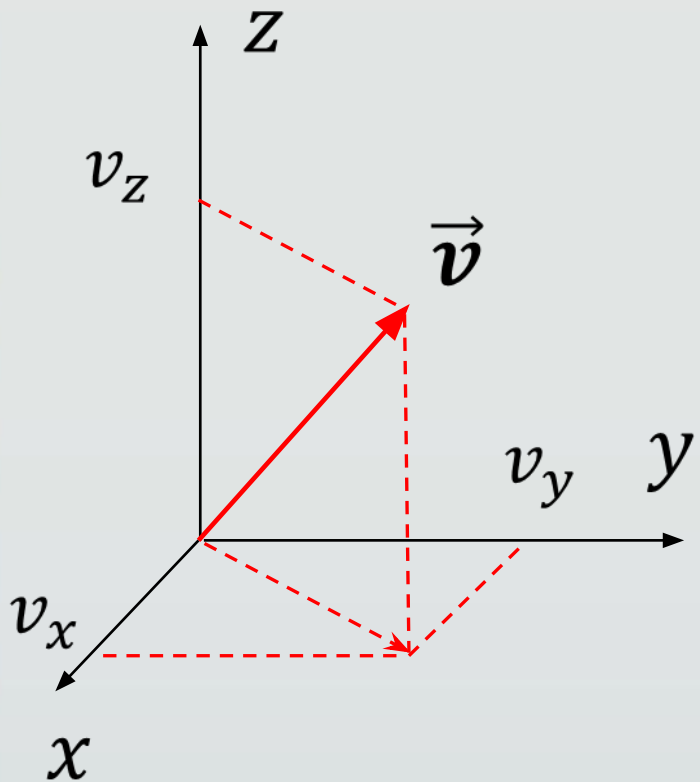




Лекция 1
Векторный анализ и
уравнения Максвелла

Векторы

Координаты тела \vec{x} , скорость тела \vec{v} , ускорение \vec{a} , и сила \vec{F} являются векторами, т.е. величинами, имеющими направление



$$\vec{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

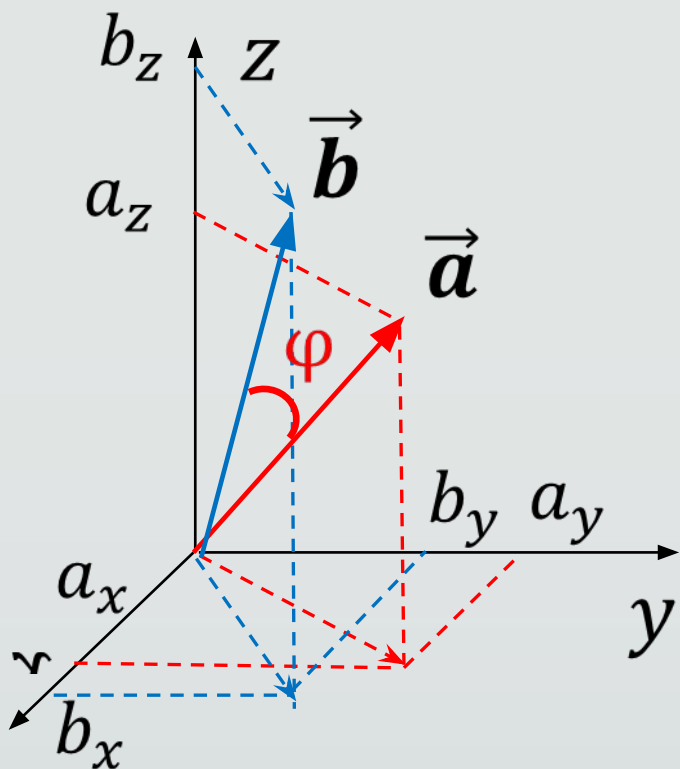
$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (F_1, F_2, F_3)$$

Векторное произведение векторов

Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} -
это число, обозначаемое (\vec{a}, \vec{b}) и равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$,

$$\text{где } |\vec{a}|^2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ и } |\vec{b}|^2 = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2},$$

φ – угол между \vec{a} и \vec{b}



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

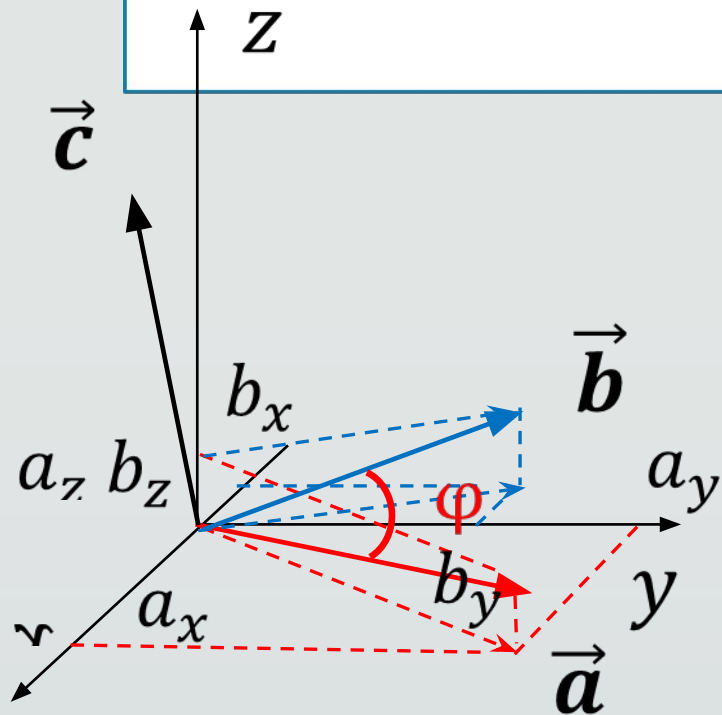
$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} - это вектор, обозначаемый $[\vec{a} \times \vec{b}]$, длина которого равна $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\varphi)$, а сам вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \vec{a} и \vec{b} .

$$\text{Здесь } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ и } |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2},$$

φ – угол между \vec{a} и \vec{b}



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

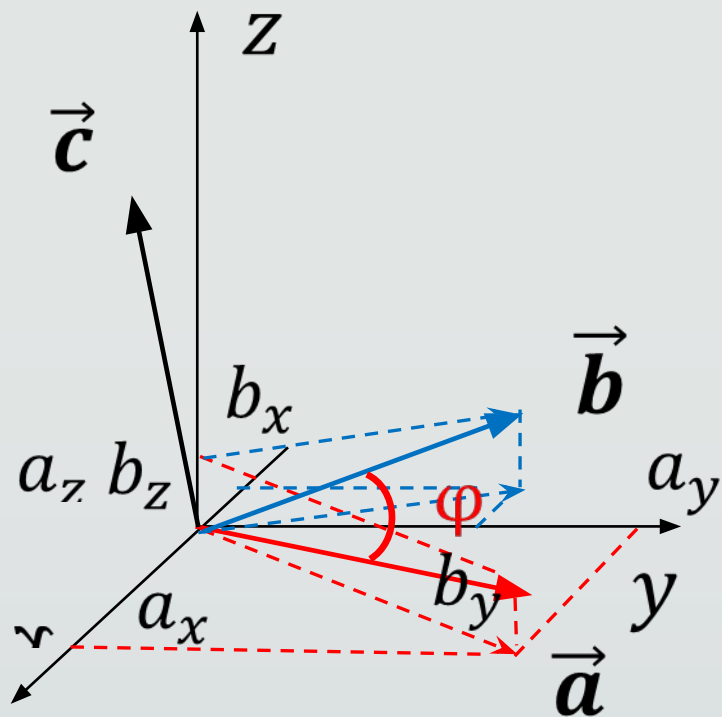
$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Векторное произведение векторов

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$



$$c_x = [\vec{a}, \vec{b}]_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = [\vec{a}, \vec{b}]_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = [\vec{a}, \vec{b}]_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Свойства векторного и скалярного произведений

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0, \quad (\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0$$

$$(\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \det \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$$

Индексная форма записи

$$\overset{\square}{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\overset{\square}{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)$$


$$(\overset{\square}{\mathbf{a}}, \overset{\square}{\mathbf{b}}) = \sum_{\beta=1}^3 a_{\beta} b_{\beta}$$

$$c_{\alpha} = [\overset{\square}{\mathbf{a}}, \overset{\square}{\mathbf{b}}]_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\chi=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\chi} a_{\beta} b_{\chi}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\chi} = -\varepsilon_{\alpha\chi\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha\chi}$$

$$\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \quad \varepsilon_{132} = -1,$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha\beta} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{\beta\alpha\alpha} = 0$$



Дифференциальные операции с векторными функциями

Дивергенция

Дивергенцией векторного поля $\overrightarrow{\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)}$ называется функция

$$f(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}(\overrightarrow{\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)}),$$

вычисляемая по правилу:

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = (a_1(\mathbf{x}, t), a_2(\mathbf{x}, t), a_3(\mathbf{x}, t))$$

Ротор

Ротором векторного поля $\overline{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t)$ называется вектор-функция

$$\vec{c}(\mathbf{x}, t) = \mathit{rot}(\overline{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t)),$$

вычисляемая по правилу:

$$\mathit{rot}(\overline{\mathbf{a}}) = [\nabla \times \overline{\mathbf{a}}],$$

$$\mathit{rot}(\overline{\mathbf{a}})_{\alpha} = [\nabla \times \overline{\mathbf{a}}]_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}$$

$$\mathit{rot}(\overline{\mathbf{a}})_x = [\nabla \times \overline{\mathbf{a}}]_x = \frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y,$$

$$\mathit{rot}(\overline{\mathbf{a}})_y = [\nabla \times \overline{\mathbf{a}}]_y = \frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z,$$

$$\mathit{rot}(\overline{\mathbf{a}})_z = [\nabla \times \overline{\mathbf{a}}]_z = \frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x,$$

Градиент

Градиентом функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ называется векторное поле

$$\vec{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t) = \vec{\nabla}\varphi(\mathbf{x}, t),$$

вычисляемая по правилу:

$$\vec{\mathbf{g}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$$g_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

$$\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{g}}) = \operatorname{rot}(\vec{\nabla}\varphi) = 0$$

Простейшие свойства

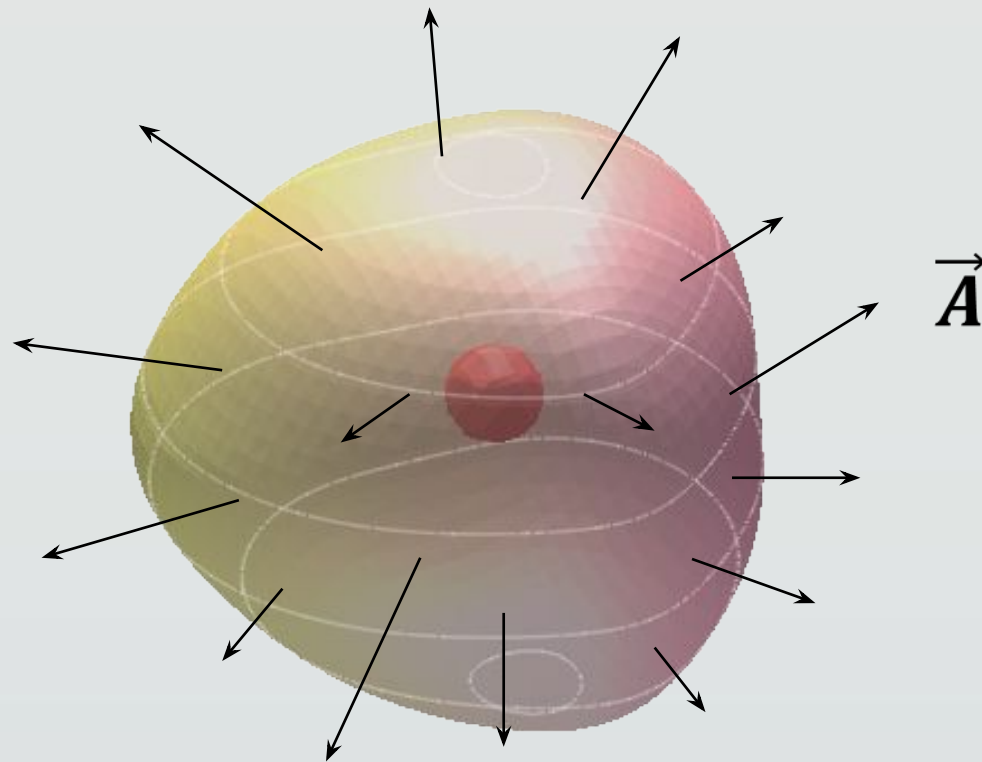
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{a})) = \operatorname{div}([\nabla \times \mathbf{a}]) = 0$$

$$\operatorname{div}(\nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{a})) = [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{a}]] = \nabla \operatorname{div}(\mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$$

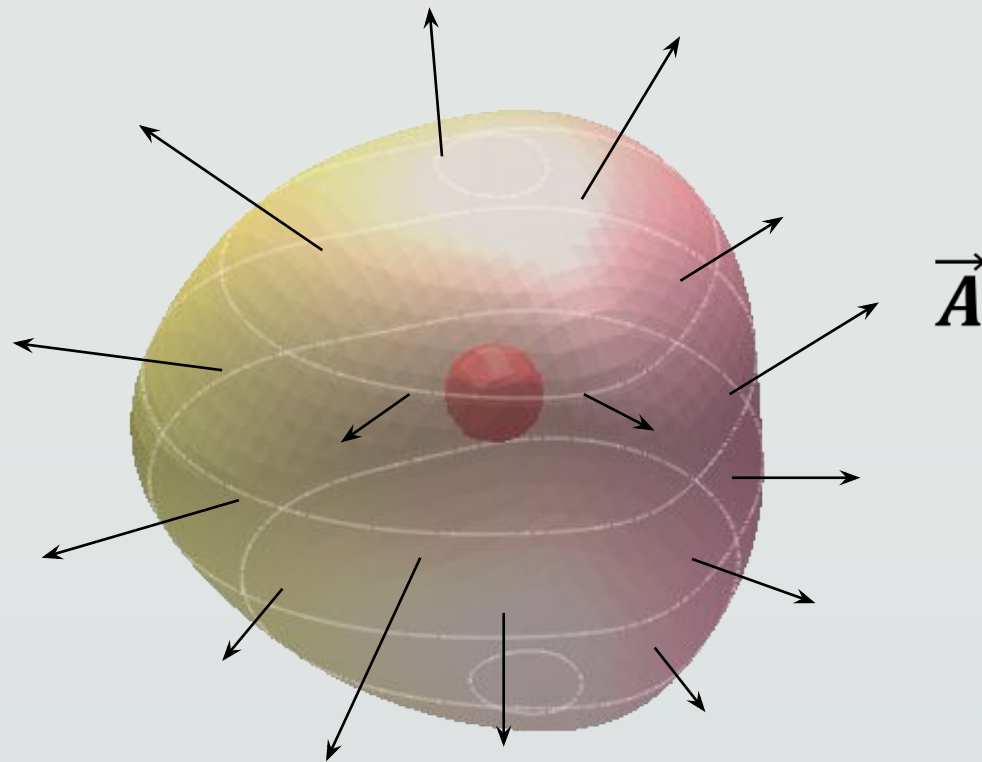
Теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{\mathbf{A}}) dV = \oint_{\partial V} (\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{n}}) d\sigma$$



Теорема Остроградского-Гаусса

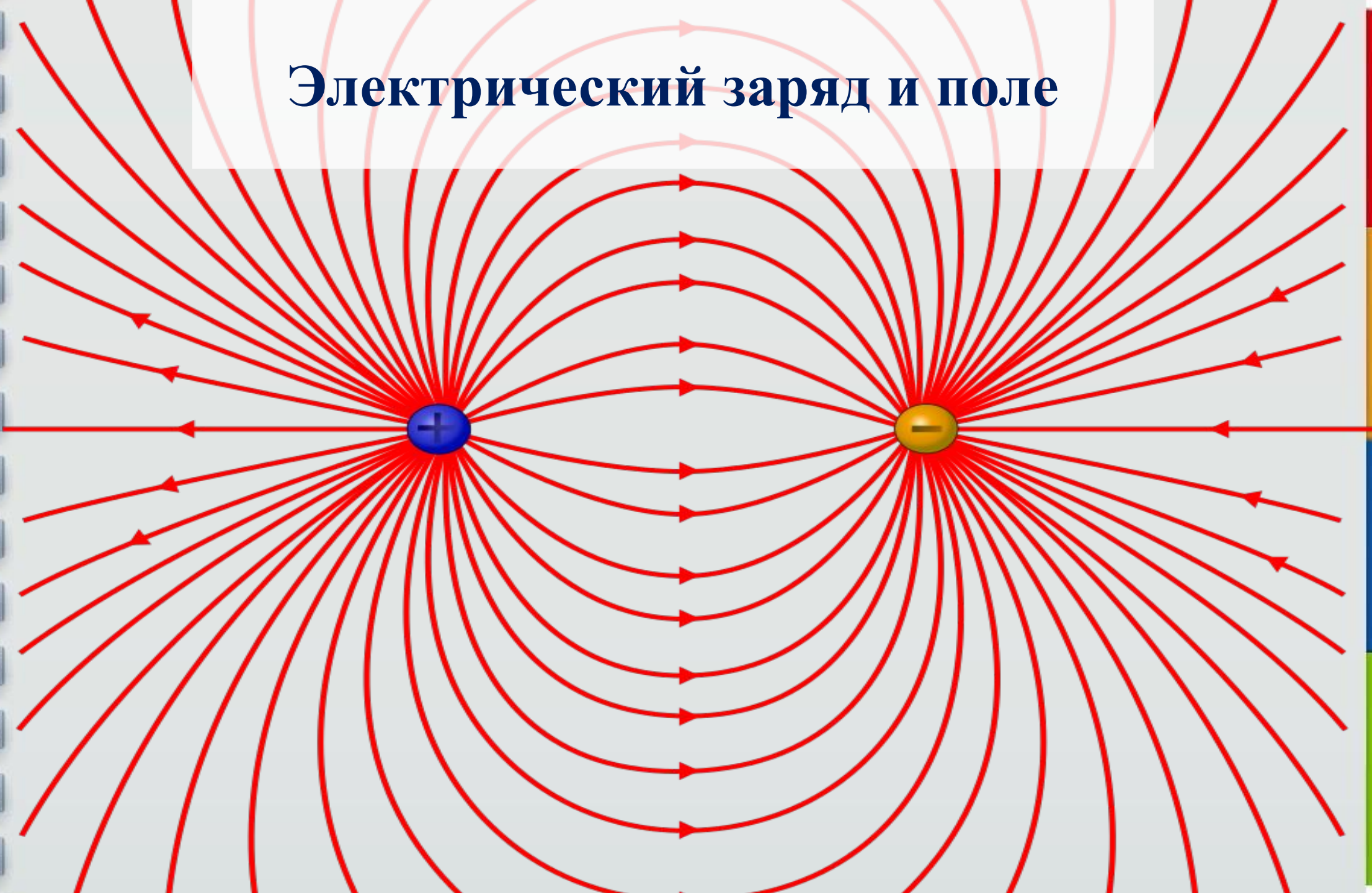
$$\int_V \operatorname{div}(\vec{\mathbf{A}}) dV = \oint_{\partial V} (\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{n}}) d\sigma$$



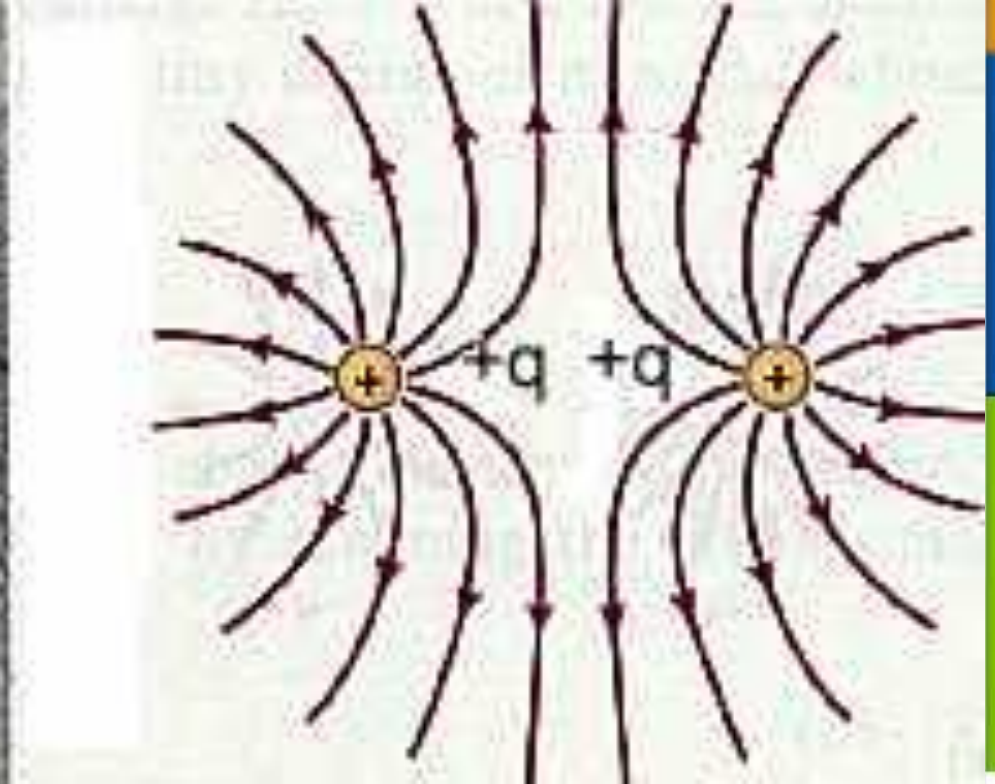
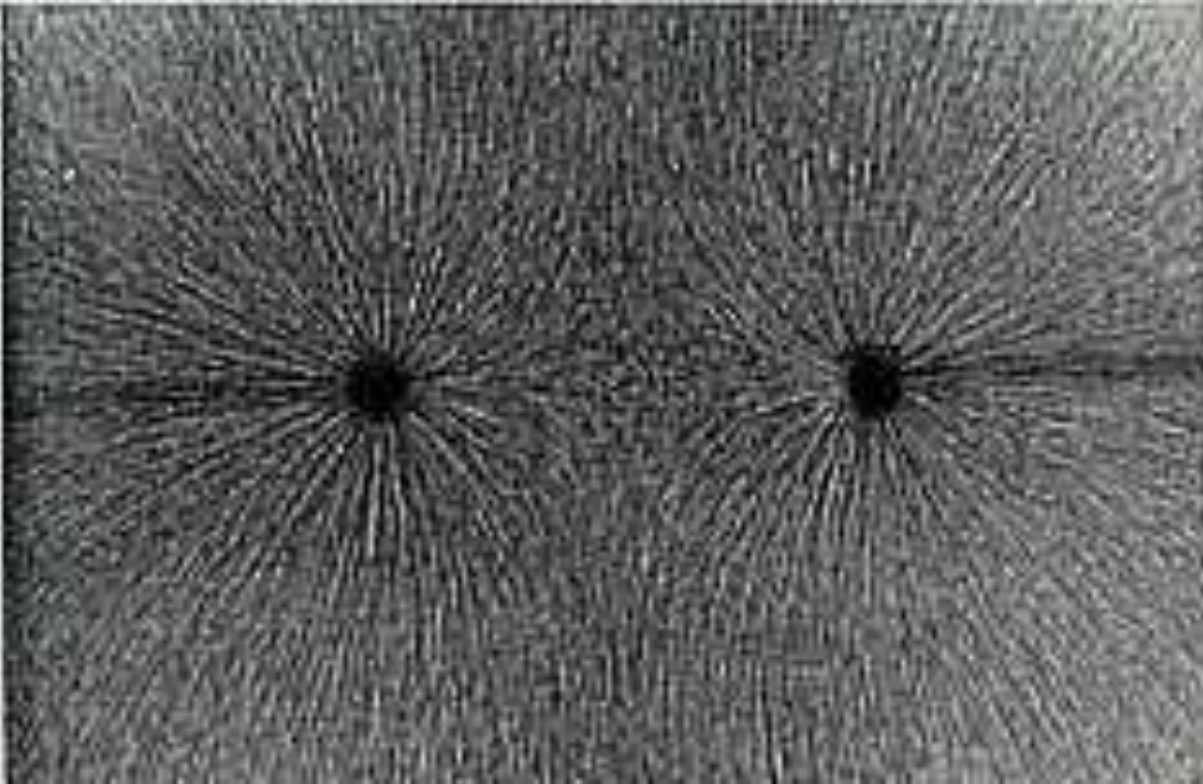
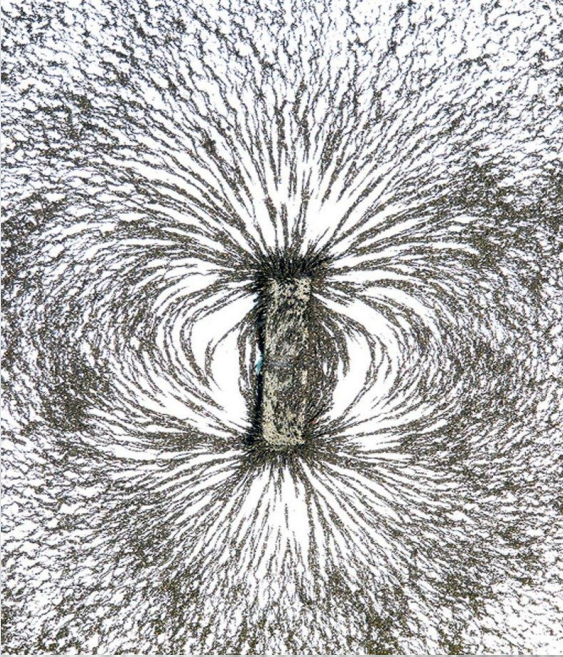


Уравнения Максвелла

Электрический заряд и поле

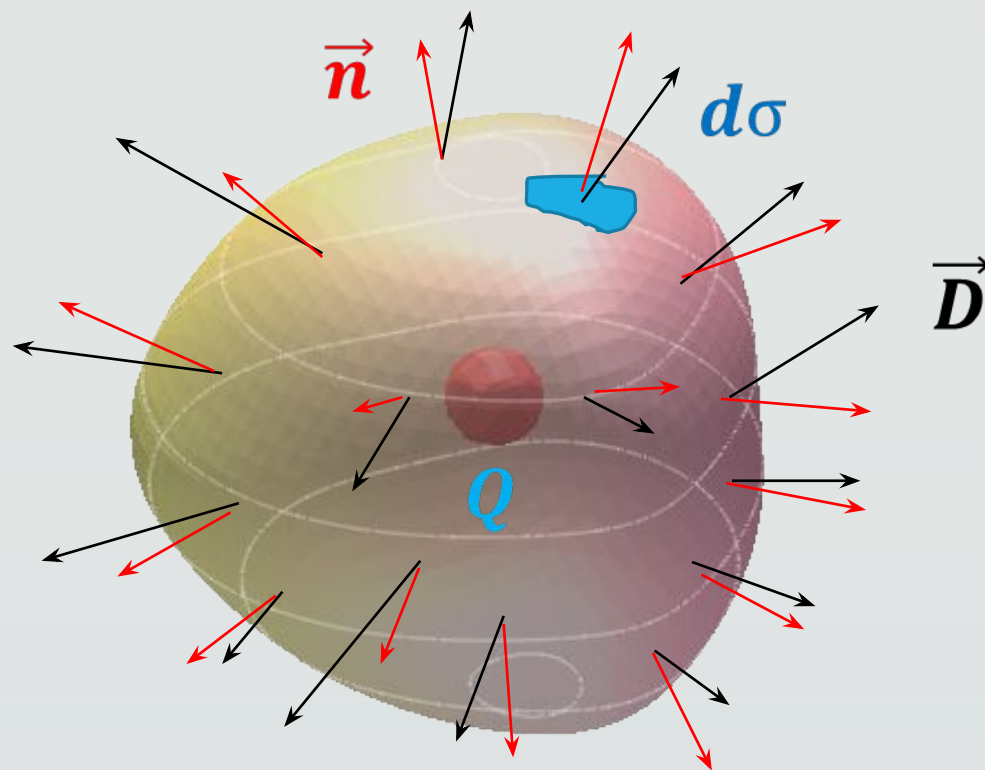


Что такое поле?



Поток электрического поля через замкнутую поверхность

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{D}) dV = 4\pi \int_V \rho dV = \oint_{\partial V} (\mathbf{D}, \mathbf{n}) d\sigma = 4\pi Q$$



Первое уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{\mathbf{E}}) = \operatorname{div}(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$

$\vec{\mathbf{E}}$ - напряженность электрического поля,
 $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$ - индукция электрического поля
 ρ – плотность электрического заряда.

Третье уравнение Максвелла или закон индукции Фарадея

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

Закон сохранения заряда четвертое уравнение Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\mathbf{D}) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{H})) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -4\pi \mathbf{j} + c \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{H})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0.$$

Закон Гаусса и уравнение индукции Фарадея

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}) = 0$$

Материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \mu \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$