

**ВоГУ**

*Лекция 33 (15)*

**Электромагнитные колебания  
Метод векторных диаграмм  
Метод комплексных амплитуд  
Переменный ток**

***Кузина Л.А.,  
к.ф.-м.н.,  
доцент***

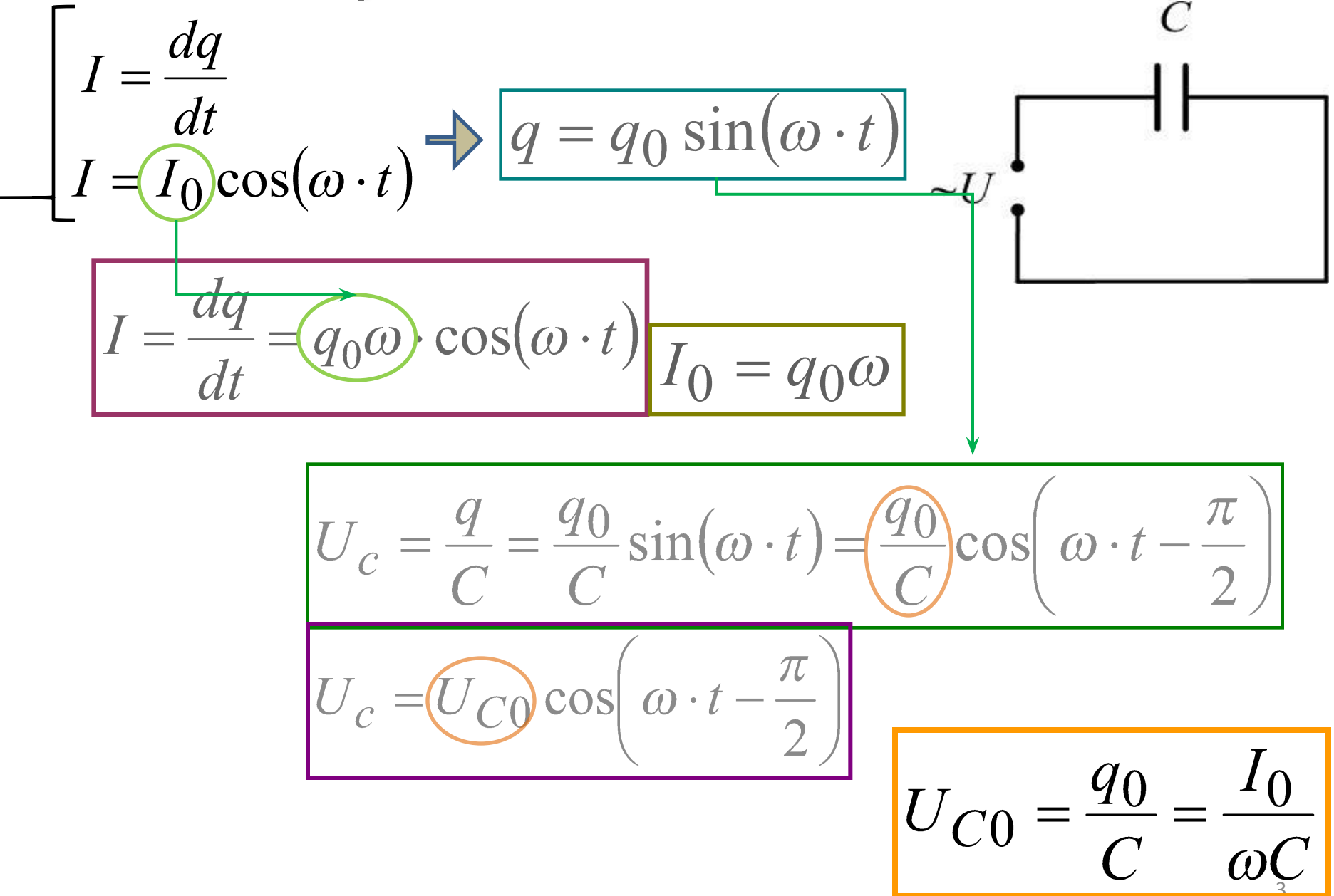
**2017 г.**

# План

1. Метод векторных диаграмм. Метод комплексных амплитуд
  - 1.1. Ёмкость в цепи переменного тока
  - 1.2. Индуктивность в цепи переменного тока
  - 1.3. Активное сопротивление в цепи переменного тока
  - 1.4. Последовательная цепь переменного тока.  
Резонанс напряжений
  - 1.5. Параллельная цепь переменного тока. Резонанс токов
2. Переменный ток, характеристики, получение.  
Мощность переменного тока
3. Элементы спектрального анализа
4. Модуляция

# Метод векторных диаграмм

## Ёмкость в цепи переменного тока

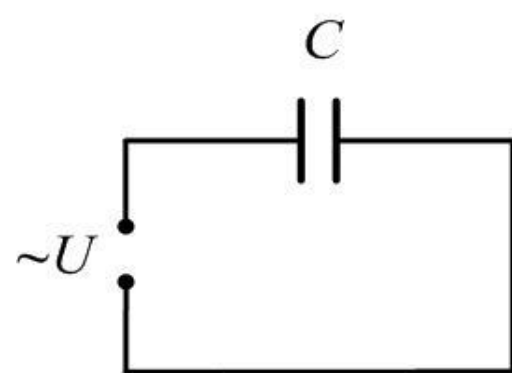


# Ёмкость в цепи переменного тока

$$U_{C0} = \frac{I_0}{\omega C} = I_0 R_C$$



$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$



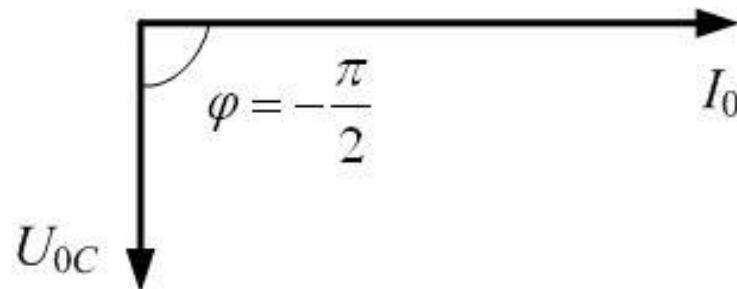
– ёмкостное сопротивление

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t)$$

$$U_c = U_{C0} \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

напряжение отстаёт по фазе от тока на  $\frac{\pi}{2}$

Векторная диаграмма:

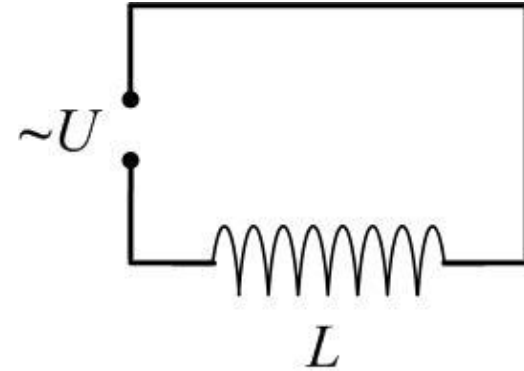


# Метод векторных диаграмм

# Индуктивность в цепи переменного тока

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t)$$

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt} = L \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



Второе правило Кирхгофа:

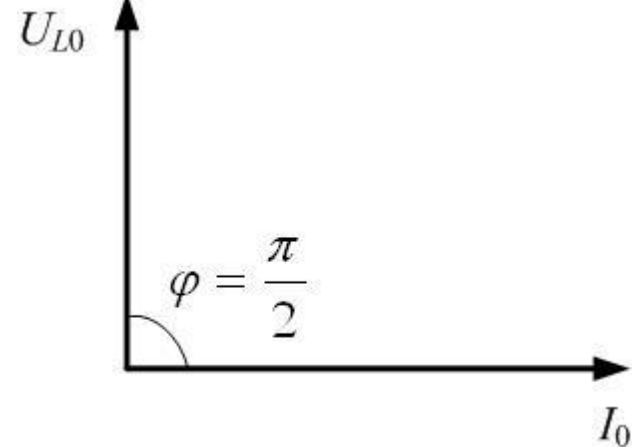
$$\mathcal{E}_{si} + U_L = 0$$

$$U_L = -\mathcal{E}_{si} = -L\omega \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U_L = U_{L0} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

напряжение опережает ток по фазе  $\frac{\pi}{2}$  на

Векторная диаграмма:



$$U_{L0} = L\omega \cdot I_0 = R_L \cdot I_0$$

$$R_L = L\omega \text{ - индуктивное сопротивление}$$

## Активное сопротивление в цепи переменного тока

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t)$$



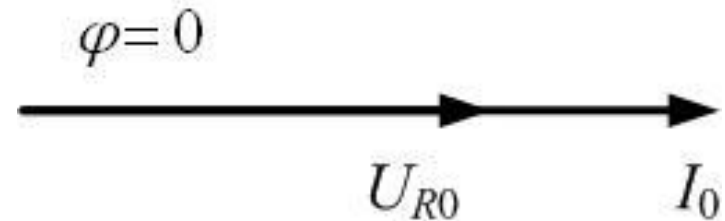
Закон Ома:

$$U_R = R \cdot I = R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = U_{R0} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$U_{R0} = R \cdot I_0$$

Фазы тока и напряжения  
совпадают

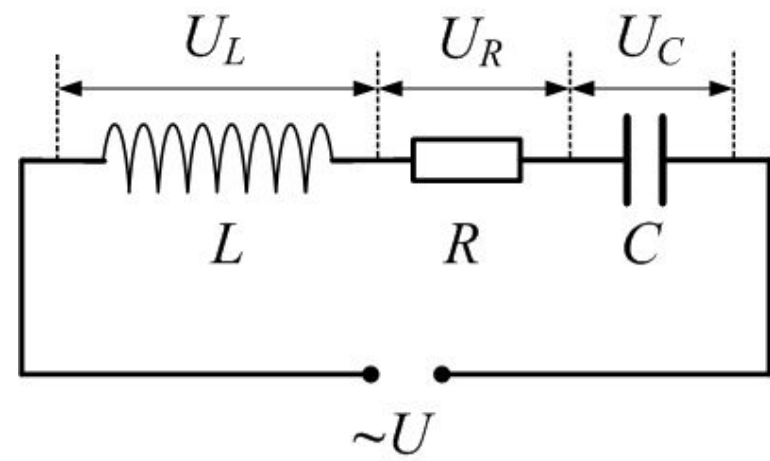
Векторная  
диаграмма:



Последовательная цепь переменного тока

Напряжения складываются; ток - общий

$$U_0 = U_{L0} + U_{R0} + U_{C0}$$



$$\sim U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\begin{cases} U_L = U_{L0} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \\ U_R = U_{R0} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ U_C = U_{C0} \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{L0} = L\omega \cdot I_0 = R_L \cdot I_0 \\ U_{R0} = R \cdot I_0 \\ U_{C0} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_0 = R_C \cdot I_0 \end{cases}$$

$$\vec{U}_0 = \vec{U}_{L0} + \vec{U}_{R0} + \vec{U}_{C0}$$

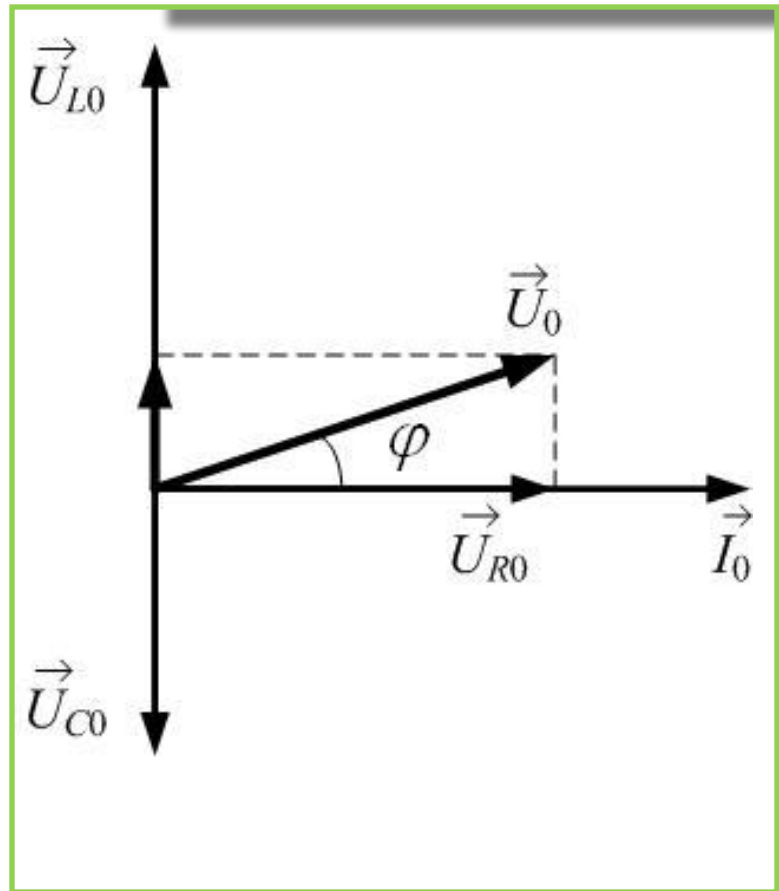
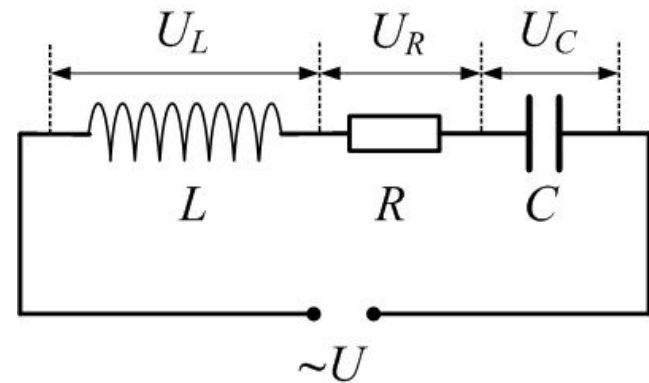
$$U_0^2 = (U_{L0} - U_{C0})^2 + U_{R0}^2$$

$$\begin{cases} U_{L0} = R_L \cdot I_0 \\ U_{R0} = R \cdot I_0 \\ U_{C0} = R_C \cdot I_0 \end{cases}$$



$$U_0^2 = I_0^2 \left( (R_L - R_C)^2 + R^2 \right)$$

$$U_0 = I_0 \sqrt{(R_L - R_C)^2 + R^2}$$





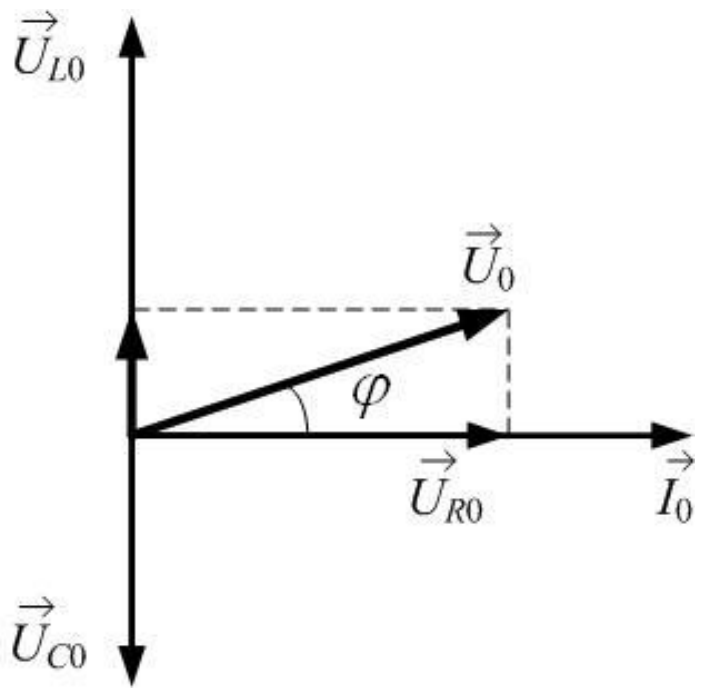
**Последовательная цепь переменного тока**

$$U_0 = I_0 \sqrt{(R_L - R_C)^2 + R^2}$$

$$\begin{cases} R_L = \omega L \\ R_C = \frac{1}{\omega C} \end{cases}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



$I_0 = \frac{U_0}{Z}$  – закон Ома для последовательной цепи переменного тока

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  - полное сопротивление последовательной цепи переменного тока

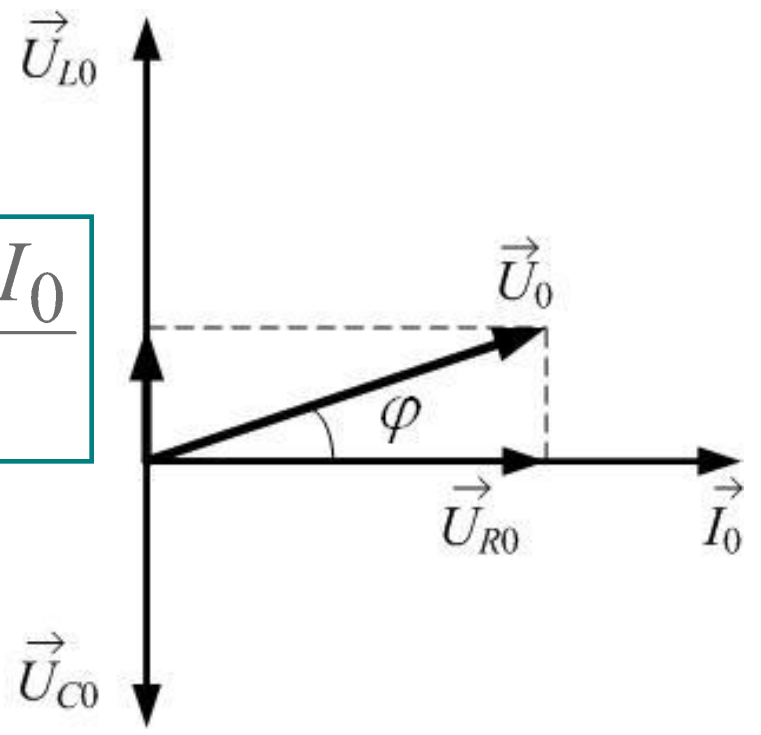
Угол сдвига фаз  
между током и  
напряжением:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{R_L I_0 - R_C I_0}{R I_0}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_L - R_C}{R}$$

$$\begin{cases} R_L = \omega L \\ R_C = \frac{1}{\omega C} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



# Резонанс в последовательной цепи

$$\omega L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$R_L = R_C$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R$$

Ток максимален:

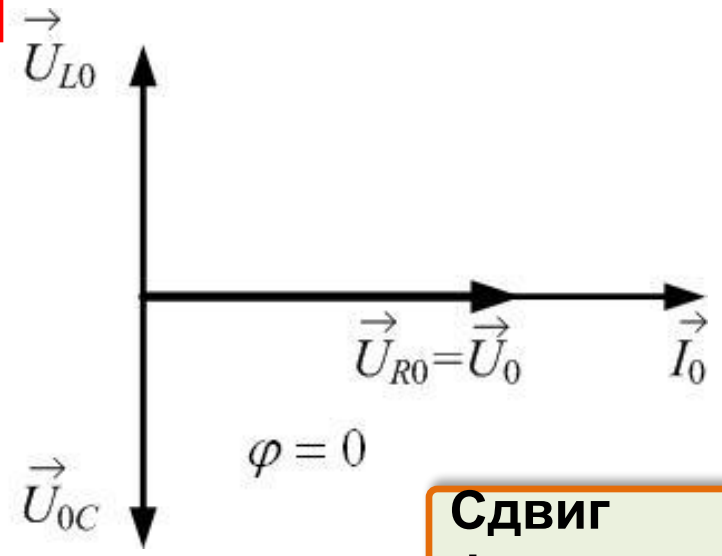
$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R}$$

$$U_{L0} = U_{C0}$$

$$\vec{U}_{L0} = -\vec{U}_{C0}$$

$$U_0 = U_{L0} + U_{R0} + U_{C0}$$

$$\vec{U}_0 = \vec{U}_{R0}$$



Сдвиг фаз:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 0$$

Это – резонанс напряжений: напряжения в противофазе и компенсируют друг друга

# Последовательная цепь: метод комплексных амплитуд

Колебательные процессы  
удобно описывать с  
помощью  
комплексных чисел

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



$$\hat{U} = U_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$i^2 = -1$$

$$\hat{U} = U_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t)} = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + i \cdot U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\operatorname{Re} \hat{U} = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\operatorname{Im} \hat{U} = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Дифф.  
уравнение:

$$\ddot{q} + 2\beta \cdot \dot{q} + \omega_0^2 \cdot \hat{q} = f_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Обозначения:

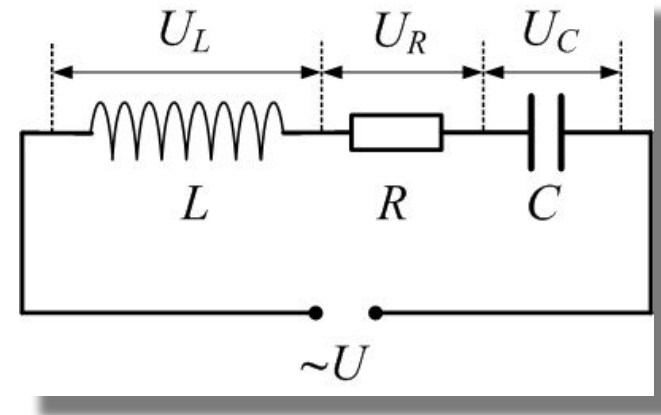
$$f_0 = \frac{U_0}{L}$$

$$2\beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Решение ищем в  
виде:

$$\hat{q} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$



$$\hat{q} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Считаем  
производные:

$$\dot{\hat{q}} = \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\ddot{\hat{q}} = \hat{A} \cdot (i \cdot \omega)^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = -\hat{A} \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Подставляем в дифф.  
ур.:


$$\ddot{\hat{q}} + 2\beta \cdot \dot{\hat{q}} + \omega_0^2 \cdot \hat{q} = f_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$-\hat{A} \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + 2\beta \cdot \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + \omega_0^2 \cdot \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = f_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Преобразуем  
:

$$-\hat{A} \cdot \omega^2 + 2\beta \cdot \hat{A} \cdot i \cdot \omega + \omega_0^2 \cdot \hat{A} = f_0$$

$$\hat{A} \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega) = f_0$$


$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

Модуль полученной комплексной амплитуды и есть обычная вещественная амплитуда заряда:

$$q_0 = |\hat{A}|$$

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

$$q_0 = |\hat{A}| = \frac{|f_0|}{|(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\beta \cdot \omega|} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$q_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

**Аргумент комплексной амплитуды :**

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

$$\hat{A} = \frac{f_0 \cdot \left( (\omega_0^2 - \omega^2) - 2\beta \cdot i \cdot \omega \right)}{\left( \omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

$$\arctg \left( \frac{\operatorname{Im} \hat{A}}{\operatorname{Re} \hat{A}} \right)$$

$$\arctg \left( \frac{\operatorname{Im} \hat{A}}{\operatorname{Re} \hat{A}} \right) = \arctg \left( -\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = -\arctg \left( \frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$



$$\hat{q} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$q_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\arctg\left(\frac{\text{Im } \hat{A}}{\text{Re } \hat{A}}\right) = -\arctg\left(\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

**Полное  
решение:**

$$\hat{q} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cdot e^{i \cdot \left( \omega \cdot t - \arctg\left(\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \right)}$$

**Вещественная часть  
решения:**

$$q = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \arctg\left(\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

**Вещественная часть  
решения:**

$$q = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \arctg\left(\frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_0)$$

**Амплитуда  
заряда:**

$$q_0 \equiv q_0(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

**Фаза:**

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Сила  
тока:

$$\hat{I} = \hat{q} = \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Напряжение:

$$\hat{U} = U_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Полное  
сопротивление:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_0 \cdot e^{i \omega t}}{\hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \omega t}} = \frac{U_0}{\hat{A} \cdot i \cdot \omega}$$

Комплексная  
амплитуда:

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta \cdot i \cdot \omega}$$

$$\hat{Z} = \frac{U_0 \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\beta \cdot \omega)}{f_0 \cdot i \cdot \omega}$$

**Полное  
сопротивление:**

$$\hat{Z} = \frac{U_0 \cdot \left( (\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\beta \cdot \omega \right)}{f_0 \cdot i \cdot \omega}$$

$$f_0 = \frac{U_0}{L}$$

$$\hat{Z} = \frac{L \cdot \left( \left( \frac{1}{LC} - \omega^2 \right) + i \cdot \frac{R}{L} \cdot \omega \right)}{i \cdot \omega} = L \cdot \left( \frac{i}{\omega} \cdot \left( \omega^2 - \frac{1}{LC} \right) + \frac{R}{L} \right)$$

$$\hat{Z} = i \cdot \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + R$$

**Модуль полного  
сопротивления:**

$$Z = |\hat{Z}| = \sqrt{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}$$

# Метод векторных диаграмм для параллельной цепи переменного тока

Пусть

$$R=0$$

$$I_0 = I_{L0} + I_{C0}$$

При  
резонансе:

$$\omega L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

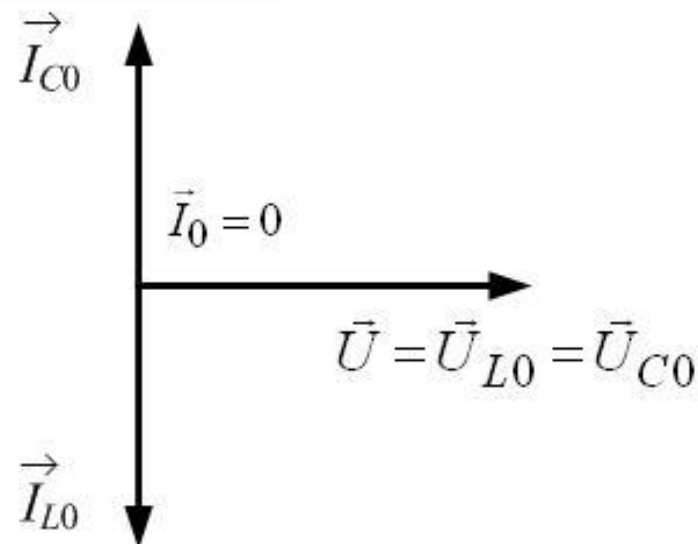
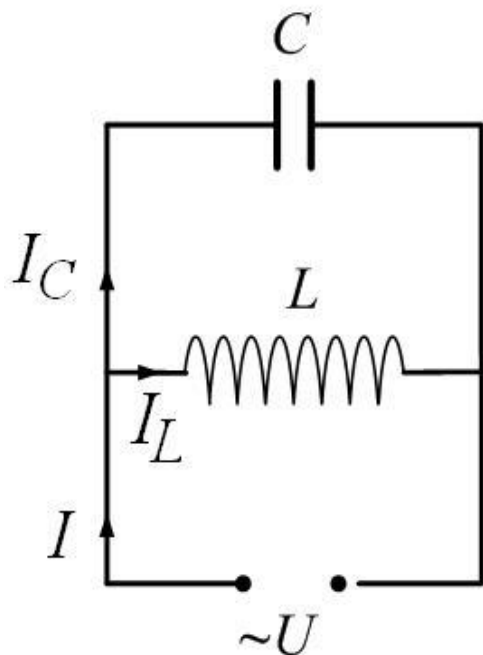
$$R_L = R_C$$

Токи:

$$I_{L0} = \frac{U_{L0}}{R_L} = \frac{U_0}{R_L}$$

$$I_{C0} = \frac{U_{C0}}{R_C} = \frac{U_0}{R_C}$$

$$I_{L0} = I_{C0}$$

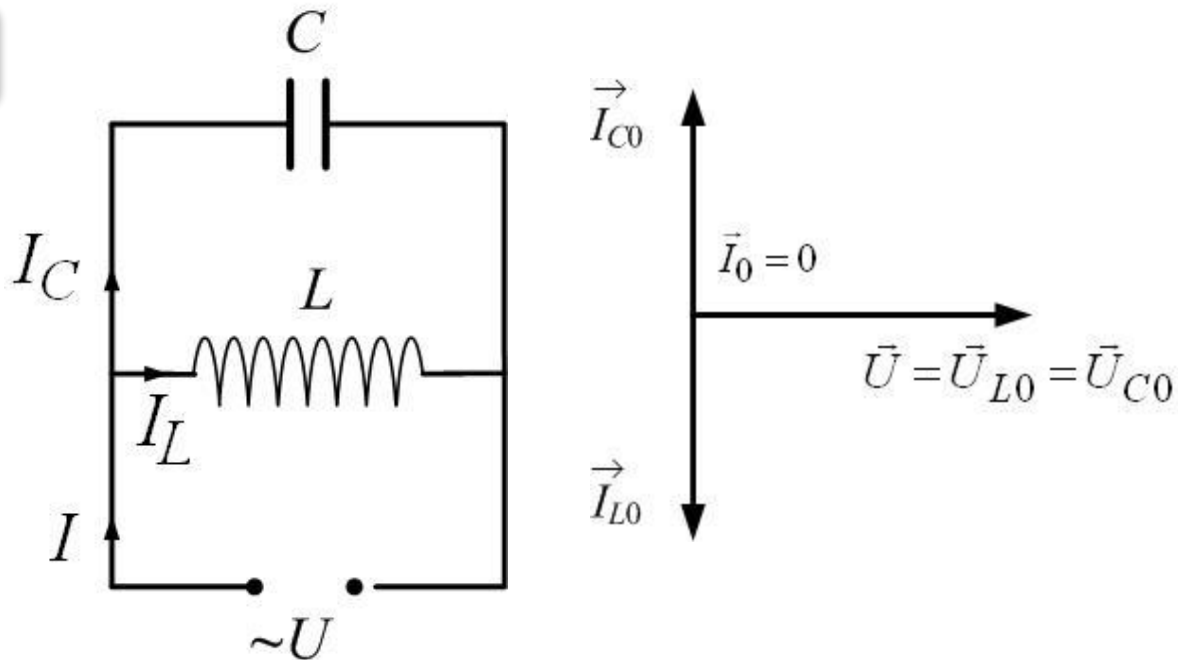


## Резонанс токов

$$I_0 = I_{L0} + I_{C0}$$

$$R_L = R_C$$

$$I_{L0} = I_{C0}$$



Токи в обеих ветвях одинаковы по величине, но колеблются в противофазе.

Они компенсируют друг друга, и общий ток равен нулю:

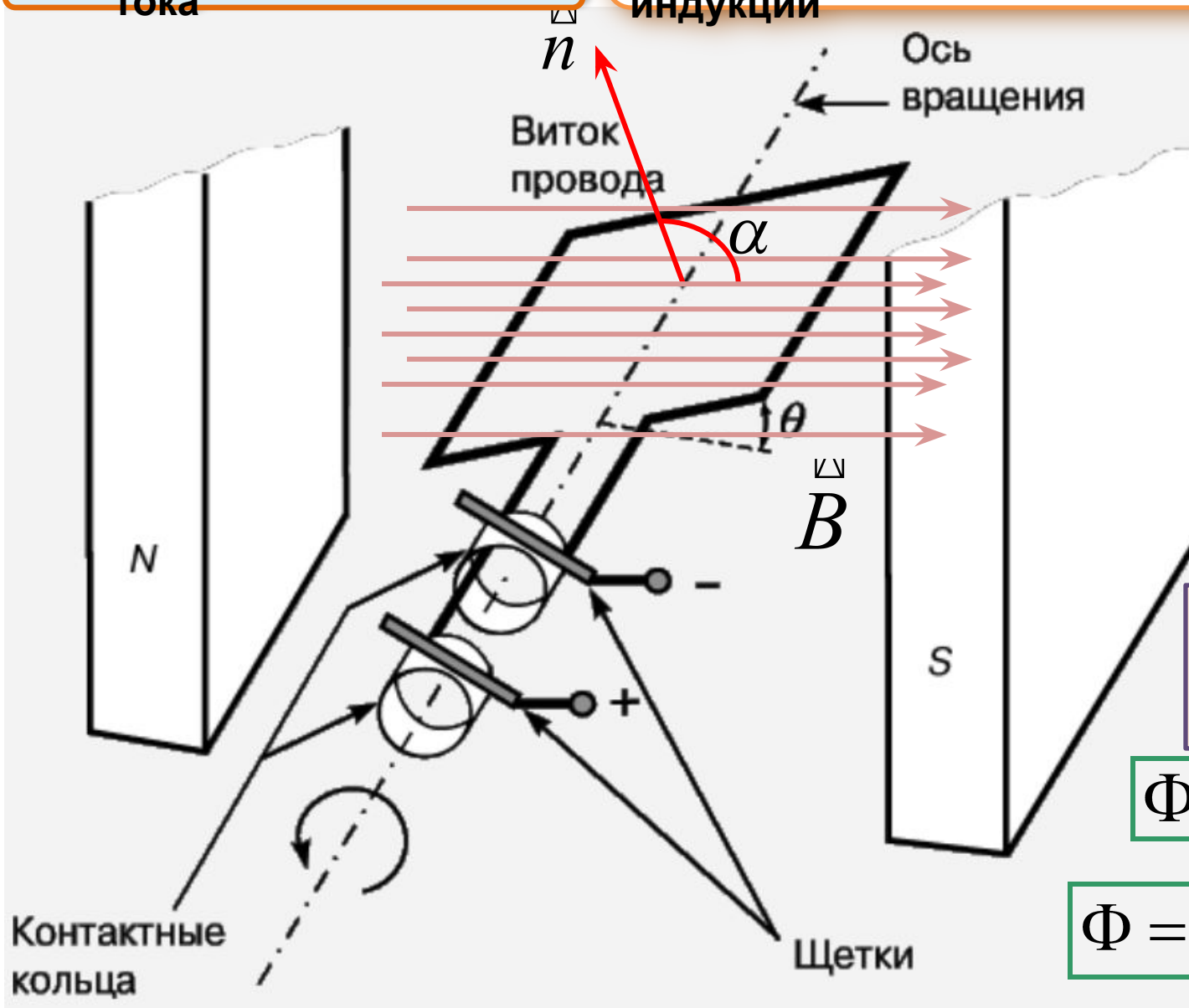
$$I_0 = I_{L0} + I_{C0} = 0$$

Это - резонанс токов

# Переменный ток

## Генератор переменного тока

Принцип действия генератора переменного тока основан на явлении электромагнитной индукции



Рамка  
вращается в  
постоянном  
магнитном поле

$$\alpha = \omega \cdot t$$

магнитный  
поток через  
рамку

изменяется:

$$\Phi = BS \cos \alpha$$

$$\Phi = BS \cos(\omega \cdot t)$$

Генератор переменного  
тока

$$\Phi = BS \cos(\omega \cdot t)$$

ЭДС индукции по закону  
Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}(BS \cos(\omega \cdot t)) = BS\omega \sin(\omega \cdot t)$$

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0 \sin(\omega \cdot t)$$

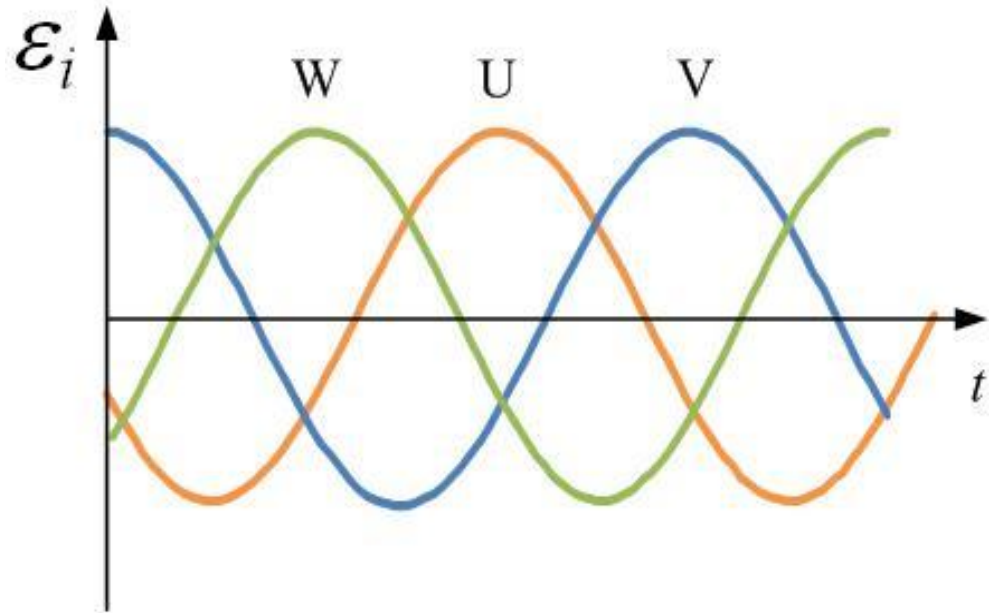
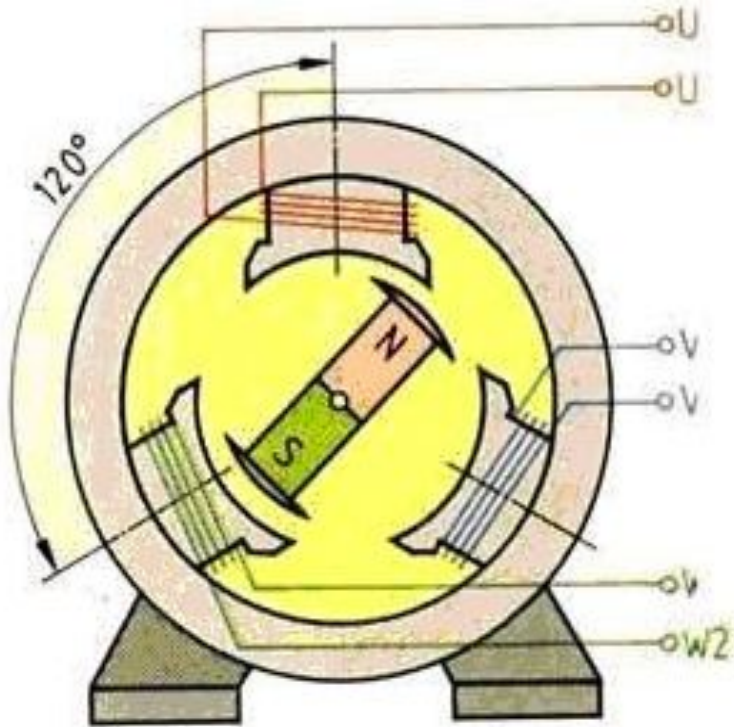
Максимальное  
значение ЭДС

Обычно витков в рамке не один, а много (N);  
тогда

$$\mathcal{E}_0 = NBS\omega$$



## Генератор переменного тока



В промышленных генераторах вращается электромагнит, в то время как обмотки, в которых наводится ЭДС, остаются неподвижными. Если использовать, например, три симметрично расположенных обмотки, то в каждой из них фаза ЭДС индукции будет сдвинута на  $120^\circ$ ; это уже трёхфазный ток

## Мощность переменного тока

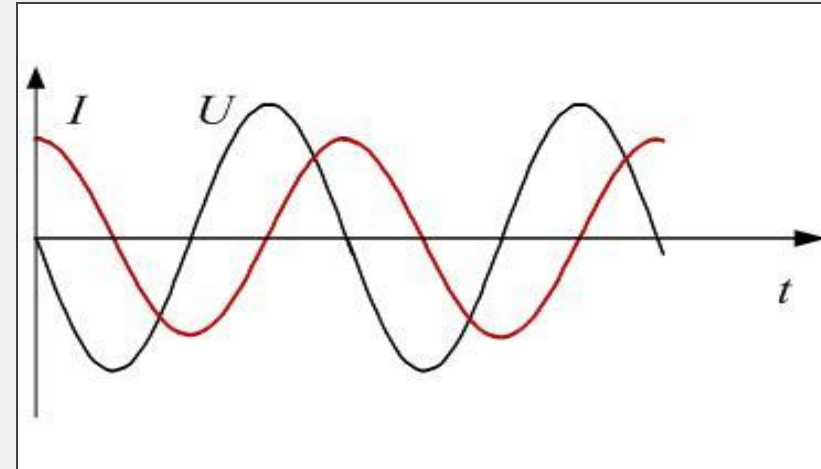
Сдвиг фаз между током и напряжением в общем случае равен  $\varphi$

Мгновенные значения тока и

напряжения:

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



Мгновенная мощность  $P_M = U \cdot I$

$$P_M = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$P_M = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} (\cos(2\omega \cdot t + \varphi) + \cos \varphi)$$

## Мощность переменного тока

$$P_m = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} (\cos(2\omega \cdot t + \varphi) + \cos \varphi)$$

Мгновенная мощность изменяется во времени с частотой, в два раза большей частоты тока

Мгновенные значения мощности неважны; важно знать среднюю мощность:

$$P \equiv \langle P_m \rangle = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} (\langle \cos(2\omega \cdot t + \varphi) \rangle + \langle \cos \varphi \rangle)$$

$$= 0$$

$$P = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} \cos \varphi$$

## Эффективные значения тока и напряжения

### Определения:

$$U_{\text{э}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{э}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$P = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$P = U_{\text{э}} \cdot I_{\text{э}} \cdot \cos \varphi$$

### Смысл таких определений:

Эффективное значение переменного тока (или напряжения) численно равно такому постоянному току (или напряжению), который даёт ту же мощность, что и данный переменный ток

При отсутствии сдвига фаз ( $\varphi=0$ ):

$$P = U_{\text{э}} \cdot I_{\text{э}} = I_{\text{э}}^2 R = \frac{U_{\text{э}}^2}{R}$$

# Понятие о спектральном разложении. Ряд Фурье

Теорема Фурье:

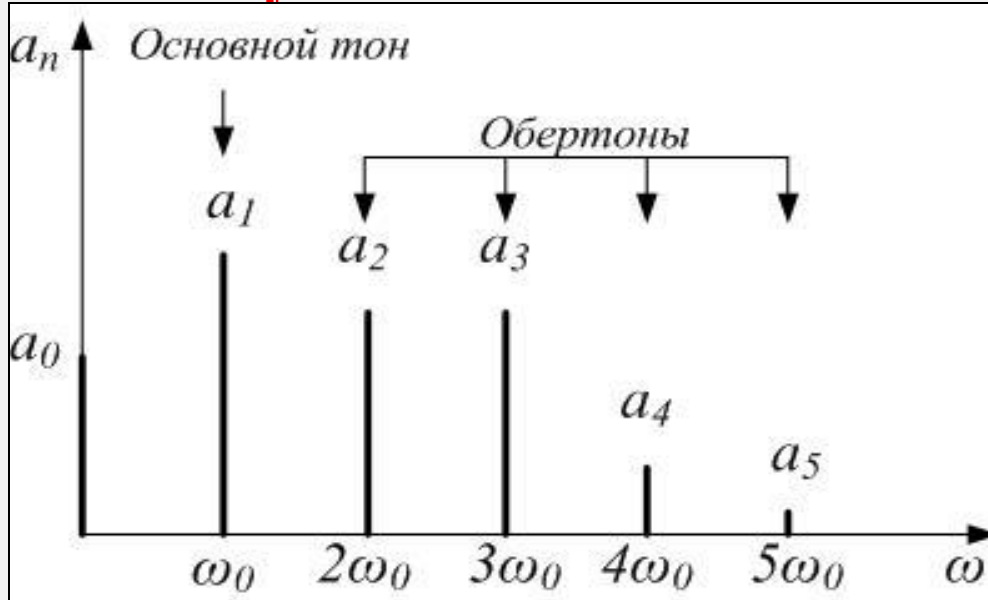
**любую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье**

(разложить по гармоническим составляющим)

$$f(t) = f(t + T)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$



Для чётной функции:

$$f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t))$$

## Интеграл Фурье

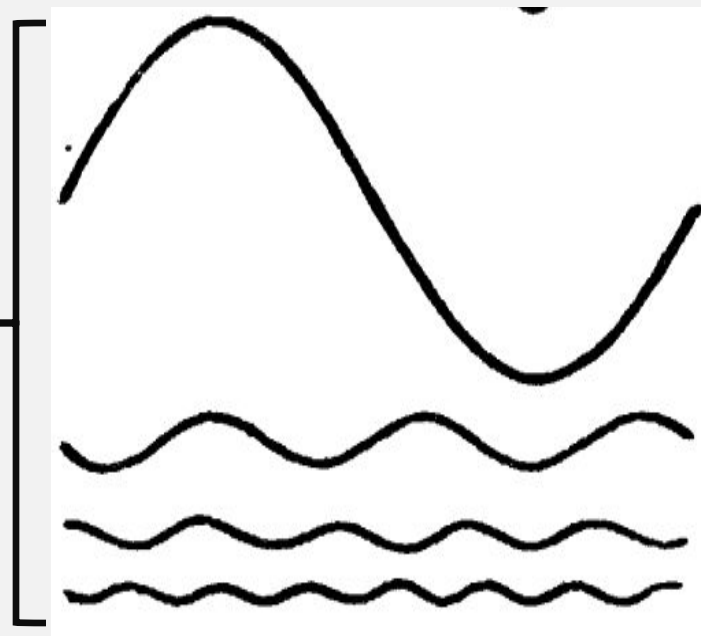
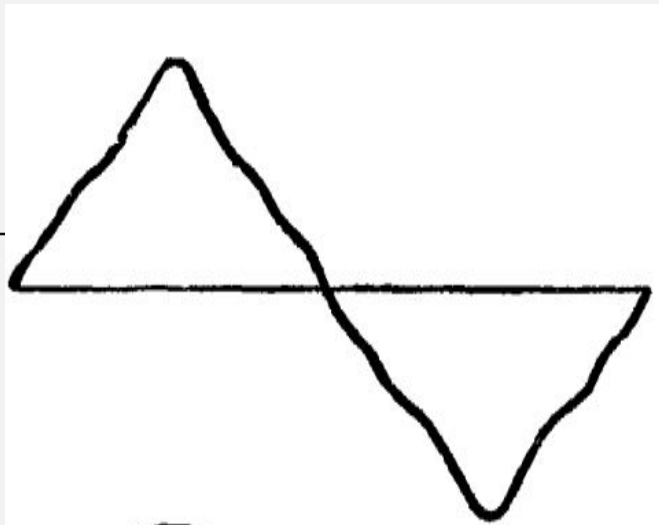
Непериодическую функцию тоже можно разложить по гармоническим составляющим, но это она будет **иметь непрерывный спектр**:



Ряд Фурье переходит в интеграл Фурье

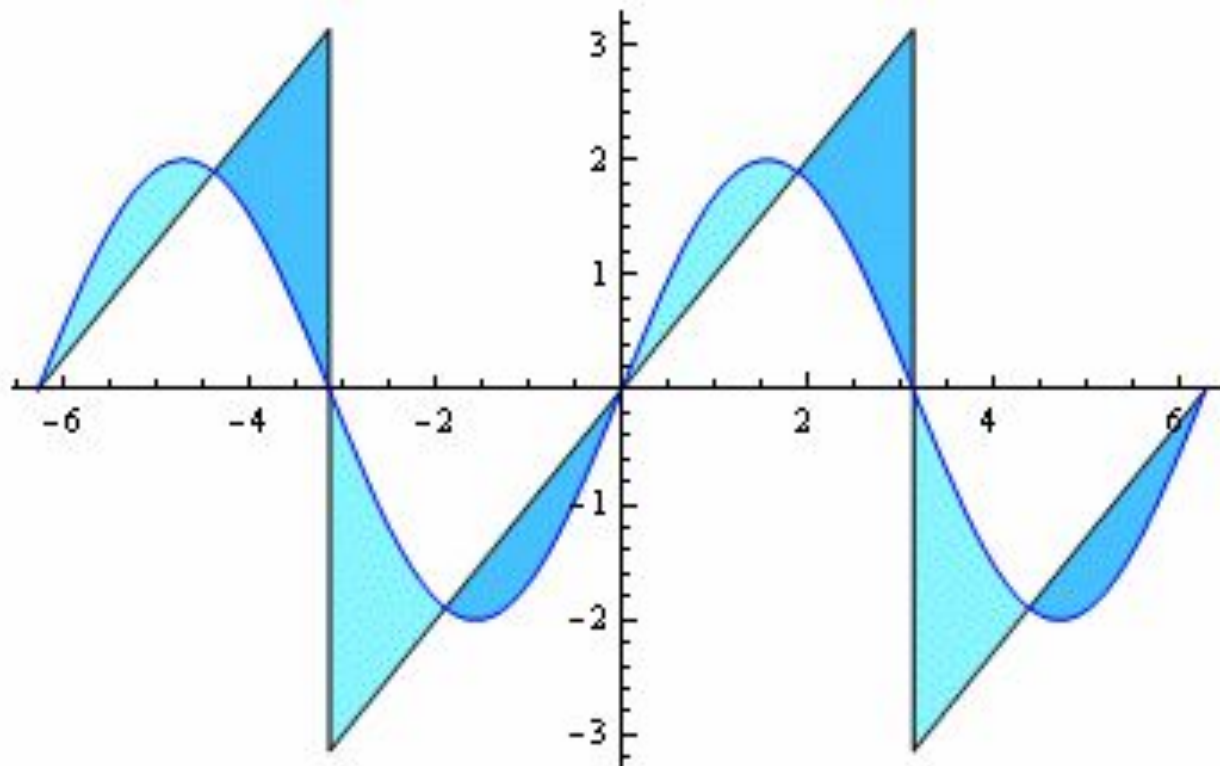
Примеры:

сложение 4-х синусоид даёт почти треугольный импульс



Примеры: «пила» раскладывается на гармонические составляющие тем точнее, чем больше членов ряда

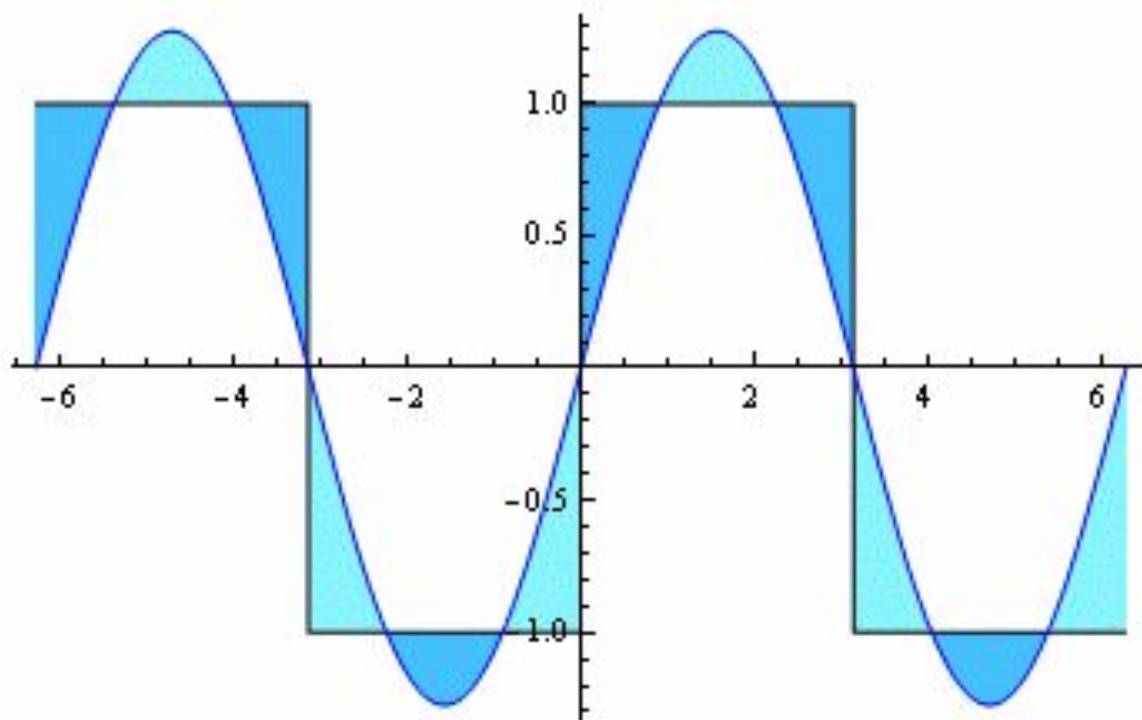
Число членов ряда: 1



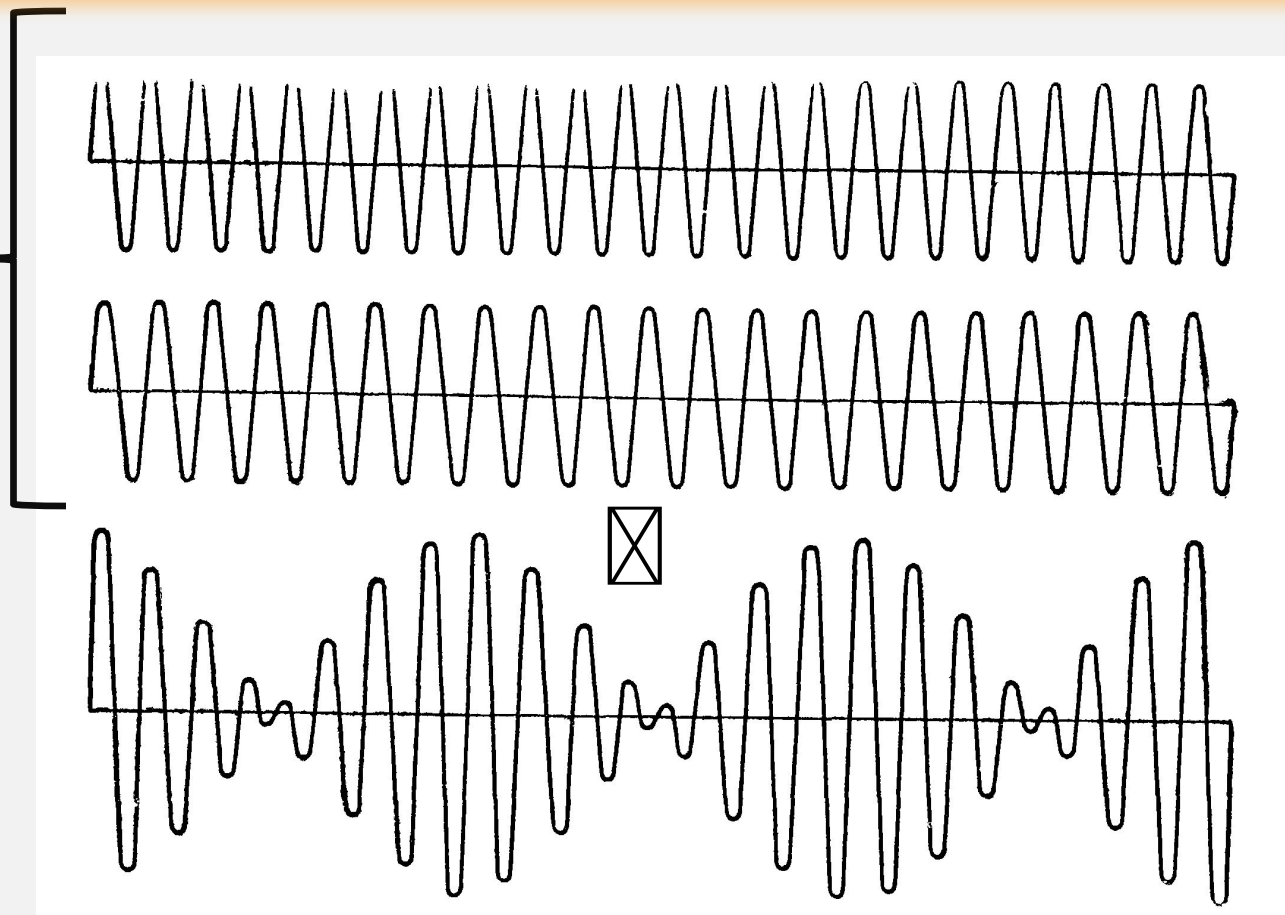


# Примеры: прямоугольный импульс

Число членов ряда: 1



Сложение двух колебаний, близких по частоте, даёт биения



## Модуляция

Для передачи информации на большие расстояния используют высокочастотные колебания.

В общем случае высокочастотное колебание имеет вид

$$a(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где  $\omega_0$  – несущая частота.

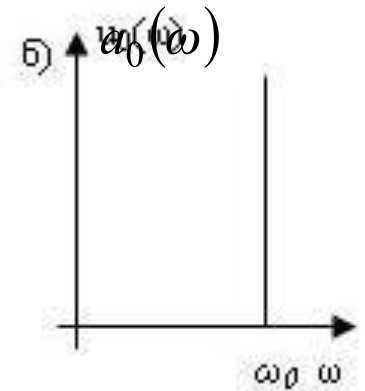
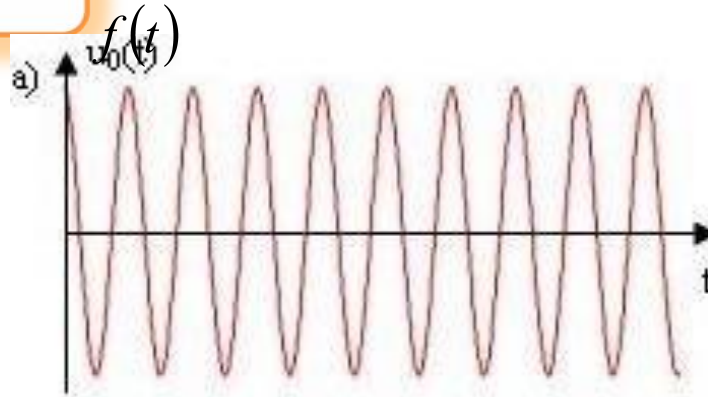
Если  $\omega_0 = \text{const}$ ,  $\varphi_0 = \text{const}$ ,  $A(t) = A_0 = \text{const}$ , то колебание является гармоническим.

Оно не содержит никакой информации.

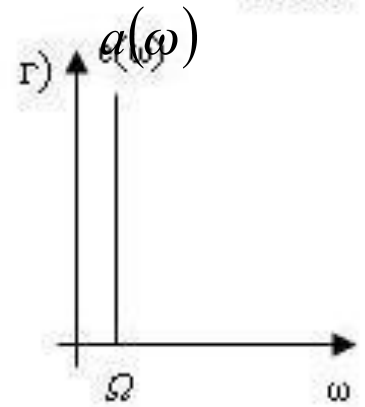
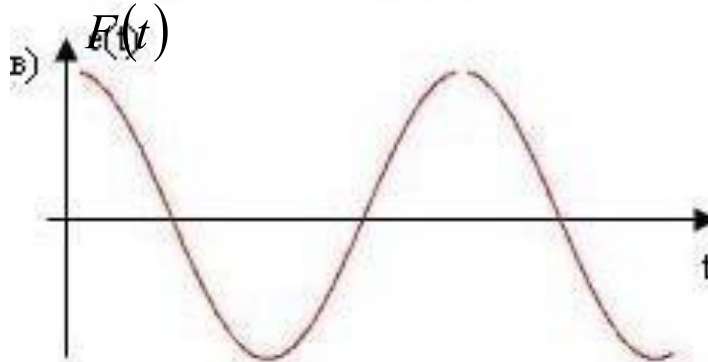
***Процесс управления одним или несколькими параметрами высокочастотного колебания по закону управляющего сигнала называется модуляцией.***

# Амплитудная модуляция

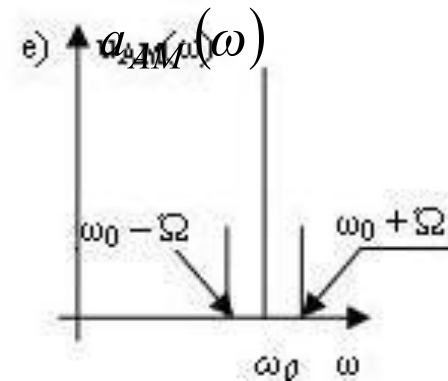
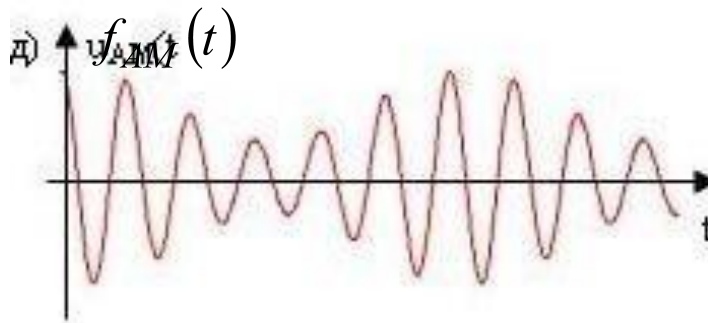
Несущее колебание



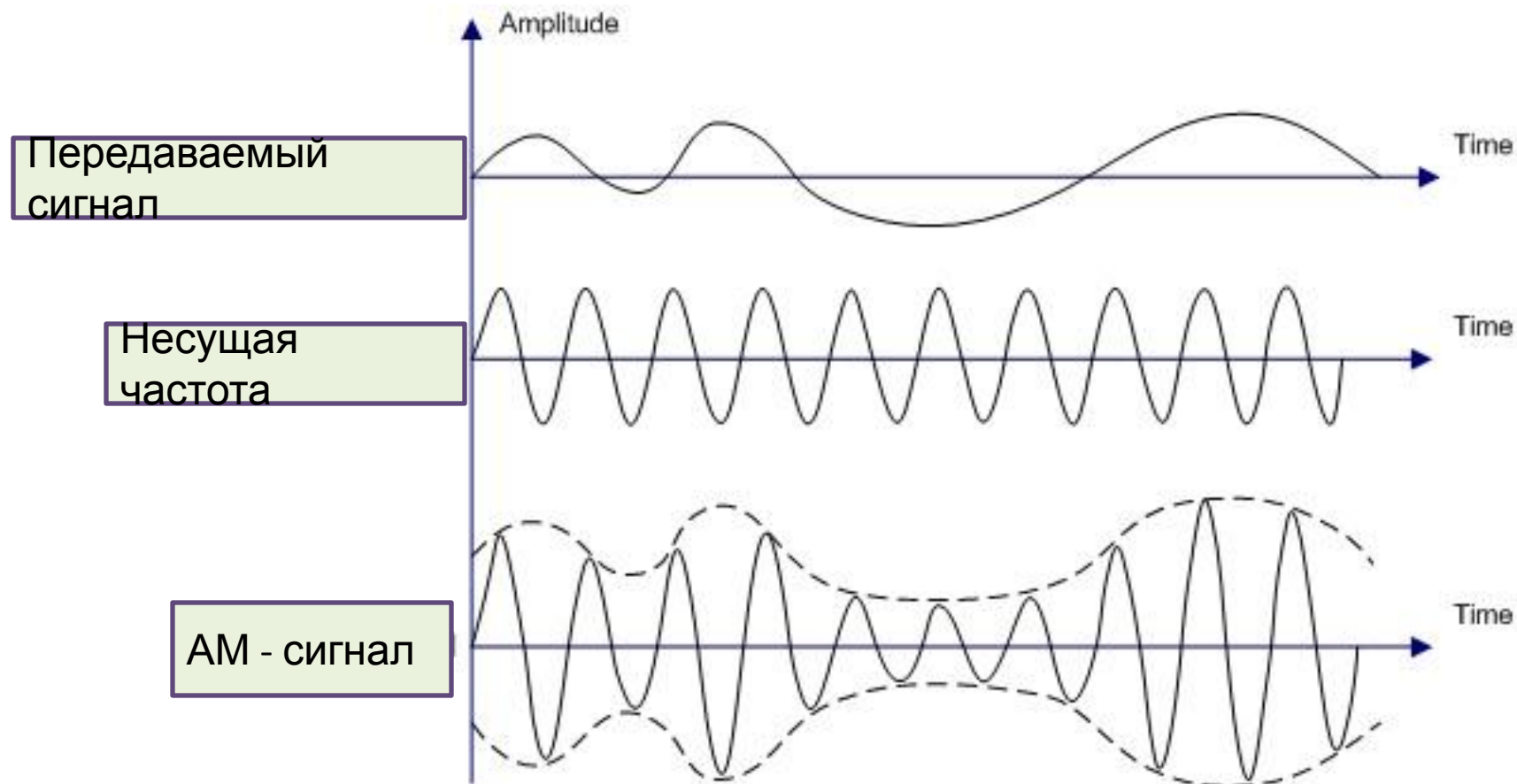
Передаваемый сигнал



Модулированный сигнал



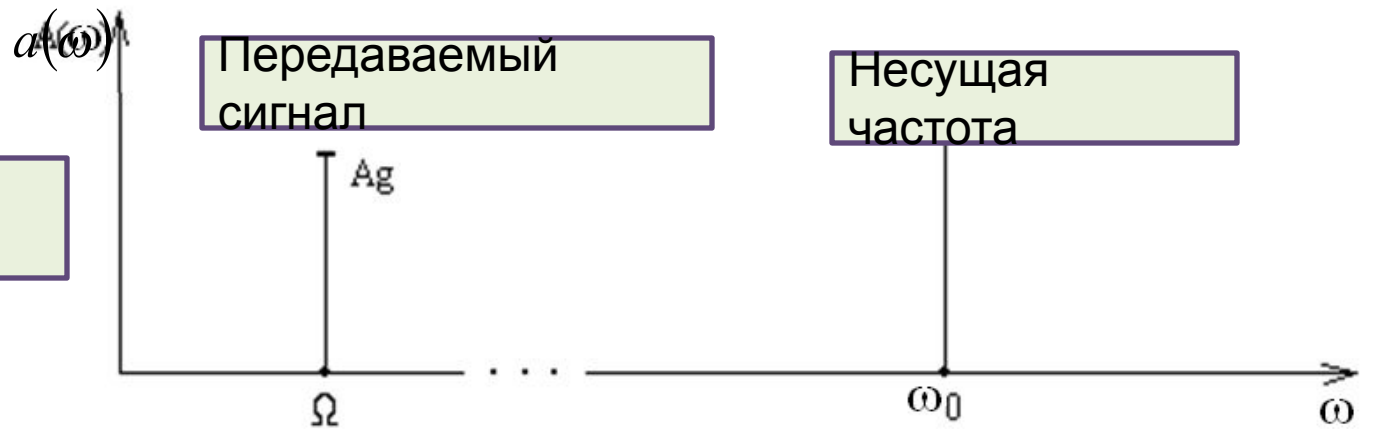
# Амплитудная модуляция



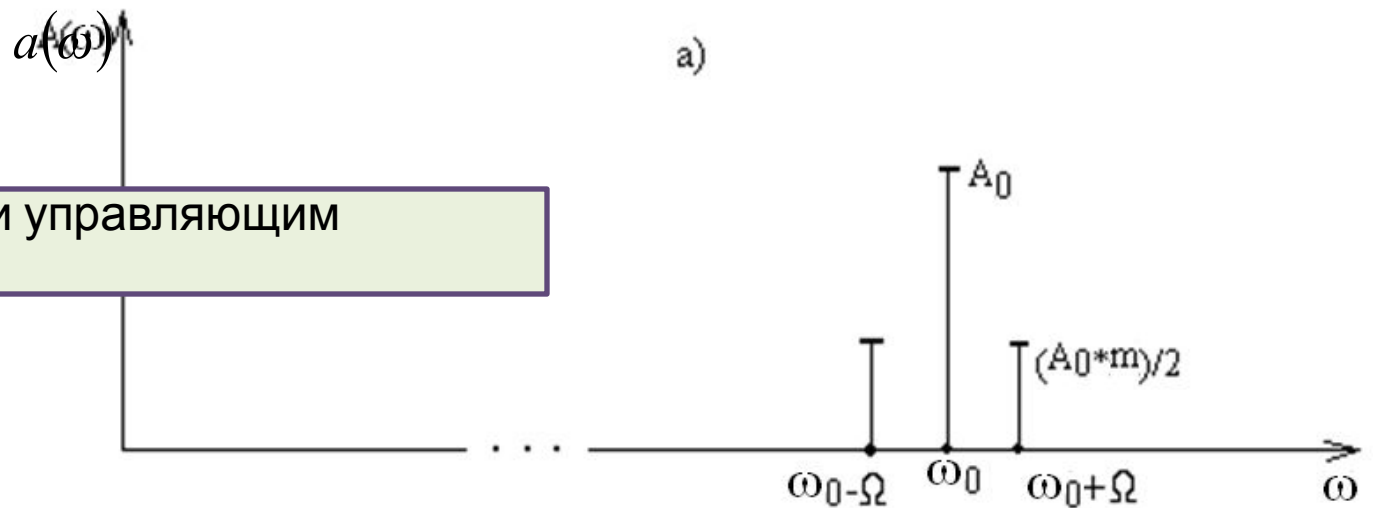
# Амплитудная модуляция

Спектральный состав:

а) до модуляции

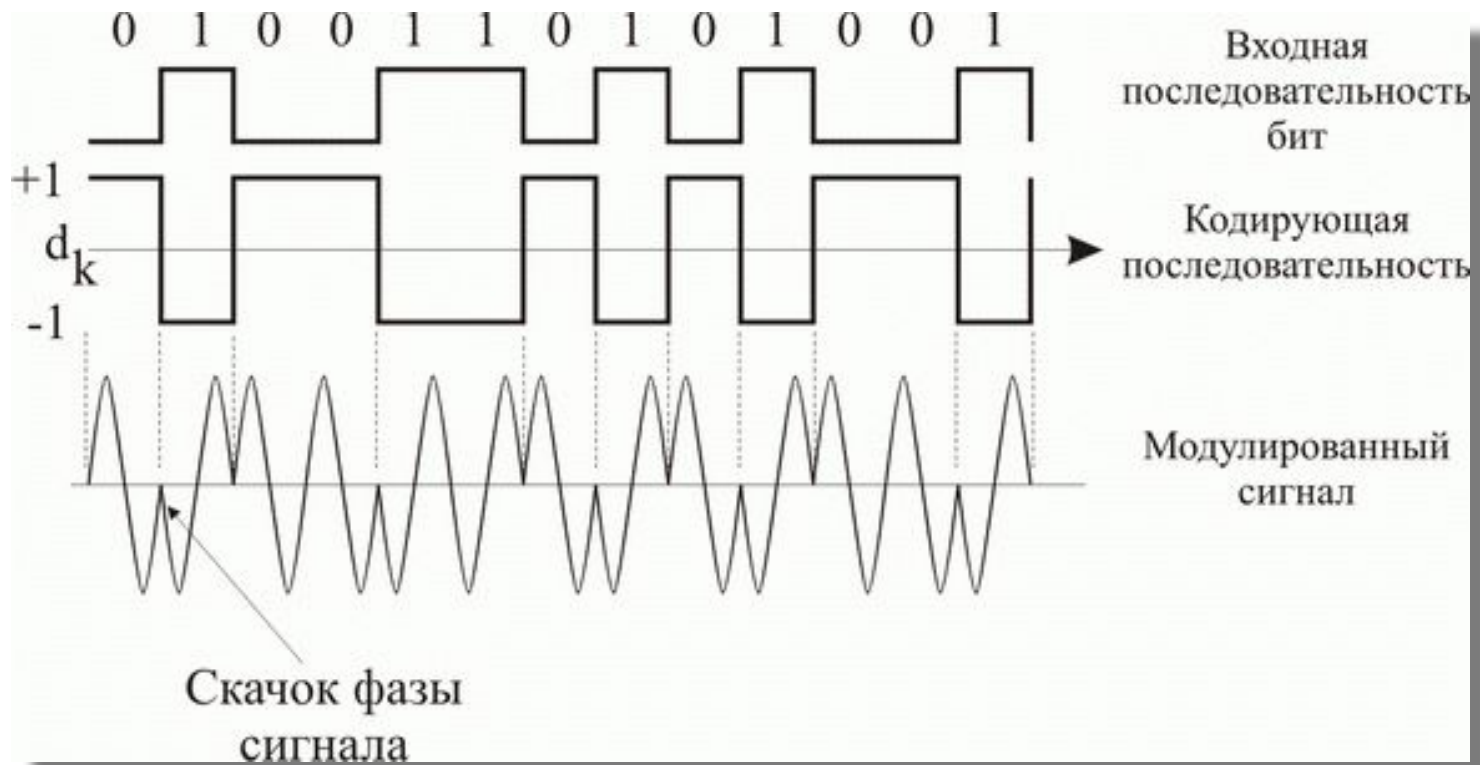


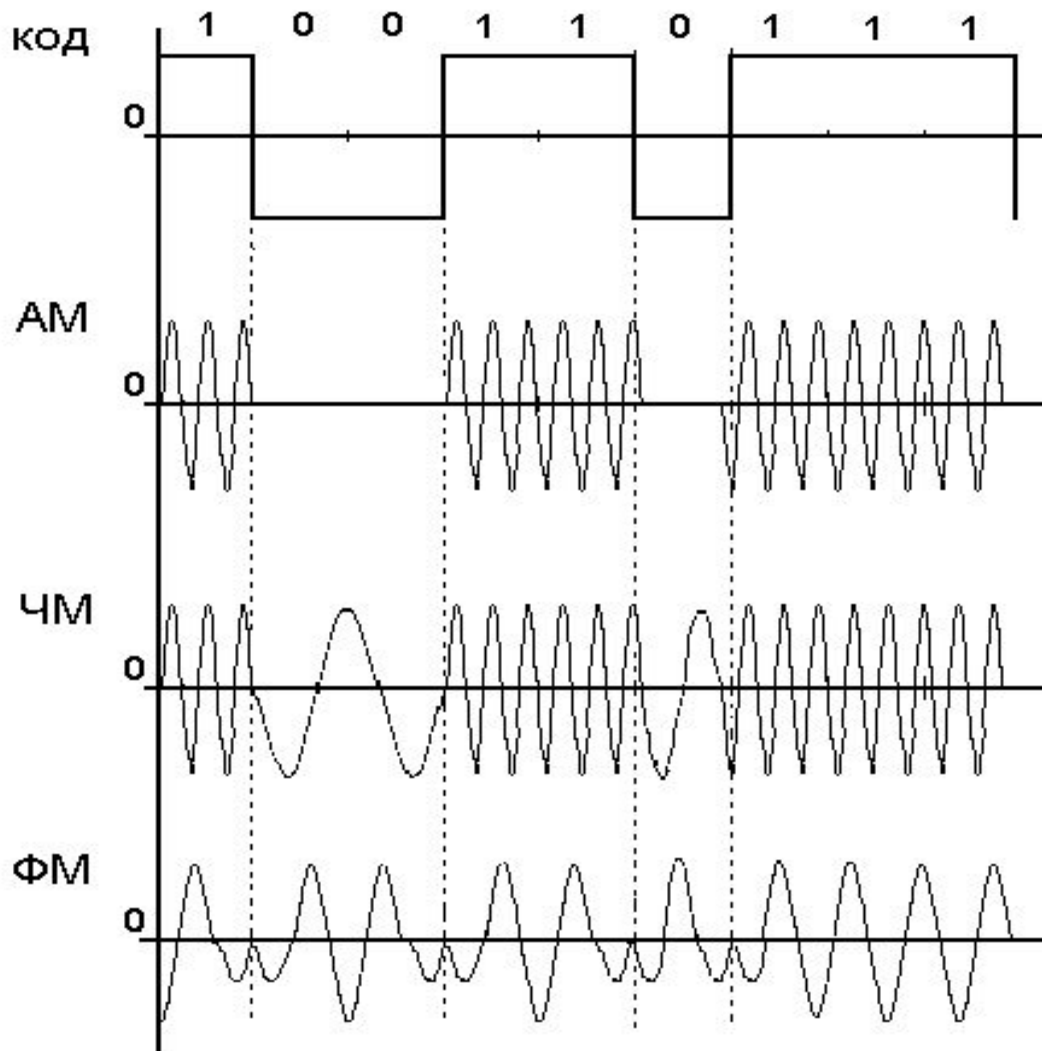
б) после модуляции управляющим сигналом



б)

# Фазовая модуляция





Амплитудная  
модуляция

АМ

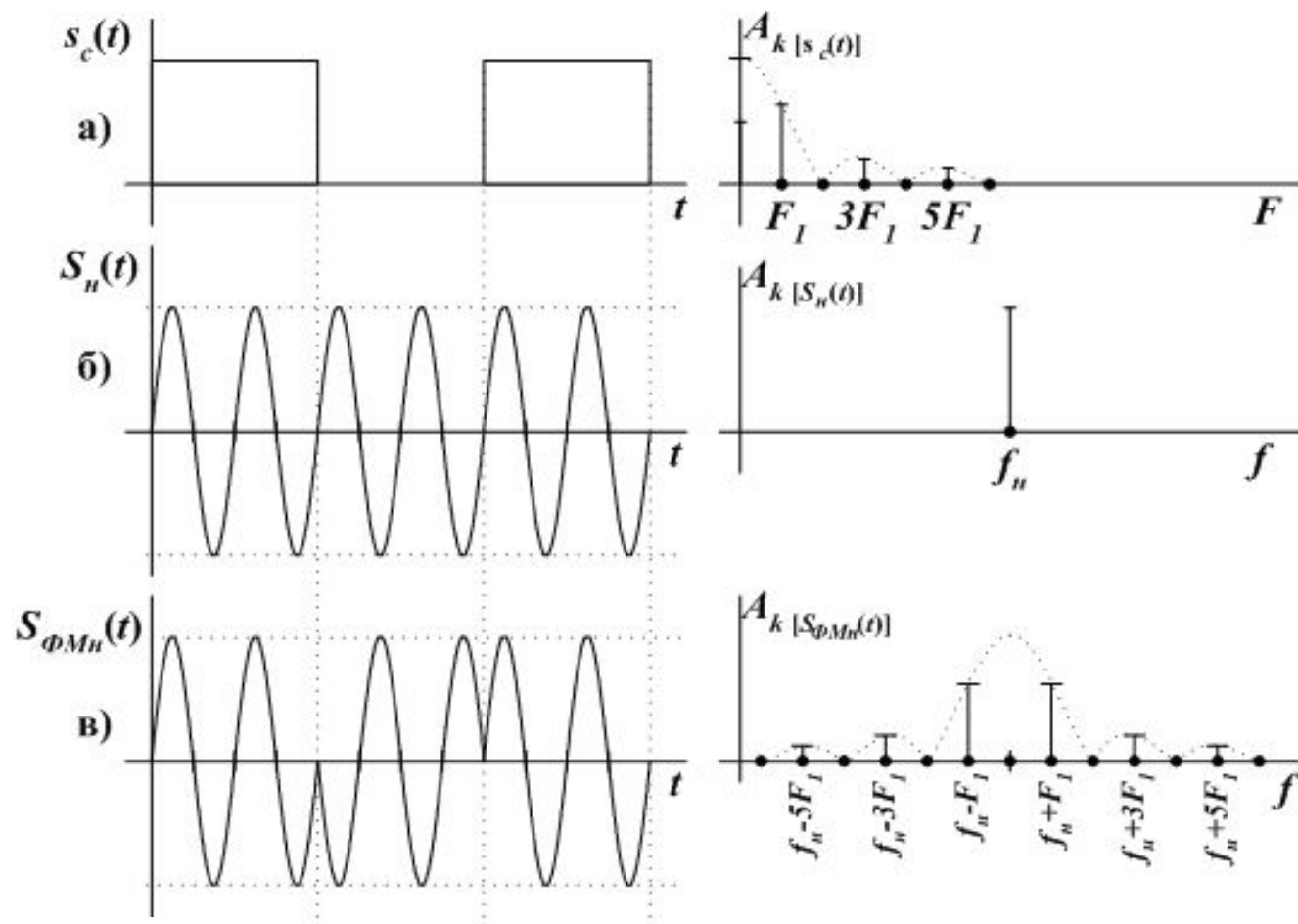
Частотная  
модуляция

ЧМ

Фазовая  
модуляция

ФМ





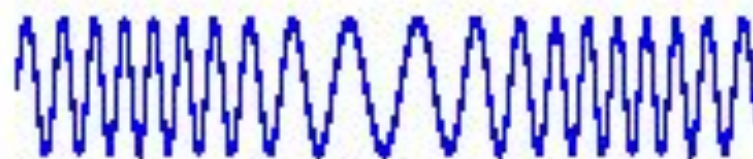
Временные и спектральные характеристики ФМн сигнала



Сигнал



AM



ЧМ