

Простейшие тригонометрические уравнения

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1. $\cos t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) $\cos t = 0$
 $t = \pi/2 + \pi k, k \in Z$

2) $\cos t = 1$
 $t = 0 + 2\pi k, k \in Z$

3) $\cos t = -1$
 $t = \pi + 2\pi k, k \in Z$

2. $\sin t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) $\sin t = 0$
 $t = 0 + \pi k, k \in Z$

2) $\sin t = 1$
 $t = \pi/2 + 2\pi k, k \in Z$

3) $\sin t = -1$
 $t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in Z$

3. $\operatorname{tg} t = a, a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in Z$$

4. $\operatorname{ctg} t = a, a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z$$

Решение простейших уравнений

$$1) \quad \operatorname{tg} 2x = -1$$

$$2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$.

$$2) \quad \cos(x + \pi/3) = 1/2$$

$$x + \pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \pi/3 = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$3. \operatorname{tgt} = a, a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \quad \sin(\pi - x/3) = 0$$

упростим по формулам
приведения

$$\sin(x/3) = 0$$

частный случай

$$x/3 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $3\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$1. \cos t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Решение простейших уравнений

$$\sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Уравнение уже имеет простейший

вид $t = \left(4x + \frac{3\pi}{2}\right)$, однако можно

применить формулы приведения и упростить его.

$$-\cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = 0$$

Это частный вид
уравнения $\cos t = a$
 $a = 0$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Разделим обе части на 4.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

Примеры уравнений.

$$\sqrt{2} \cos 4x - 1 = 0$$

Уравнение переносом слагаемого и делением обеих частей легко сводится к простейшему.

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

t

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k$$

$$4x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Разделим обе части на 4.

$$x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$

Решение простейших уравнений

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = 0$$

Уравнение уже имеет простейший

вид $t = \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$

Это частный вид
уравнения $\cos t = a$
 $a = 0$

$$\frac{\pi}{3} - 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

→

$$-3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$-3x = \frac{\pi}{6} + \pi k \quad | \quad \div (-3)$$

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$

Примеры уравнений.

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$$

Уравнение уже имеет простейший

вид $t = \left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ однако,

можно использовать четность функции \cos , применить формулы приведения и упростить его.

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \quad | \quad \div 2$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

1 вариант

$$\sqrt{2} \cos 4x - 1 = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \frac{1}{2}$$

$$-2 \cos x = 0$$

$$-\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{4} = 3$$

2 вариант

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(-x) = -1$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1. $\cos t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1) $\cos t = 0$
 $t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos t = 1$
 $t = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\cos t = -1$
 $t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

2. $\sin t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1) $\sin t = 0$
 $t = 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin t = 1$
 $t = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin t = -1$
 $t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3. $\operatorname{tg} t = a, a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

4. $\operatorname{ctg} t = a, a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Тригонометрические формулы

Основные тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

Формулы кратных углов:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

Формулы половинных углов:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$1 \pm \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

При использовании формул, содержащих tg и ctg , необходимо учитывать О.Д.З. левой и правой частей формул.

Формулы суммы:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\pm \cos(\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

Формулы произведения:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

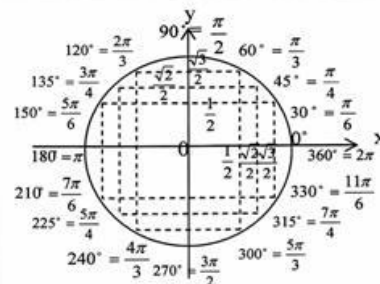
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Выражение функций через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$$



$$\pi \text{ рад} = 180^\circ$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57'$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1; 1] \quad \cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0; \pi]$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} a) = a, \quad a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} a) = a, \quad a \in (0; \pi)$$

Четность тригонометрических и обратнотригонометрических функций:

- четная: $\cos(-x) = \cos x$, $f(-x) = f(x)$
- общего вида: $\operatorname{arc} \cos(-x) = \pi - \arccos x$
 $\operatorname{arc} \operatorname{ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$
- нечетные: остальные, $f(-x) = -f(x)$

Рейтинг углов.

- табличные: 30°, 45°, 180°, 120°, 210°, 330°... (ф-лы приведения)
- через 15°: 15° = 45° - 30°, 105° = 60° + 45°... (формулы сложения)
- одинаковые: 17°, α, ... (основные тождества)
- кратные: 17°, 34°, 2α, α, $\frac{\alpha}{2}$... (кратных и половинных углов)
- сумма или разность табличная: 127° + 53° = 180°, 93° - 3° = 90°, 2° + 58° = 60°, 35° - 5° = 30° (формулы приведения, суммы, произведения, сложения)
- произвольные: α и β; 5 и 2 (формулы суммы, произведения, сложения)

градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0
ctg x	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—