Простейшие тригонометрические уравнения

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1. $\cos t = a$, где $|a| \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$\boxed{t = \pm\arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z}$$

Частные случаи

1) $\underline{\cos t = 0}$
$t = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$

2) $\underline{\cos t = 1}$
$t = 0 + 2\pi k$, $k \in Z$

3) $\underline{\cos t = -1}$
$t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

2. $\sin t = a$, *где* $|a| \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$\boxed{t = (-1)^k \arcsin \boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z}$$

Частные случаи

1) $\underline{\sin t = 0}$
$t = 0 + \pi k$, $k \in Z$

2) $\underline{\sin t = 1}$
$t = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$

3) $\underline{\sin t = -1}$
$t = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$

3. $\mathrm{tg}\, t = a$, $a \in R$

$t = \mathrm{arctg}\, \boldsymbol{a} + \pi k$, $k \in Z$

4. $\mathrm{ctg}\, t = a$, $a \in R$

$t = \mathrm{arcctg}\, \boldsymbol{a} + \pi k$, $k \in Z$

Решение простейших уравнений

1) $\mathrm{tg}2x = -1$

$2x = \mathrm{arctg}\,(-1) + \pi k,\ k \in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$.

2) $\cos(x+\pi/3) = ½$

$x+\pi/3 = \pm\arccos 1/2 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

3. $\mathrm{tg}t = a,\ a \in R$

$t = \mathrm{arctg}\,a + \pi k,\ k \in Z$

3) $\sin(\pi - x/3) = 0$

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

частный случай

$x/3 = \pi k,\ k \in Z$

$x = 3\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $3\pi k,\ k \in Z$.

1. $\cos t = a$, где $|a| \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Решение простейших уравнений

$$\sin\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$$

Уравнение уже имеет простейший

вид $t=\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)$, однако можно

применить формулы приведения и упростить его.

$$-\cos 4x=0$$

$$\cos \underbrace{4x}_{t}=0$$

Это частный вид уравнения cos t=a

a=0

$$\underbrace{4x}_{t}=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

Разделим обе части на 4.

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

Примеры уравнений.

$$\sqrt{2}\cos 4x - 1 = 0$$

Уравнение переносом слагаемого и делением обеих частей легко сводится к простейшему.

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

t

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k$$

$$4x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Разделим обе части на 4.

$$x = \pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$

Решение простейших уравнений

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=0$$

Уравнение уже имеет простейший

вид $t=\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$

Это частный вид
уравнения cos t=a
a=o

$$\frac{\pi}{3}-3x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$-3x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi k$$

$$-3x=\frac{\pi}{6}+\pi k \quad \Big| \div(-3)$$

$$x=-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$

Примеры уравнений.

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Уравнение уже имеет простейший вид $t=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$, **однако, можно использовать четность функции cos, применить формулы приведения и упростить его.**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$$

$$2x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k \quad \Big| \div 2$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

1 вариант

$$\sqrt{2}\cos 4x - 1 = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \frac{1}{2}$$

$$-2\cos x = 0$$

$$-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{4} = 3$$

2 вариант

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(-x) = -1$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$$

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1.cost = *a* , где |***a***| ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = arccos\,\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -arccos\,\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$\boxed{t = \pm arccos\,\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z}$$

Частные случаи

1)<u>cost=0</u>
t = π/2+πk, kЄZ

2)<u>cost=1</u>
t = 0+2πk, kЄZ

3)<u>cost = -1</u>
t = π+2πk, kЄZ

2.sint = *a*, *где* | *a* |≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = arcsin\,\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - arcsin\,\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$\boxed{t = (-1)^k arcsin\,\boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z}$$

Частные случаи

1)<u>sint=0</u>
t = 0+πk, kЄZ

2)<u>sint=1</u>
t = π/2+2πk, kЄZ

3)<u>sint = - 1</u>
t = - π/2+2πk, kЄZ

3. tgt = *a*, *a*ЄR

t = arctg ***a*** + πk, kЄZ

4. ctgt = *a*, *a*ЄR

t = arcctg ***a*** + πk, kЄZ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрические формулы

Основные тождества:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$;

$ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$

Формулы кратных углов:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg2\alpha = \dfrac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad ctg2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2 \cdot ctg\alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \qquad ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

Формулы половинных углов:

$2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \qquad 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

$1 \pm \sin\alpha = (\sin\dfrac{\alpha}{2} \pm \cos\dfrac{\alpha}{2})^2 \qquad tg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

При использовании формул, содержащих tg и ctg, необходимо учитывать О.Д.З. левой и правой частей формул.

Формулы суммы:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$ctg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$tg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\pm\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

Формулы произведения:

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

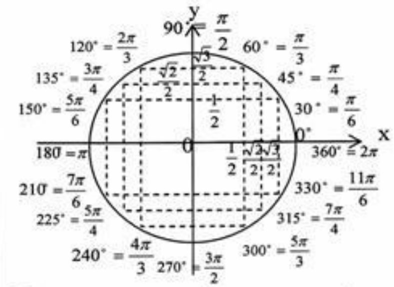
$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

Выражение функций через $tg\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)} \qquad \cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}$

$tg\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 - tg^2(\alpha/2)}$



π *рад* $= 180°$

1 *рад* $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ *рад*

Обратные тригонометрические функции:

$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1;1] \qquad \cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1;1]$

$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \qquad \arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0;\pi]$

$tg(arctga) = a, \quad a \in R \qquad ctg(arcctga) = a, \quad a \in R$

$arctg(tga) = a, \quad a \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \qquad arcctg(ctga) = a, \quad a \in (0;\pi)$

Четность тригонометр-ких и обратнотриг-их функций:

1. четная: $\cos(-x) = \cos x$, $f(-x) = f(x)$
2. общего вида: $arc\cos(-x) = \pi - \arccos x$

   $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$
3. нечетные: остальные, $f(-x) = -f(x)$

Рейтинг углов.

1. табличные: 30°, 45°, 180°, 120°, 210°, 330°…(ф-лы приведения)
2. через 15: 15° = 45° - 30°, 105° = 60° + 45°,…(формулы сложения)
3. одинаковые: 17°, α, …(основные тождества)
4. кратные: 17°, 34°; 2α, α, $\dfrac{\alpha}{2}$ …(кратных и половинных углов)
5. сумма или разность табличная: 127° + 53° = 180°, 93° – 3° = 90°, 2° + 58° = 60°, 35° – 5° = 30° (формулы приведения, суммы, произведения, сложения)
6. произвольные: α и β; 5° и 2° (формулы суммы, произведения, сложения)

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0
ctg x	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—