МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

по направлению 01.04.01. Математика, направленность (профиль)

Комплексный анализ и алгебра

на тему: «Исследование нормального строения конечных групп»

Выполнила:
Леонова Екатерина Сергеевна
студентка 2 курса 2 группы
Комплексный анализ и
алгебра

Научный руководитель:
Путилов Сергей Васильевич
к.ф.-м.н., доцент кафедры
математического анализа,
алгебры и геометрии

Брянск 2019 г

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из двух глав, в начале каждой главы дается краткий обзор рассматриваемых в ней вопросов и полученных основных результатов, заключения и списка литературы в количестве 27 наименований. Объем диссертации – 55 страниц.

Целью

диссертационного исследования является исследование нормального строения конечных групп, а также изучение конечных групп с заданными максимальными подгруппами и с некоторыми подгруппами простых индексов. При этом в диссертации решаются следующие задачи:

– изучение нормального строения конечных групп с некоторыми подгруппами простых индексов;

– изучение нормального строения конечных групп с заданными максимальными подгруппами;

– анализ и обобщение некоторых известных результатов о конечных группах с заданными максимальными подгруппами;

– доказательство новых свойств конечной группы, в которой ненормальные максимальные подгруппы нильпотентные или простые.

– подробное изложение в диссертации с доказательствами результатов из научных работ:

- В. С. Монахов, В. Н. Тютянов, “О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов”, Сиб. матем. журн., 48:4 (2007), 833–836.
- В. С. Монахов, В. Н. Тютянов, “О конечных группах с заданными максимальными подгруппами”, Сиб. матем. журн., 55:3 (2014), 553–561.
- В. С. Монахов, “О разрешимости группы с перестановочными подгруппами”, Матем. заметки, 93:3 (2013), 436–441
- В. С. Монахов, И. К. Чирик, « О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях», Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 6, 911–920

Для написания диссертации были изучены следующие статьи:

- **«Сибирский математический журнал» 2007 год статья [2] белорусских математиков В.С. Монахова и В.Н. Тютянова «О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов».**

В данной статье получена разрешимость конечной группы, в которой всякая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса.

Также в [2] доказывается теорема о том, что если G – конечная группа, у которой любая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса, то фактор - группа $G/F(G)$ сверхразрешима. Обратно, если M – максимальная подгруппа конечной группы G и $G/F(G)$ сверхразрешима, то каждая не максимальная подгруппа в фактор-группе G/M_G содержится в подгруппе простого индекса. Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G, а $M_G = \bigcap_{g\epsilon G} M^g$ – ядро подгруппы M в группе G.

- **«Сибирский математический журнал» 2014 год статья [3] В.С. Монахов и В.Н. Тютянов «О конечных группах с заданными максимальными подгруппами»**

В данной статье исследуются конечные группы с определенными максимальными подгруппами. В [3] доказано, что конечная ненильпотентная группа, в которой каждая максимальная подгруппа простая или нильпотентная является группой Шмидта.

- **«Математические заметки» 2013 год статья [19] В.С. Монахова «О разрешимости группы с перестановочными подгруппами».**

В этой статье В.С. Монахов доказал разрешимость конечной группы $G = PS$ при условии, что подгруппы P и S разрешимы и картеровы подгруппы из P перестановочны с картеровыми подгруппами из S.

- **«Математические заметки» 2014 год статья [20] В.С. Монахова и И.К. Чирик «О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях».**

В данной статье авторы, наряду с другими результатами, доказали сверхразрешимость конечной p - разрешимой 2-замкнутой группы $G = PS$, если силовские p -подгруппы в P и в S циклические.

В итоге мною была доказана теорема:

Теорема 2.5.1. Если каждая ненормальная максимальная подгруппа группы G нильпотентна или проста, то группа G разрешима или является группой Шмидта.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и группа G - контрпример минимального порядка. Пусть N и G/N - соответственно минимальная нормальная подгруппы группы G и произвольная фактор-группа группы G. Очевидно, что группа G/N наследует условия теоремы. Тогда по индукции G/N разрешима или группа Шмидта. Поэтому, если подгруппа $S(G) \neq 1$, то группа G разрешима. Значит, $S(G) = 1$. Тогда все нильпотентные максимальные подгруппы в G сопряжены, как нормализаторы силовских 2-подгрупп. Кроме того, каждая нильпотентная максимальная подгруппа является силовской 2-подгруппой в G.

Пусть A – ненормальная простая неабелева максимальная подгруппа группы G и M - максимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $G = AM$ и $A \cap M = 1$, а также $|G : M| = p \in \mathrm{P}$. Так как порядок A равен p, то подгруппа A нильпотентна. Значит, в группе G все ненормальные максимальные подгруппы имеют порядок $p=2$. Тогда каждая силовская q-подгруппа, $q \in \mathrm{P}$, $q \neq 2$, нормальна в G, что противоречиво.

Пусть в G все максимальные подгруппы нильпотентные. Тогда по **[4]** G - нильпотентная группа или группа Шмидта.

Пусть G - простая группа. Тогда каждая нильпотентная максимальная подгруппа в G будет силовской 2-подгруппой и по теореме 1.3.31 $G = PSL(2,q)$ с $q=9$ или простым числом $q = 2^n \pm 1 \geq 17$.

Пусть $G \cong PSL(2,9)$. Так как $|G| = |PSL(2,9)| = ((9-1)\cdot(9+1)\cdot 9)/2 = 8\cdot 5\cdot 9$, то $|G:N_G(G_3)| = q+1 = 10$, откуда $|N_G(G_3)| = 36$. Так как $N_G(G_3) -$ максимальная подгруппа в G, то по условию $N_G(G_3) -$ простая группа, что противоречиво. Следовательно, $q \neq 9$.

Пусть простое число $q = 2^n + 1$. Тогда $|N_G(G_q)| = (q-1)q/2 = (2^n+1-1)$ $(2^n+1)/2 = 2^{n-1}\cdot(2^n+1)$ и $N_G(G_q)$- простая максимальная подгруппа в G, что невозможно. Значит, $q \neq 2^n+1$.

Пусть $q = 2^n - 1$. Тогда в G есть непростая максимальная диэдральная подгруппа порядка $(q-1)$. Значит, $q \neq 2^n - 1$. Значит, группа G непростая. #

Заключение

В диссертации решены следующие задачи:

– изучено строение некоторых конечных групп с заданными подгруппами;

– изучены и изложены с подробными доказательствами результаты из научных работ слайд 4;

– проведен анализ результатов о конечных группах с заданными подгрупами из работ слайда 4 и получено обобщение теоремы 1 из статьи В. С. Монахова, В. Н. Тютянова, «О конечных группах с заданными максимальными подгруппами»;

– доказана теорема о том, что если каждая ненормальная максимальная подгруппа конечной группы G нильпотентна или проста, то группа G разрешима или группа Шмидта.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

по направлению 01.04.01. Математика, направленность (профиль)

Комплексный анализ и алгебра

на тему: «Исследование нормального строения конечных групп»

Выполнила:
Леонова Е.С.
студентка 2 курса 2 группы
Комплексный анализ и
алгебра

Научный руководитель:
Путилов С.В.
к.ф.-м.н., доцент кафедры
математического анализа,
алгебры и геометрии

Брянск 2019 г