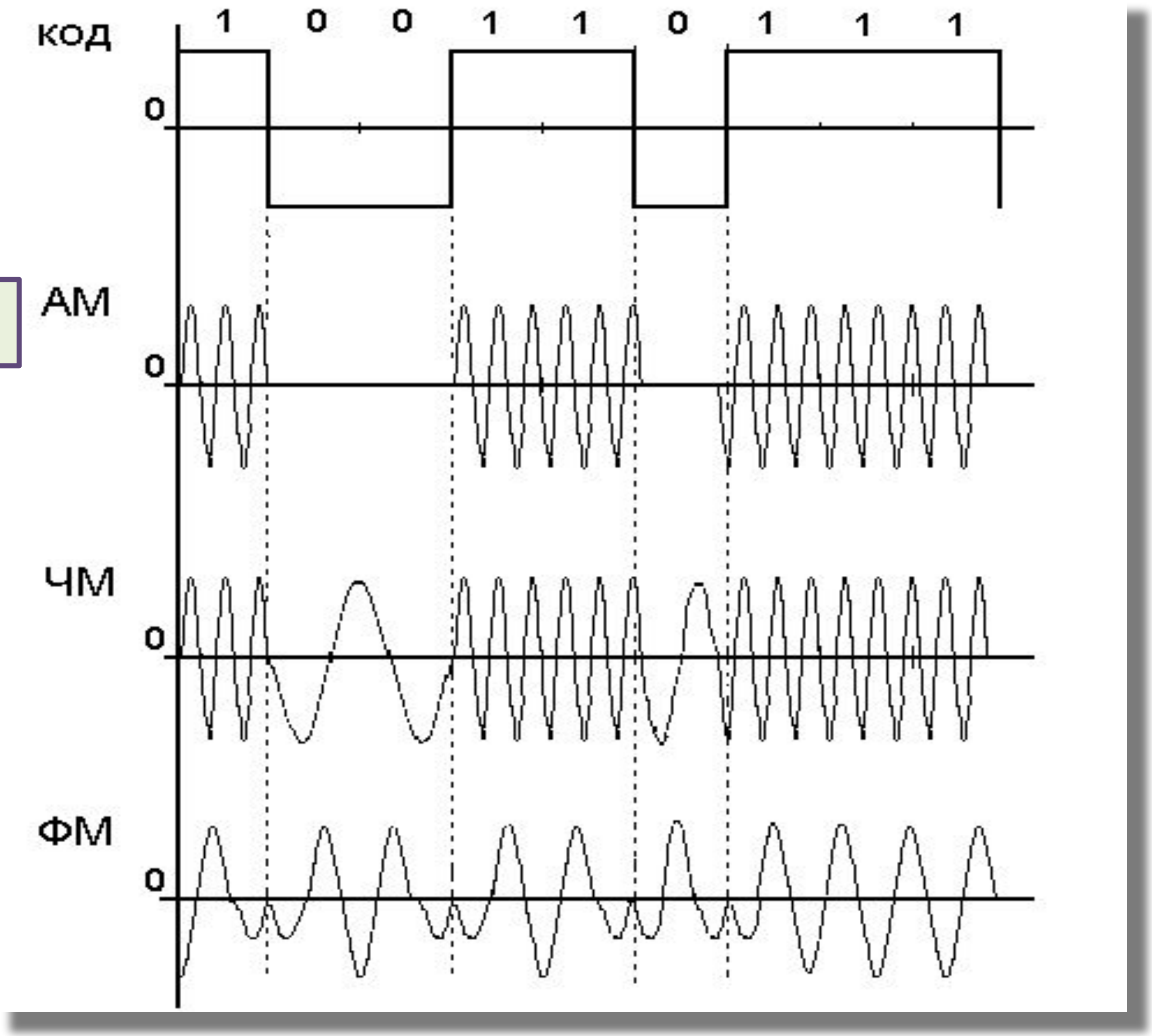
Фазовая модуляция

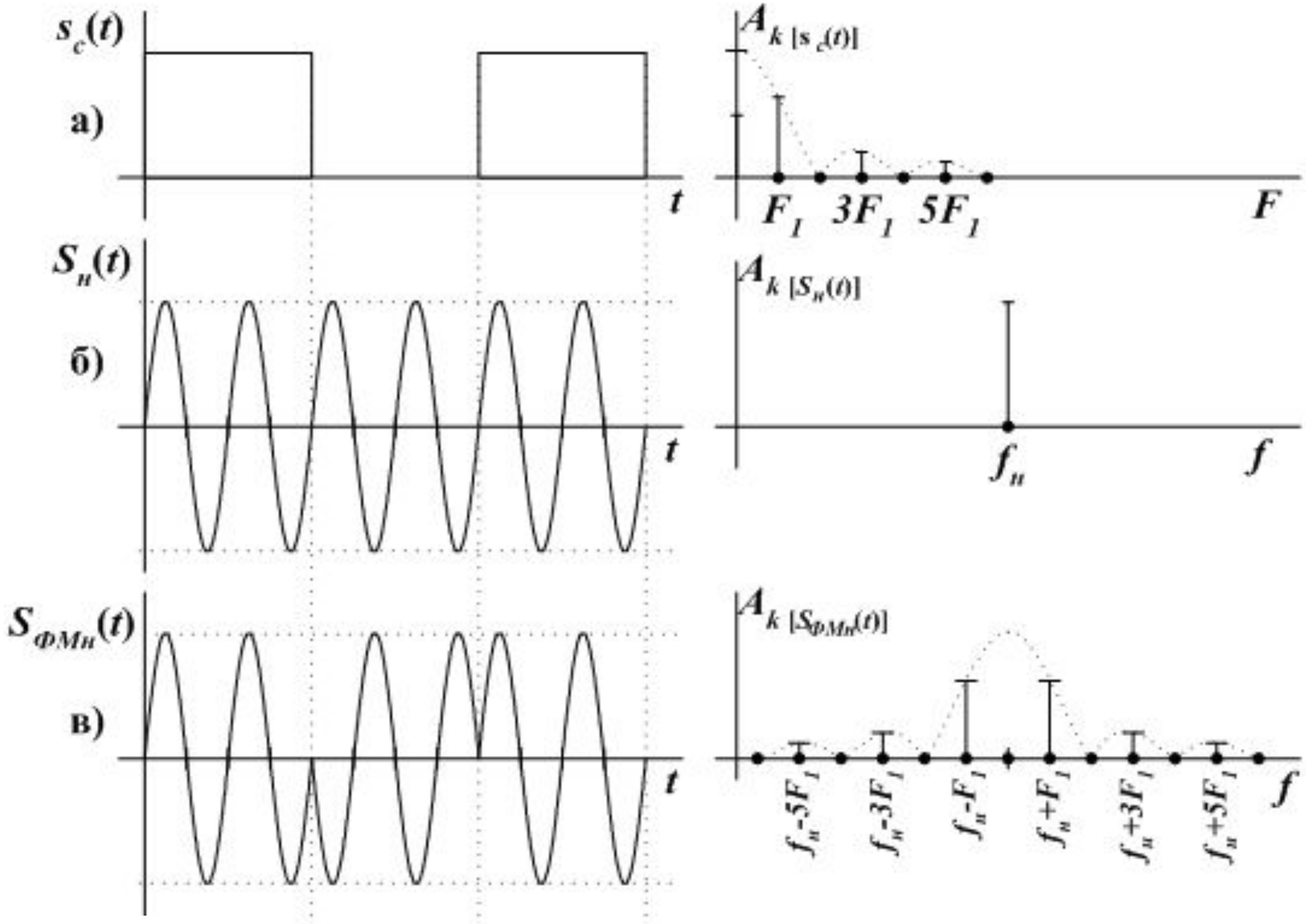


Амплитудная модуляция

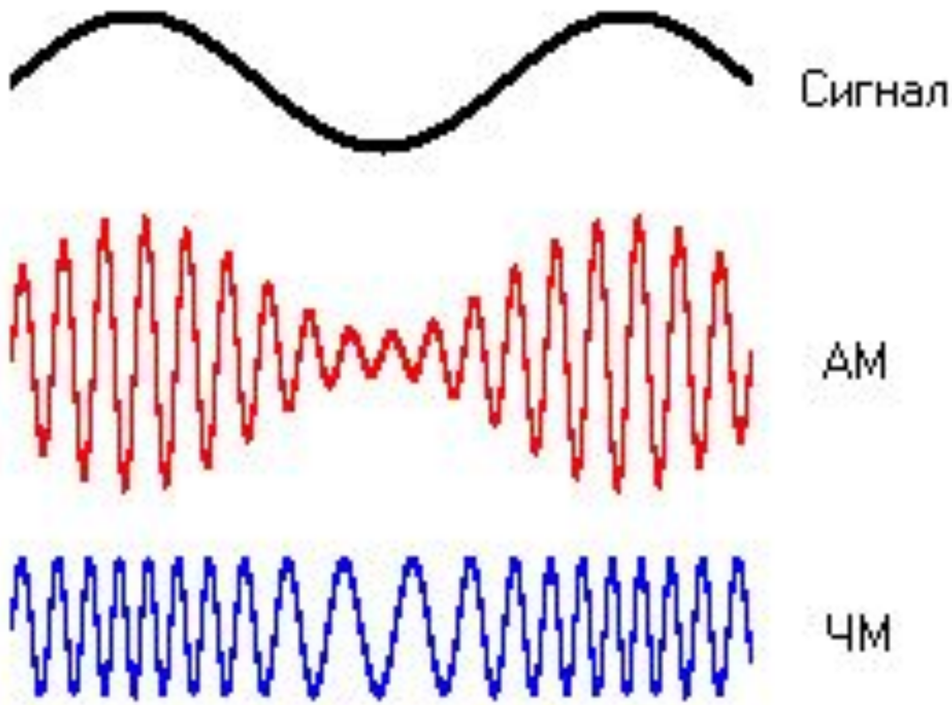
Частотная модуляция

Фазовая модуляция





Временные и спектральные характеристики ФМн сигнала


Сигнал
АМ
ЧМ