**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии

# ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

**по направлению 01.04.01. Математика, направленность (профиль)**

**Комплексный анализ и алгебра**

**на тему: «Исследование нормального строения конечных групп»**

Выполнила:
Леонова Екатерина Сергеевна
студентка 2 курса 2 группы
Комплексный анализ и
алгебра

Научный руководитель:
Путилов Сергей Васильевич
к.ф.-м.н., доцент кафедры
математического анализа,
алгебры и геометрии

**Брянск 2019 г**

# Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из двух глав, в начале каждой главы дается краткий обзор рассматриваемых в ней вопросов и полученных основных результатов, заключения и списка литературы в количестве 27 наименований. Объем диссертации – 55 страниц.

# Целью

**диссертационного исследования** является исследование нормального строения конечных групп, а также изучение конечных групп с заданными максимальными подгруппами и с некоторыми подгруппами простых индексов. При этом в диссертации решаются следующие задачи:

– изучение нормального строения конечных групп с некоторыми подгруппами простых индексов;

– изучение нормального строения конечных групп с заданными максимальными подгруппами;

– анализ и обобщение некоторых известных результатов о конечных группах с заданными максимальными подгруппами;

– доказательство новых свойств конечной группы, в которой ненормальные максимальные подгруппы нильпотентные или простые.

## – подробное изложение в диссертации с доказательствами результатов из научных работ:

- В. С. Монахов, В. Н. Тютянов, “О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов”, Сиб. матем. журн., 48:4 (2007), 833–836.
- В. С. Монахов, В. Н. Тютянов, “О конечных группах с заданными максимальными подгруппами”, Сиб. матем. журн., 55:3 (2014), 553–561.
- В. С. Монахов, “О разрешимости группы с перестановочными подгруппами”, Матем. заметки, 93:3 (2013), 436–441
- В. С. Монахов, И. К. Чирик, « О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях», Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 6, 911–920

# Для написания диссертации были изучены следующие статьи:

- **«Сибирский математический журнал» 2007 год статья [2] белорусских математиков В.С. Монахова и В.Н. Тютянова «О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов».**

В данной статье получена разрешимость конечной группы, в которой всякая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса.

Также в [2] доказывается теорема о том, что если $G$ – конечная группа, у которой любая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса, то фактор - группа $G/F(G)$ сверхразрешима. Обратно, если $M$ – максимальная подгруппа конечной группы $G$ и $G/F(G)$ сверхразрешима, то каждая не максимальная подгруппа в фактор-группе $G/M_G$ содержится в подгруппе простого индекса. Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы $G$, а $M_G = \bigcap_{g \in G} M^g$ – ядро подгруппы $M$ в группе $G$.

- **«Сибирский математический журнал» 2014 год статья [3] В.С. Монахов и В.Н. Тютянов «О конечных группах с заданными максимальными подгруппами»**

В данной статье исследуются конечные группы с определенными максимальными подгруппами. В [3] доказано, что конечная ненильпотентная группа, в которой каждая максимальная подгруппа простая или нильпотентная является группой Шмидта.

- **«Математические заметки» 2013 год статья [19] В.С. Монахова «О разрешимости группы с перестановочными подгруппами».**

В этой статье В.С. Монахов доказал разрешимость конечной группы $G = PS$ при условии, что подгруппы $P$ и $S$ разрешимы и картеровы подгруппы из $P$ перестановочны с картеровыми подгруппами из $S$.

- **«Математические заметки» 2014 год статья [20] В.С. Монахова и И.К. Чирик «О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях».**

В данной статье авторы, наряду с другими результатами, доказали сверхразрешимость конечной $p$ - разрешимой 2-замкнутой группы $G = PS$, если силовские $p$ -подгруппы в $P$ и в $S$ циклические.

# В итоге мною была доказана теорема:

**Теорема 2.5.1**. Если каждая ненормальная максимальная подгруппа группы G нильпотентна или проста, то группа G разрешима или является группой Шмидта.

**Доказательство**. Допустим, что теорема неверна и группа $G$ - контрпример минимального порядка. Пусть $N$ и $G/N$ - соответственно минимальная нормальная подгруппы группы $G$ и произвольная фактор-группа группы $G$. Очевидно, что группа $G/N$ наследует условия теоремы. Тогда по индукции $G/N$ разрешима или группа Шмидта. Поэтому, если подгруппа $S(G) \neq 1$, то группа $G$ разрешима. Значит, $S(G) = 1$. Тогда все нильпотентные максимальные подгруппы в $G$ сопряжены, как нормализаторы силовских 2-подгрупп. Кроме того, каждая нильпотентная максимальная подгруппа является силовской 2-подгруппой в $G$.

Пусть $A$ – ненормальная простая неабелева максимальная подгруппа группы $G$ и $M$ - максимальная нормальная подгруппа в $G$. Тогда $G = AM$ и $A \cap M = 1$, а также $|G : M| = p \in \mathrm{P}$ . Так как порядок $A$ равен $p$, то подгруппа $A$ нильпотентна. Значит, в группе $G$ все ненормальные максимальные подгруппы имеют порядок $p=2$. Тогда каждая силовская $q$-подгруппа, $q \in \mathrm{P}$, $q \neq 2$, нормальна в $G$, что противоречиво.

Пусть в $G$ все максимальные подгруппы нильпотентные. Тогда по **[4]** $G$ - нильпотентная группа или группа Шмидта.

Пусть $G$ - простая группа. Тогда каждая нильпотентная максимальная подгруппа в $G$ будет силовской 2-подгруппой и по теореме 1.3.31 $G= PSL(2,q)$ с $q=9$ или простым числом $q=2^n \pm 1 \geq 17$ .

Пусть $G \cong PSL(2,9)$. Так как $|G|=|PSL(2,9)|=((9-1)\cdot(9+1)\cdot 9)/2=8\cdot 5\cdot 9$, то $|G:N_G(G_3)|=q+1=10$, откуда $|N_G(G_3)|=36$. Так как $N_G(G_3)-$ максимальная подгруппа в $G$, то по условию $N_G(G_3)-$ простая группа, что противоречиво. Следовательно, $q \neq 9$.

Пусть простое число $q=2^n+1$. Тогда $|N_G(G_q)|=(q-1)q/2=(2^n+1-1)$ $(2^n+1)/2=2^{n-1}\cdot(2^n+1)$ и $N_G(G_q)$- простая максимальная подгруппа в $G$, что невозможно. Значит, $q \neq 2^n+1$.

Пусть $q=2^n-1$. Тогда в $G$ есть непростая максимальная диэдральная подгруппа порядка $(q-1)$. Значит, $q \neq 2^n-1$. Значит, группа $G$ непростая. #

# Заключение

В диссертации решены следующие задачи:

– изучено строение некоторых конечных групп с заданными подгруппами;

– изучены и изложены с подробными доказательствами результаты из научных работ слайд 4;

– проведен анализ результатов о конечных группах с заданными подгрупами из работ слайда 4 и получено обобщение теоремы 1 из статьи В. С. Монахова, В. Н. Тютянова, «О конечных группах с заданными максимальными подгруппами»;

– доказана теорема о том, что если каждая ненормальная максимальная подгруппа конечной группы G нильпотентна или проста, то группа G разрешима или группа Шмидта.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

**по направлению 01.04.01. Математика, направленность (профиль)**

**Комплексный анализ и алгебра**

**на тему: «Исследование нормального строения конечных групп»**

Выполнила:
Леонова Е.С.
студентка 2 курса 2 группы
Комплексный анализ и алгебра

Научный руководитель:
Путилов С.В.
к.ф.-м.н., доцент кафедры
математического анализа,
алгебры и геометрии

**Брянск 2019 г**