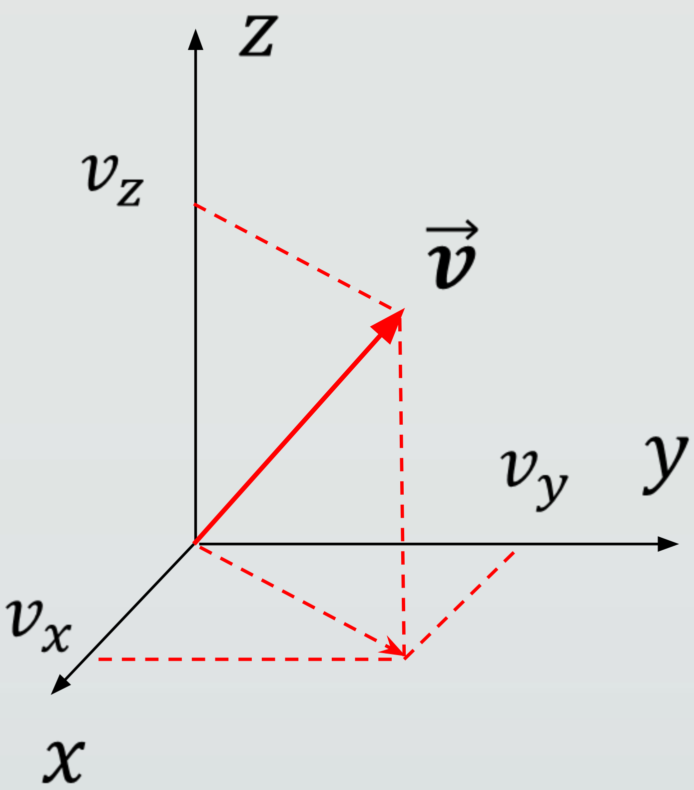
Лекция 1
Векторный анализ и уравнения Максвелла

Векторы

Координаты тела $\vec{x}$, скорость тела $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$, и сила $\vec{F}$- **являются векторами, т.е. величинами, имеющими направление**



$$\vec{\mathbf{x}} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (F_1, F_2, F_3)$$

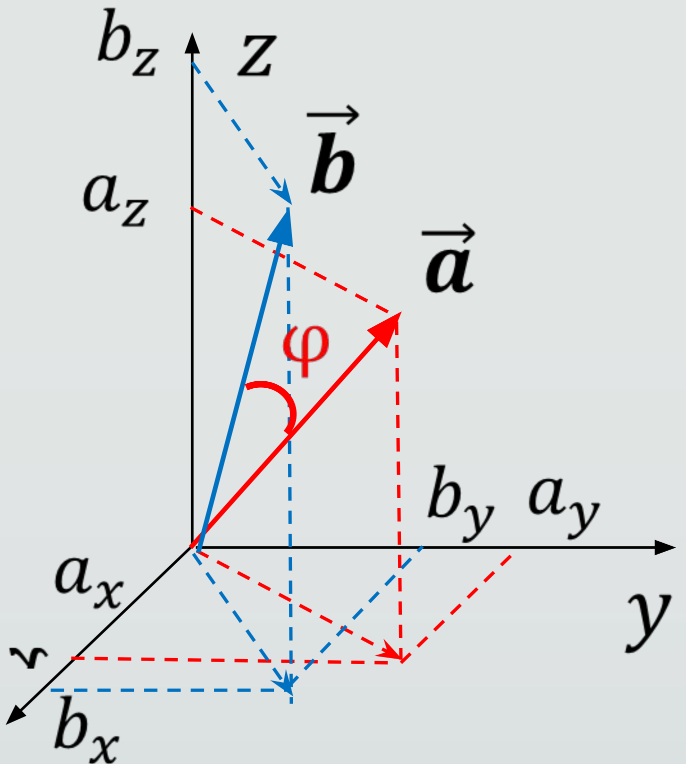
Векторное произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ -

это <u>число</u>, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b})$ и равное $|\vec{a}||\vec{b}|cos(\varphi)$,

где $|\vec{a}|^2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и $|\vec{b}|^2 = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$,

φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

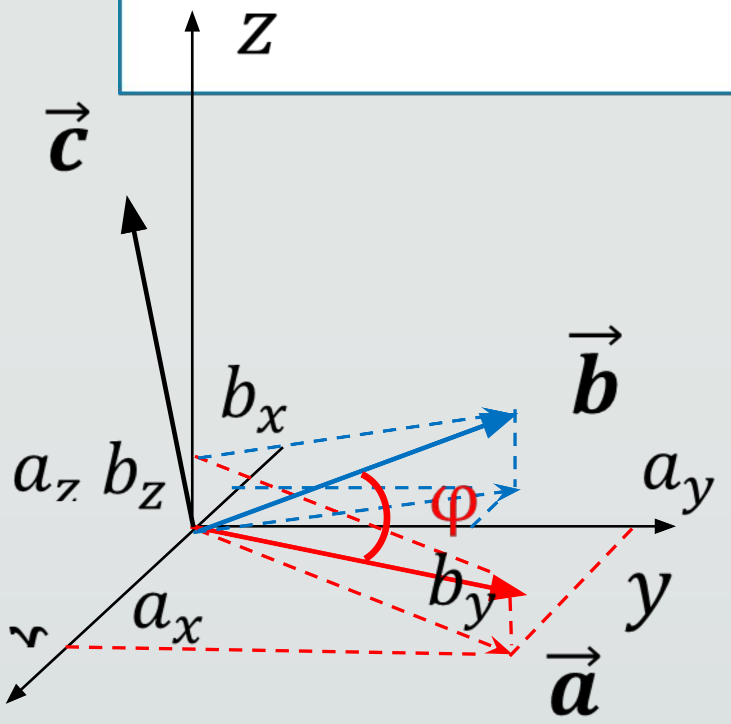
Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ -

это векетор, обозначаемый $[\vec{a} \times \vec{b}]$, длина которого равна $|\vec{a}||\vec{b}|sin(\varphi)$, а сам вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Здесь $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$,

φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

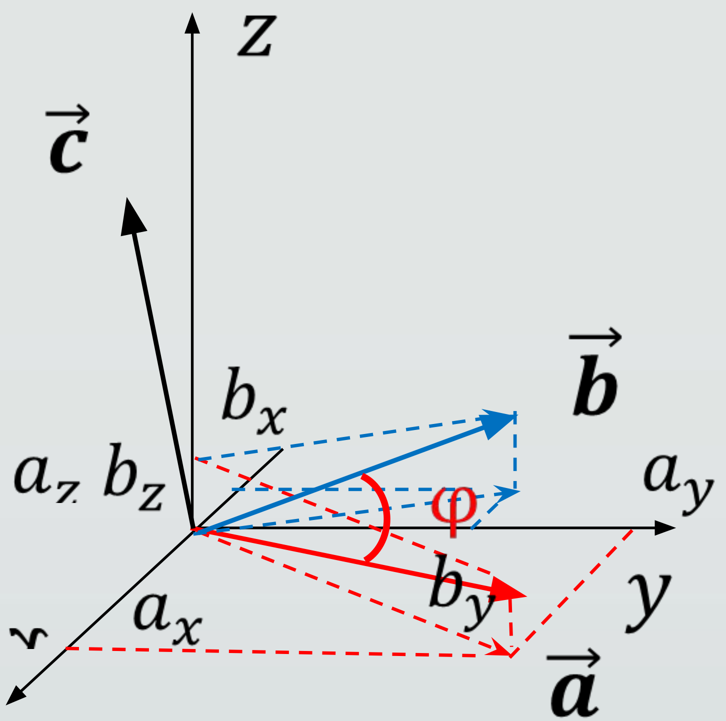
$$\vec{\mathbf{c}} = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Векторное произведение векторов

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{\mathbf{c}} = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$



$$c_x = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Свойства векторного и скалярного произведений

$$[\vec{\mathbf{a}}\times[\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}]] = \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$$

$$(\vec{\mathbf{b}},[\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}]) = 0, \quad (\vec{\mathbf{a}},[\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}]) = 0$$

$$(\vec{\mathbf{c}},[\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}]) = \det\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$(\vec{\mathbf{c}},[\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}]) = (\vec{\mathbf{b}},[\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{a}}]) = (\vec{\mathbf{a}},[\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}])$$

Индексная форма записи

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \sum_{\beta=1}^{3} a_\beta b_\beta$$

$$c_\alpha = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\chi=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\chi} a_\beta b_\chi$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\chi} = -\varepsilon_{\alpha\chi\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha\chi}$$

$$\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \quad \varepsilon_{132} = -1,$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha\beta} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{\beta\alpha\alpha} = 0$$

Дифференциальные операции с векторными функциями

Дивергенция

Дивергенцией векторного поля $\overrightarrow{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)}$ называется функция

$$f(\boldsymbol{x},t) = div(\overrightarrow{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)}),$$

вычисляемая по правилу:

$$div(\mathbf{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = (a_1(\mathbf{x},t), a_2(\mathbf{x},t), a_3(\mathbf{x},t))$$

Ротор

Ротором векторного поля $\overrightarrow{a(x,t)}$ называется вектор-функция

$$\vec{c}(x,t) = \mathbf{rot}(\overrightarrow{a(x,t)}),$$

вычисляемая по правилу:

$$rot(\vec{\mathbf{a}}) = [\nabla \times \vec{\mathbf{a}}],$$

$$rot(\vec{\mathbf{a}})_\alpha = [\nabla \times \vec{\mathbf{a}}]_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}$$

$$rot(\vec{\mathbf{a}})_x = [\nabla \times \vec{\mathbf{a}}]_x = \frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y,$$

$$rot(\vec{\mathbf{a}})_y = [\nabla \times \vec{\mathbf{a}}]_y = \frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z,$$

$$rot(\vec{\mathbf{a}})_z = [\nabla \times \vec{\mathbf{a}}]_z = \frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x,$$

Градиент

Градиентом функции $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ называется вектороное поле

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}, t) = \vec{\nabla}\varphi(\boldsymbol{x}, t),$$

вычисляемая по правилу:

$$\vec{\mathbf{g}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$g_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

$$rot(\vec{\mathbf{g}}) = rot(\nabla\varphi) = 0$$

Простейшие свойства

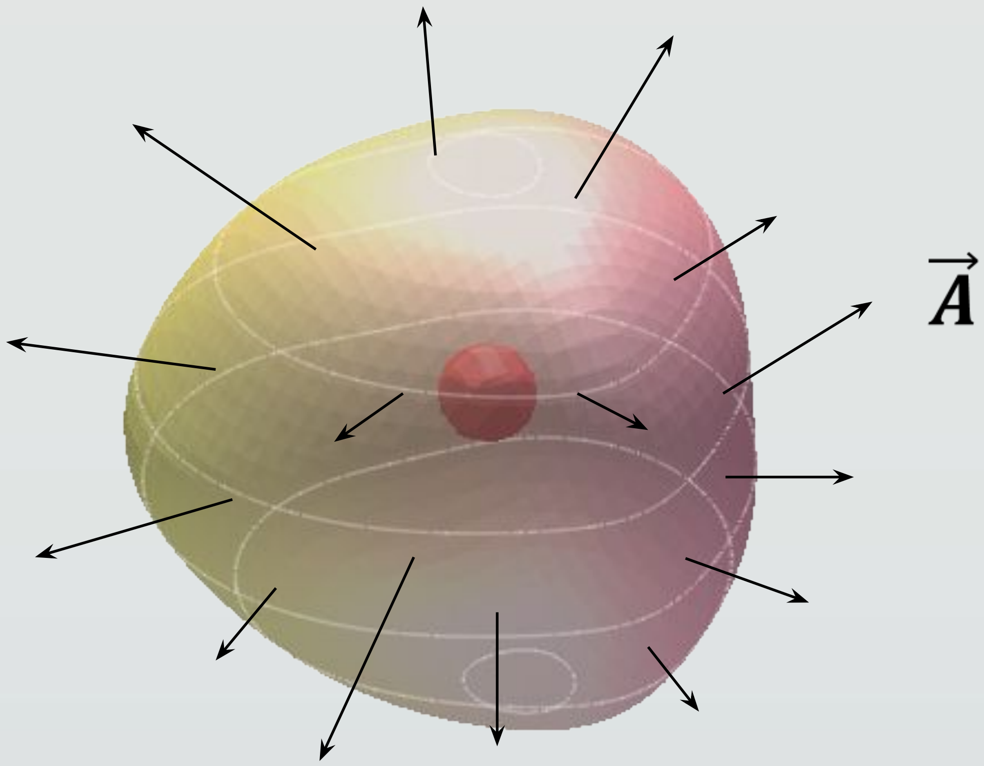
$$div(rot(\vec{\mathbf{a}})) = div([\nabla \times \vec{\mathbf{a}}]) = 0$$

$$div(\vec{\nabla}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$rot(rot(\vec{\mathbf{a}})) = [\nabla \times [\nabla \times \vec{\mathbf{a}}]] = \nabla div(\vec{\mathbf{a}}) - \Delta\vec{\mathbf{a}}$$

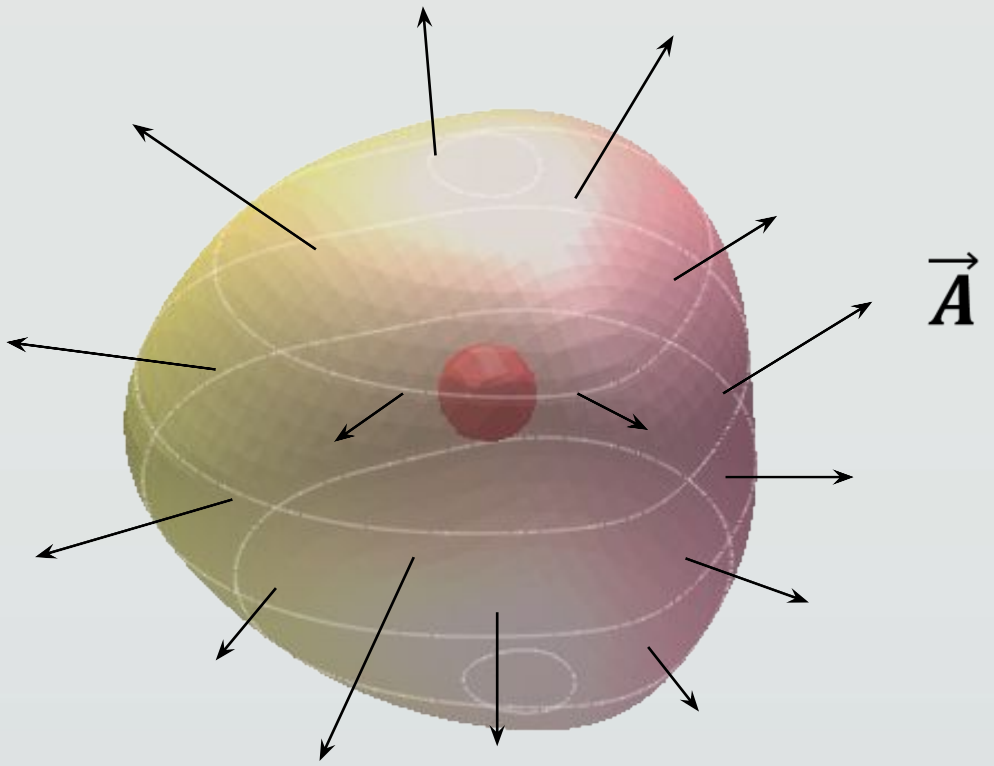
Теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_V div(\vec{\mathbf{A}})dV = \oint_{\partial V} (\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{n}})d\sigma$$



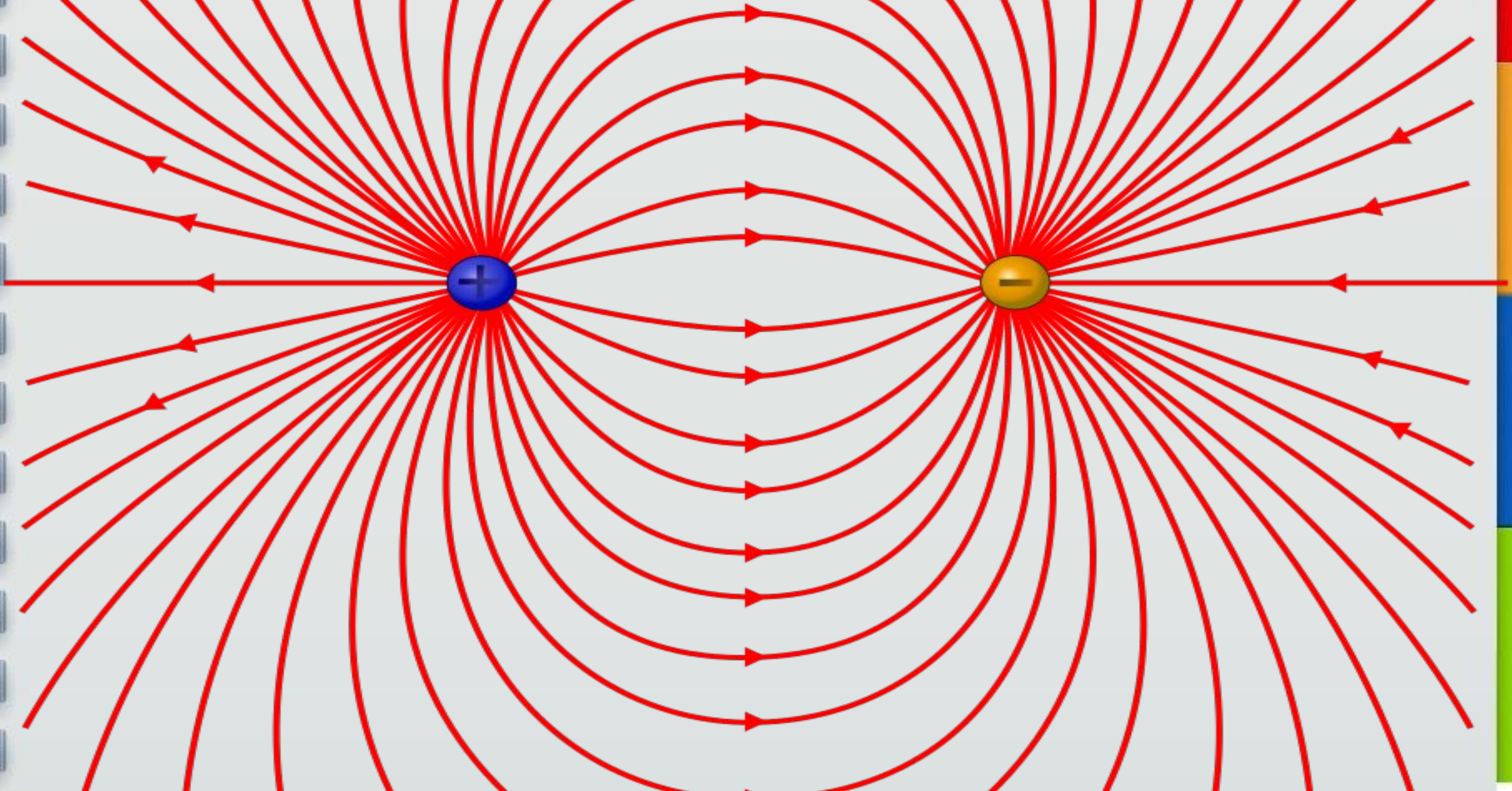
Теорема Остроградского-Гаусса

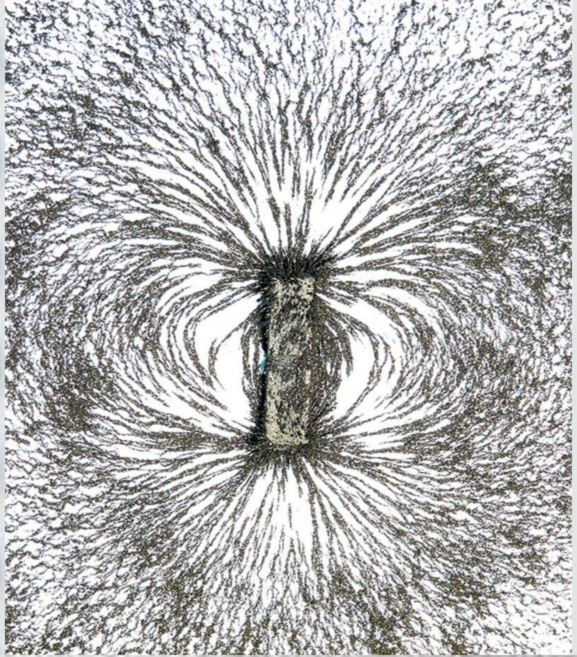
$$\int\limits_V div(\vec{\mathbf{A}})dV = \oint\limits_{\partial V} (\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{n}})d\sigma$$



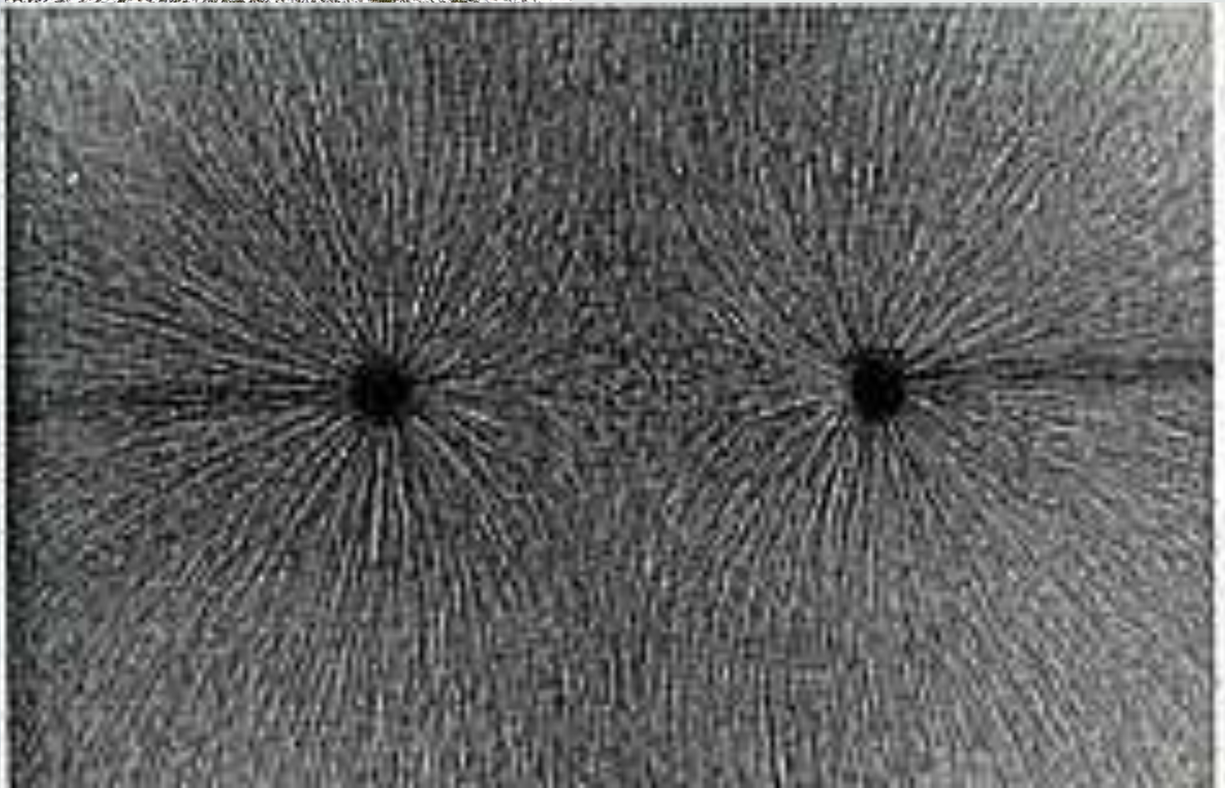
Уравнения Максвелла

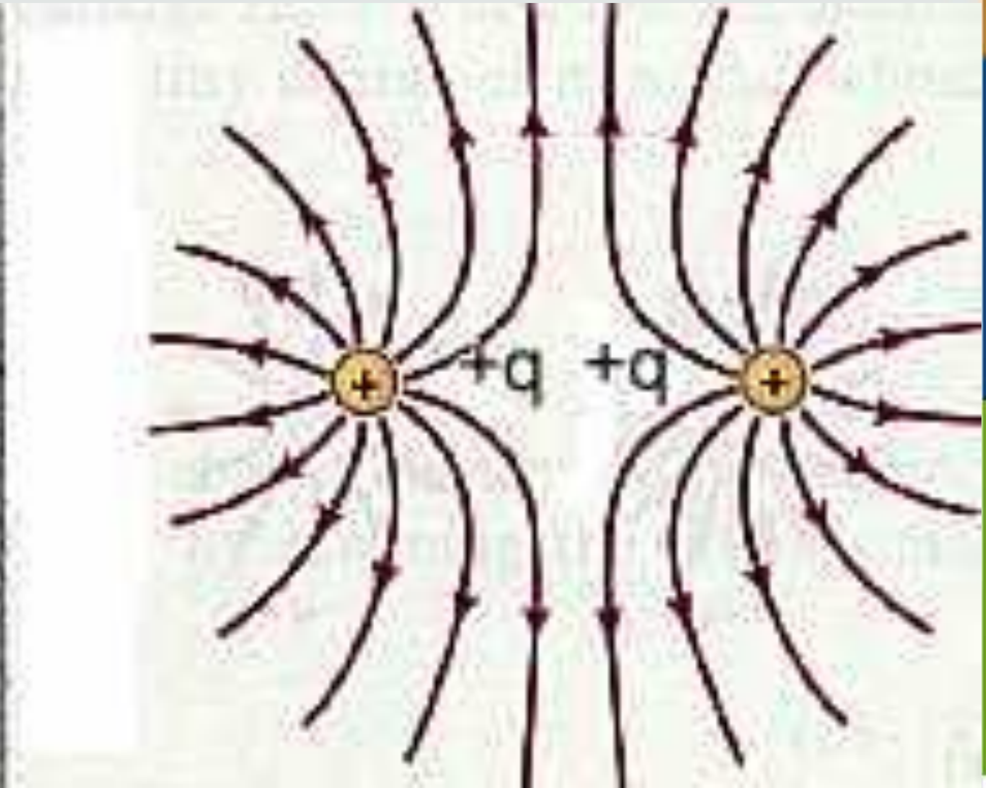
Электрический заряд и поле





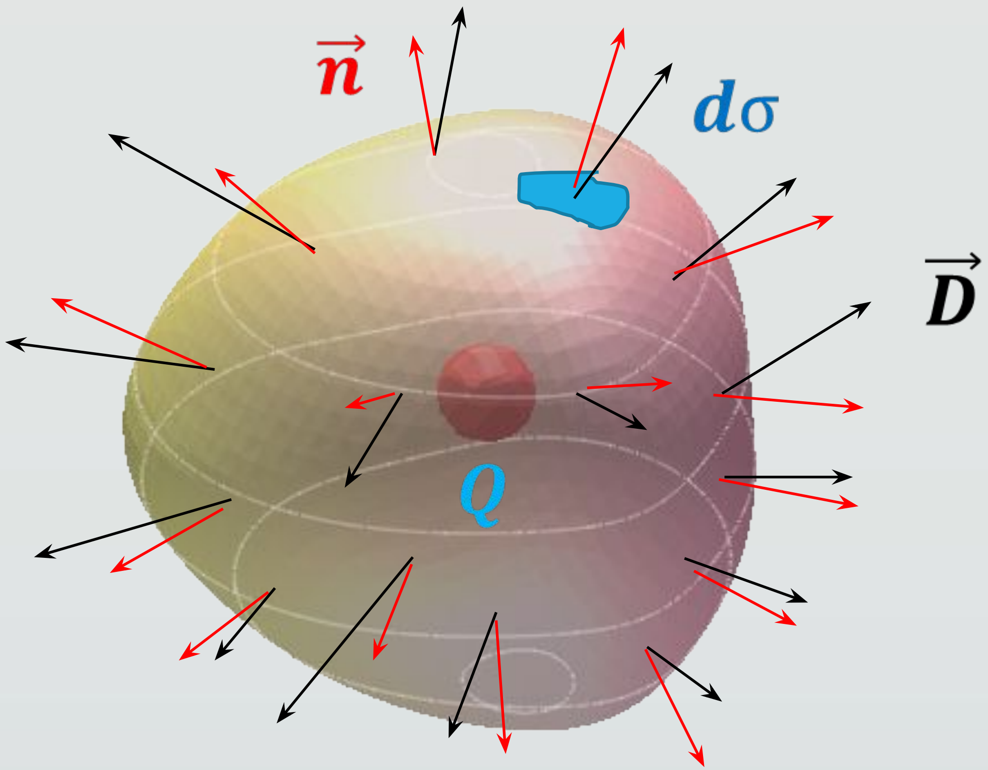
Что такое поле?





Поток электрического поля через замкнутую поверхность

$$\int\limits_V div(\vec{\mathbf{D}})dV = 4\pi\int\limits_V \rho dV = \oint\limits_{\partial V} (\vec{\mathbf{D}},\vec{\mathbf{n}})d\sigma = 4\pi Q$$



Первое уравнение Максвелла

$$div(\varepsilon \vec{\mathbf{E}}) = div(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$

$\vec{E}$ - напряженность электрического поля,
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ - индукция электрического поля
ρ – плотность электрического заряда.

Третье уравнение Максвелла или закон ндукции Фарадея

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$rot\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = rot\vec{\mathbf{A}}$$

$$rot\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{B}}$$

Закон сохранения заряда четвертое уравнение Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial t} div(\vec{\mathbf{D}}) = div\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$div(rot(\vec{\mathbf{H}})) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = -4\pi \vec{\mathbf{j}} + c \cdot rot(\vec{\mathbf{H}})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{\mathbf{j}}) = 0.$$

Закон Гаусса и уравнение индукции Фарадея

$$rot(\vec{\mathbf{E}}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{B}}$$

$$div(\vec{\mathbf{H}}) = 0$$

Материальные уравнения

$$\vec{\mathbf{D}} = \mu\vec{\mathbf{E}},$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}},$$