Лекция 4. «Закон сохранения энергии в механике»

- Работа и кинетическая энергия
- Консервативные силы
- Работа в потенциальном поле
- Потенциальная энергия тяготения и упругих деформаций
- Связь между потенциальной энергией и силой
- Закон сохранения энергии

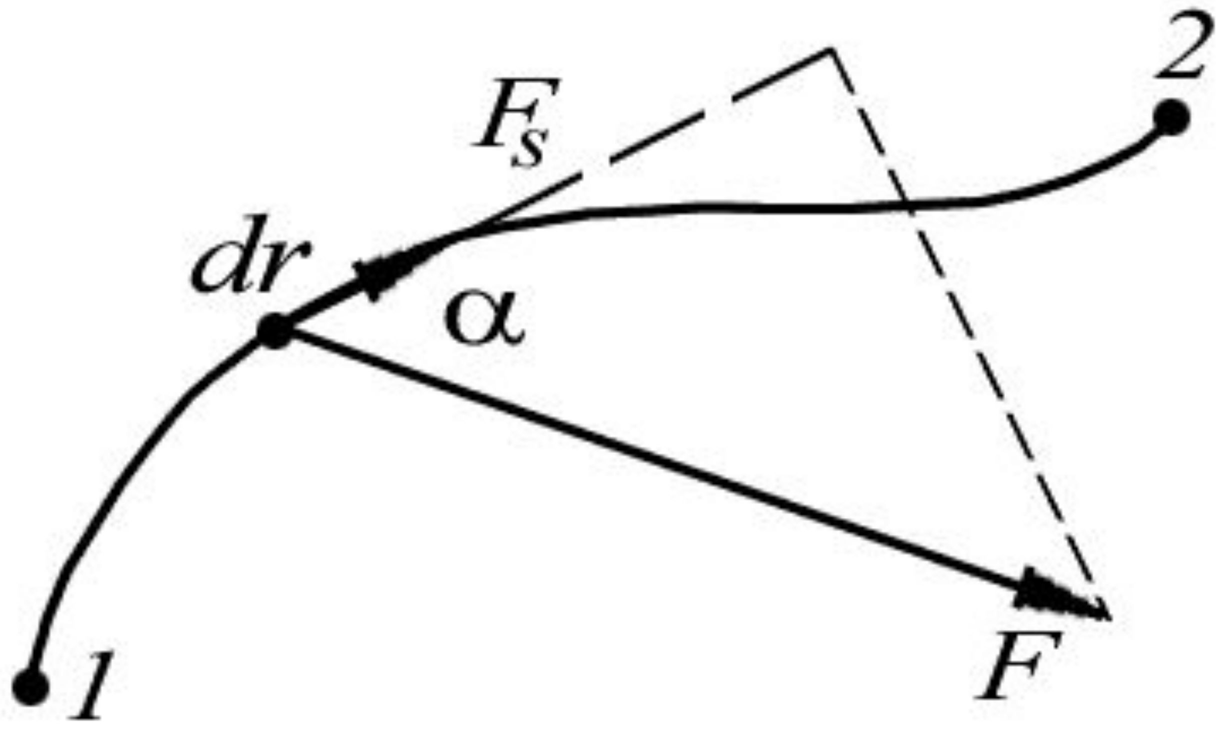
Нет ничего более упорядоченного, чем природа.

Мировой организм есть неразрывное целое.

Все элементы мироздания гармонично связаны между собой.

Цицерон

Работа и мощность



Определение работы силы

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos\alpha ds = F_s ds$$

Работой называется скалярная величина, равная произведению проекции силы на направление перемещения f_s и пути s, проходимого точкой приложения силы:

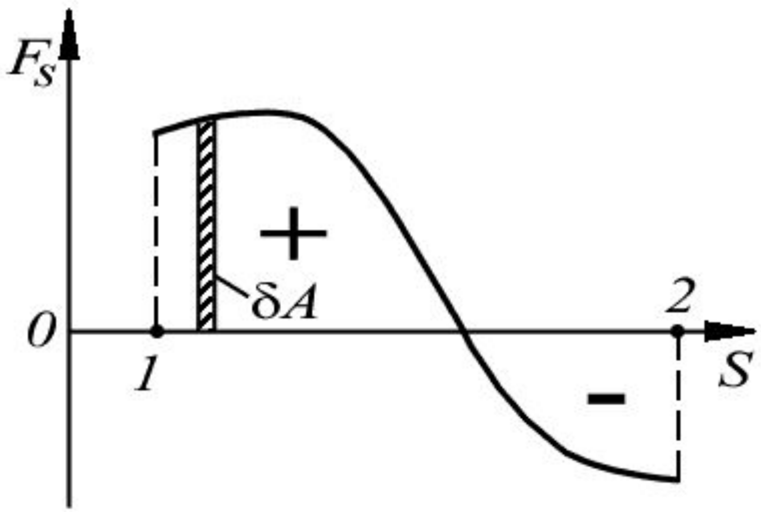
$$A = f_s s.$$

Работа — алгебраическая величина. Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha > 0$), работа положительна. Если угол α — тупой ($\cos\alpha < 0$), работа отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ работа равна нулю.

Элементарная работа силы

$$\Delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_S ds$$

Интегральная работа силы



$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$$

$$A = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots) d\vec{r} = \int \vec{F}_1 d\vec{r} + \int \vec{F}_2 d\vec{r} + \ldots = A_1 + A_2 + \ldots$$

Для работы:

$$\dim A = \mathrm{ML^2T^{-2}} \qquad [A] = \frac{кг \cdot м^2}{с^2} = Дж$$

Мощность - это работа, совершаемая силой

(в механике) за единицу времени

$$N = \vec{F}d\vec{r}\,/\,dt. \qquad N = \vec{F}\vec{v} \qquad A = \int_0^t N dt$$

Для мощности:

$$\dim N = \mathrm{ML^2T^{-3}} \qquad [N] = \frac{кг \cdot м^2}{с^3} = Вт$$

Потенциальная энергия и работа упругой деформации (пружины)

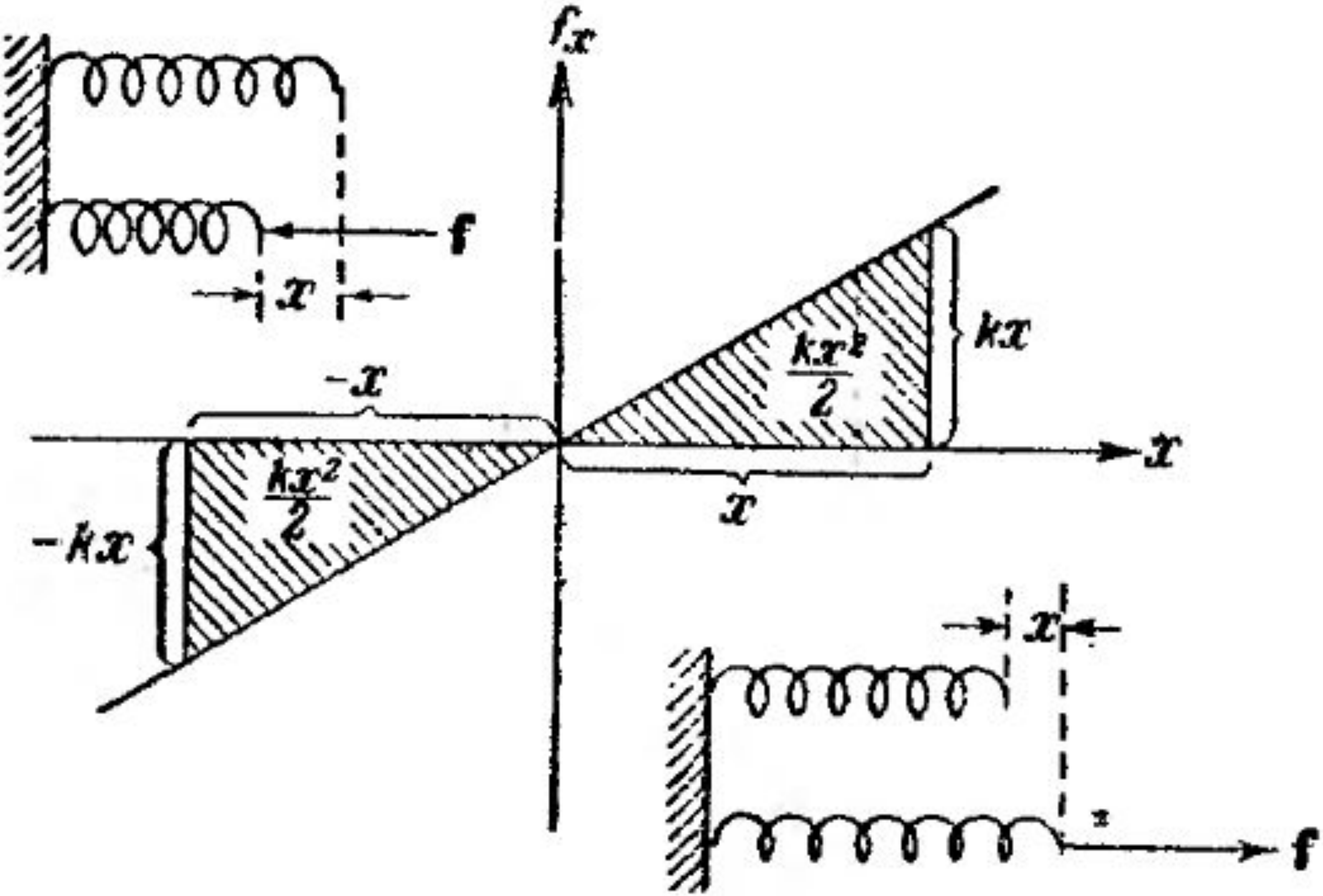
Закон Гука. Сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$,

Сила непостоянна, поэтому элементарная работа

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$$

знак минус говорит о том, что работа совершается против силы действия пружины.

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2},$$

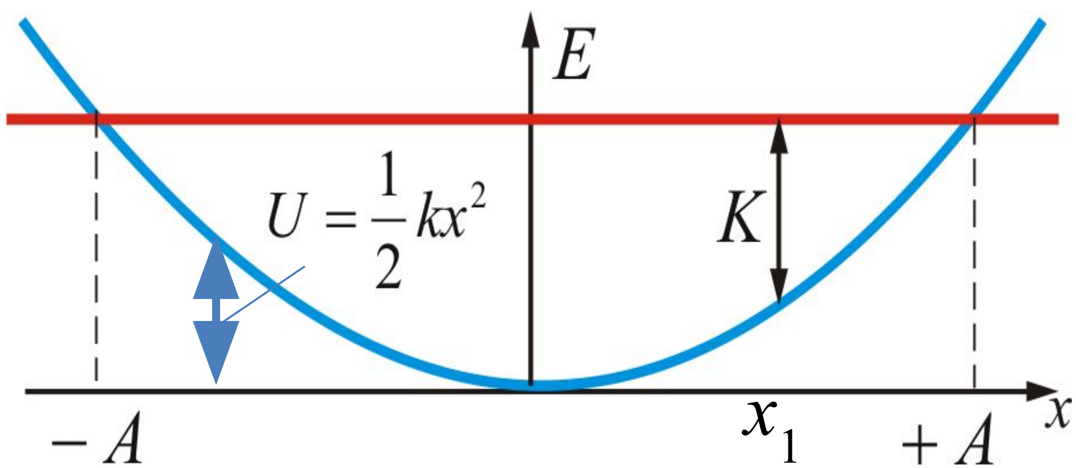


f_x
f
x
kx
$\frac{kx^2}{2}$
$-x$
x
$-kx$
$\frac{kx^2}{2}$
x
x
f

Внутренняя энергия пружины - потенциальная

$$\boxed{U = \frac{kx^2}{2}.}$$

Диаграмма потенциальной энергии пружины.



$E = K + U$ – полная механическая энергия системы, K – кинетическая энергия в точке x_1

Кинетической энергией поступательного движения называется соотношение:

$$\boxed{K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}.}$$

K - является функцией состояния системы (ФС не зависит от предыстории).

K – аддитивная величина: $$\boxed{K = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{m_{\mathrm{i}}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}^2}{2},}$$

Связь кинетической энергии с импульсом

Т.к. $$\frac{m\text{v}^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right)=\frac{m^2\text{v}^2}{2m},$$

отсюда $$\boxed{K=\frac{p^2}{2m}}$$

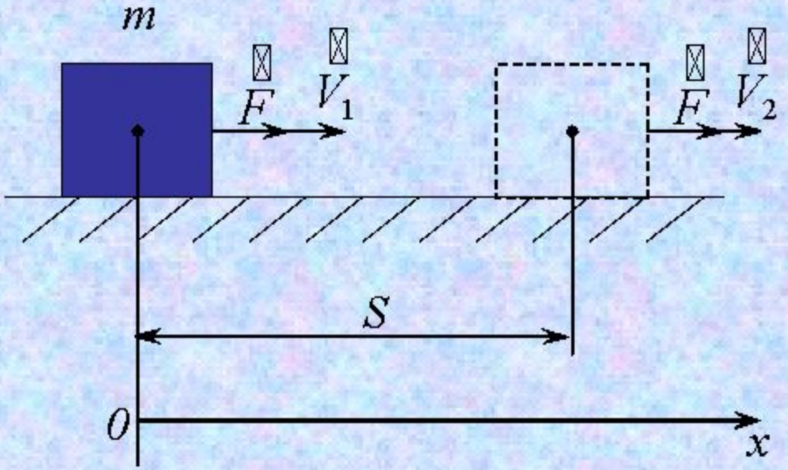
Связь кинетической энергии с работой

работа *силы приложенной к телу на пути r численно равна* ***изменению кинетической энергии этого тела***:

$$A=\Delta K$$

Механическая работа и кинетическая энергия

Скольжение по плоскости

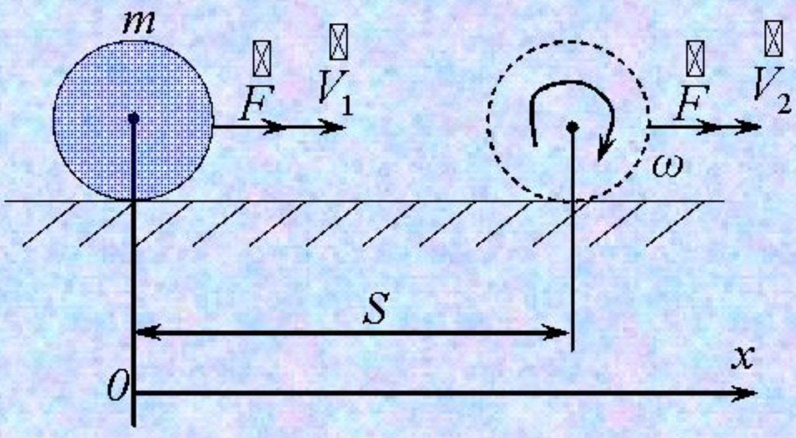


$$A = F \cdot S; \quad F = m \cdot a$$

$$\text{при} \quad a = \text{const}, \quad S = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2a}$$

$$A = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \Delta E_k, \quad где \quad E_k = \frac{mV^2}{2}$$

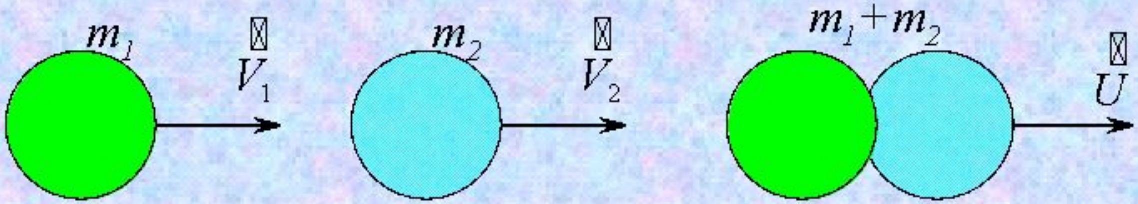
Качение по плоскости без проскальзывания (плоское движение)



$$A = E_k = E_k^{пост} + E_k^{вращ} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Ударное взаимодействие тел

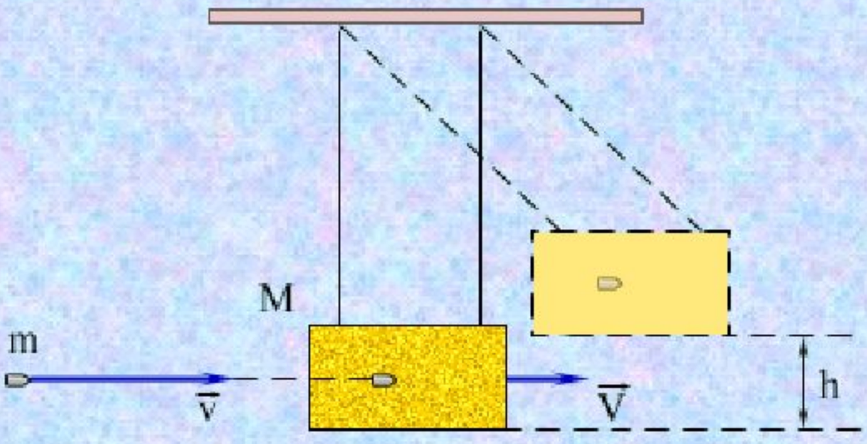
Абсолютно неупругий удар



$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{U}$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = (m_1 + m_2)\frac{U^2}{2}$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}$$



$$mV = (M + m)U$$

Потеря механической энергии

$$\Delta E = \frac{mV^2}{2} - \frac{(M + m)U^2}{2}$$

$$h = \frac{U^2}{2g} - \text{высота подъема маятника}$$

Работа, энергия и мощность при вращательном движении

$$dA = Md\varphi$$

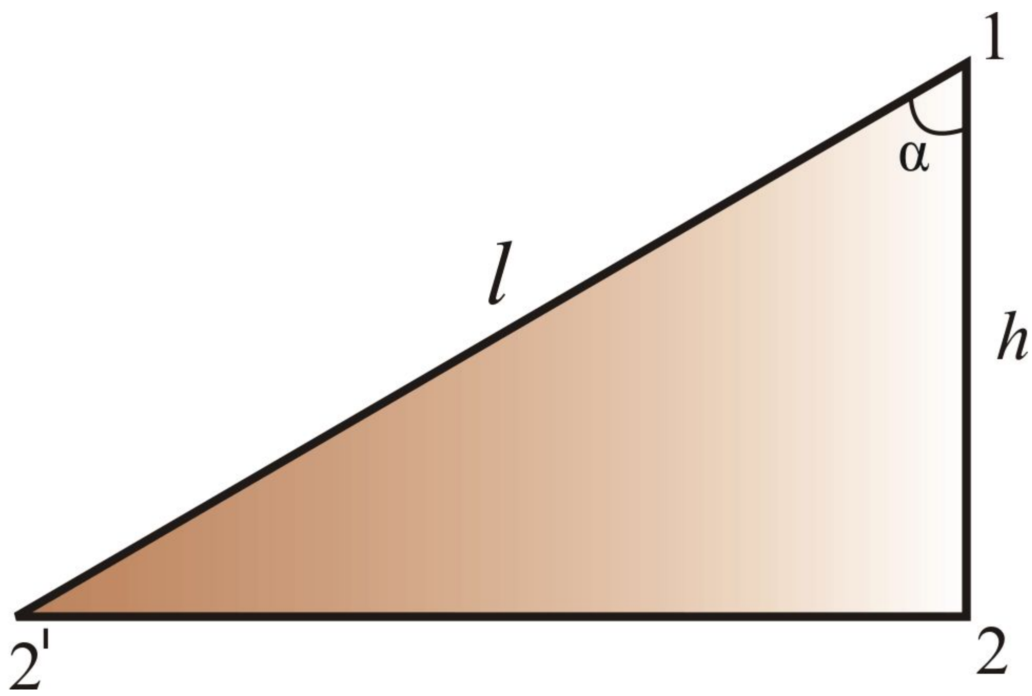
$$A = M\varphi$$

$$K = \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}$$

$$N = \frac{dA}{dt} = M \cdot \omega$$

- **Сила** называется **консервативной** или потенциальной, если её работа не зависит от траектории, а определяется только начальным и конечным положениями тела. Работа таких **сил** по перемещению тела по замкнутой траектории всегда равна нулю. ... Если работа **силы** зависит от траектории, то такие **силы** называются **неконсерватив ными**.

Работа консервативных сил в потенциальном поле



$$A_{2'1} = A_{21} = mgh$$

Потенциальная энергия

Если в системе материальных тел действуют ***консервативные силы****, то* ***можно*** *ввести понятие* ***потенциальной энергии.***

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, не зависит от того, как было осуществлено это изменение. Работа определяется только начальной и конечной конфигурациями системы:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \qquad (*)$$

здесь **потенциальная энергия** $U\ (x,\ y,\ z)$ – *функция состояния системы,* ***зависящая только от координат*** *всех тел системы в поле консервативных сил.*

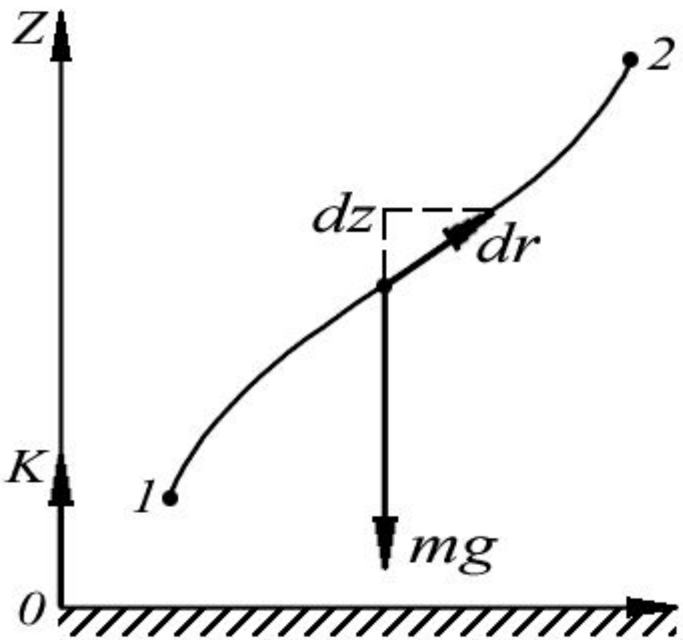
Итак, K – определяется скоростью движения тел системы, а U – их взаимным расположением.

Из (*) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U.$$

Работа силы тяжести

$$\Delta A = -mgdz = -d(mgz).$$



$$A = -\int_1^2 d(mgz) = mg(z_1 - z_2).$$

Потенциальная энергия при гравитационном взаимодействии

Нет единого выражения для *U*. В разных случаях она определяется по-разному.

Работа тела при падении $A = mgh.$
Или $A = U - U_0.$

Удобно считать, что на поверхности земли $(h = 0)$, $U_0 = 0$
тогда $U = A$ т.е. $\boxed{U = mgh.}$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами M и m, находящимися на расстоянии r друг от друга, потенциальную энергию определяют по формуле:

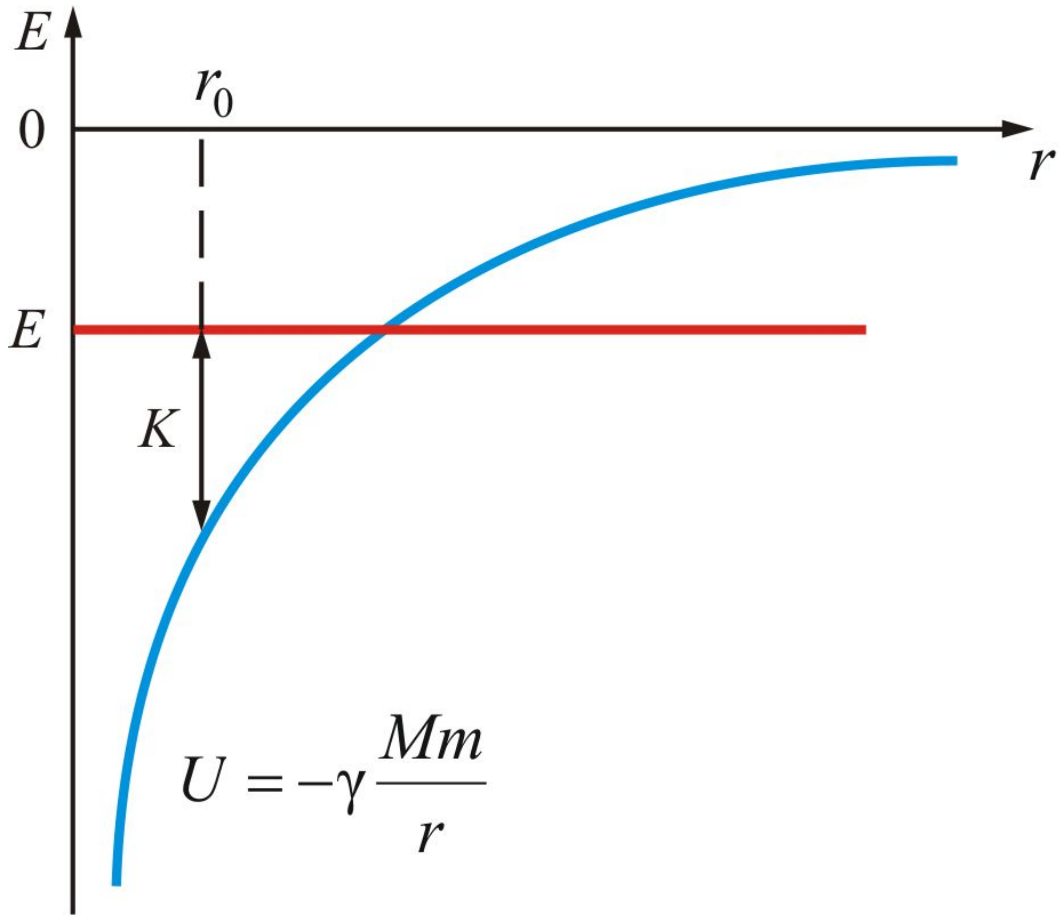
$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

Потенциал гравитационного поля: $$\varphi_{ГР} = \frac{W}{m} = G\frac{M}{4\pi r}$$

Напряженность гравитационного поля: $$E_{ГР} = \frac{F}{m} = G\frac{M}{4\pi r^2}$$

$$G = 4\pi\gamma \qquad E_{ГР} = -grad\varphi_{ГР}$$

Диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс *M* и *m*.



Полная энергия $E = K + U.$

Факультативно

Представим кинетическую энергию как сумму кинетической энергии радиального и вращательного движений

$$K=\frac{mV^2}{2}=\frac{mV_r^2}{2}+\frac{L^2}{2mr^2}=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{L^2}{2I}=K_r+K_L$$

Полная механическая энергия системы

$$W=K+U=K_r+K_L-G\frac{mM}{r^2}=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{L^2}{2mr^2}-G\frac{mM}{r^2}=const$$

Этим слагаемым можно пренебречь

Динамика орбитального движения планет

- кинетическая энергия

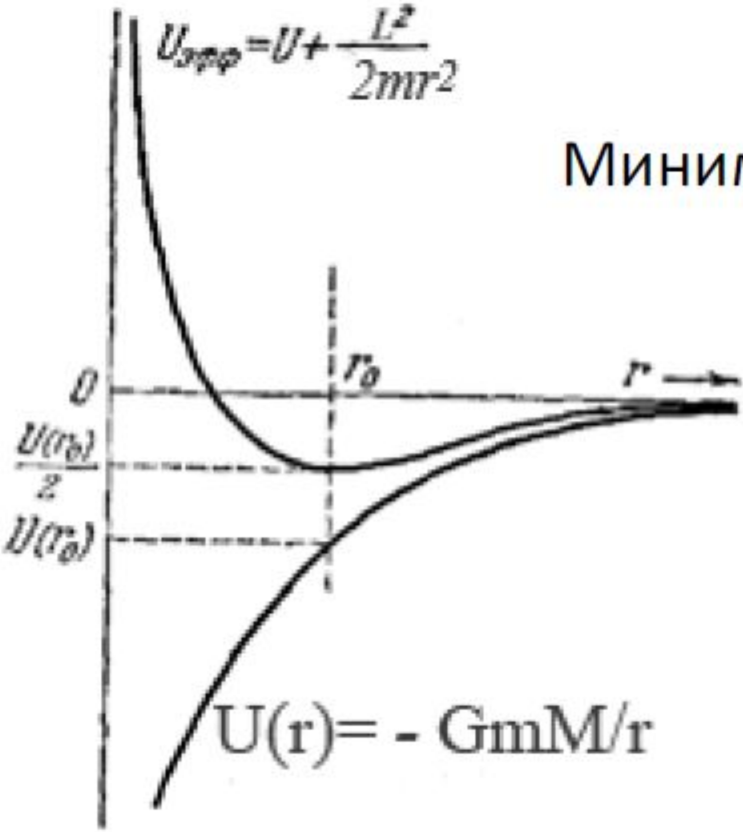
$$U_{\text{eff}} \equiv K_L + U_G = \frac{L^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

- потенциальная энергия

Левый берег этой потенциальной ямы очень крутой и бесконечно высокий: эффективная потенциальная энергия стремится к бесконечности ($U_{\text{eff}}(r) \to \infty$ при $r \to 0$) благодаря второму слагаемому $L^2/(2mr^2)$. Пологий правый берег обусловлен членом $-GmM/r$ в $U_{\text{eff}}(r)$ и поднимается лишь до нулевой отметки потенциальной энергии: $U_{\text{eff}}(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Поэтому при положительных значениях полной энергии приходящая из бесконечности частица приближается к силовому центру до некоторого минимального расстояния $r_{\min}$, где полная энергия сравнивается с $U_{\text{eff}}(r)$, и затем снова удаляется в бесконечность.

При отрицательных значениях полной энергии частица «заперта» в потенциальной яме и совершает периодическое движение между ее берегами. При этом расстояние r до силового центра изменяется в некоторых конечных пределах от $r_{\min}$ до $r_{\max}$. Таким случаям соответствуют орбиты конечных размеров, при движении по которым угловая переменная φ совершает «обход» по полному кругу в пределах от 0 до 2π с определенным периодом. Центральное кулоново поле, в котором сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, замечательно тем, что в нем периоды радиального и углового движений совпадают при любых начальных условиях, соответствующих отрицательным значениям полной энергии. Поэтому орбита оказывается замкнутой.

При любом искажении (возмущении) кулонова поля (например, при отклонении формы планеты от идеальной сферической симметрии) периоды радиального и углового движений уже не совпадают, и «чудо» замкнутых кеплеровых орбит бесследно исчезает. Отмеченное выше совпадение периодов радиального и углового движений (такого рода совпадения называют «вырождением») связано с определенной («скрытой») симметрией кулонова поля и существованием обусловленного этой симметрией инварианта (сохраняющейся при движении величины). Соответствующий инвариант (так называемый вектор Рунге — Ленца или вектор Лапласа) можно назвать *динамическим*, поскольку его существование связано с определенным законом силы (обратная пропорциональность квадрату расстояния), тогда как такие инварианты как момент импульса и полная энергия могут быть отнесены к *геометрическим*, поскольку их существование обусловлено общими свойствами симметрии пространства и времени (изотропностью пространства и однородностью времени соответственно).



Минимум ямы определяется параметрами

$$r_0 W_0 = -\frac{GMm}{2}$$

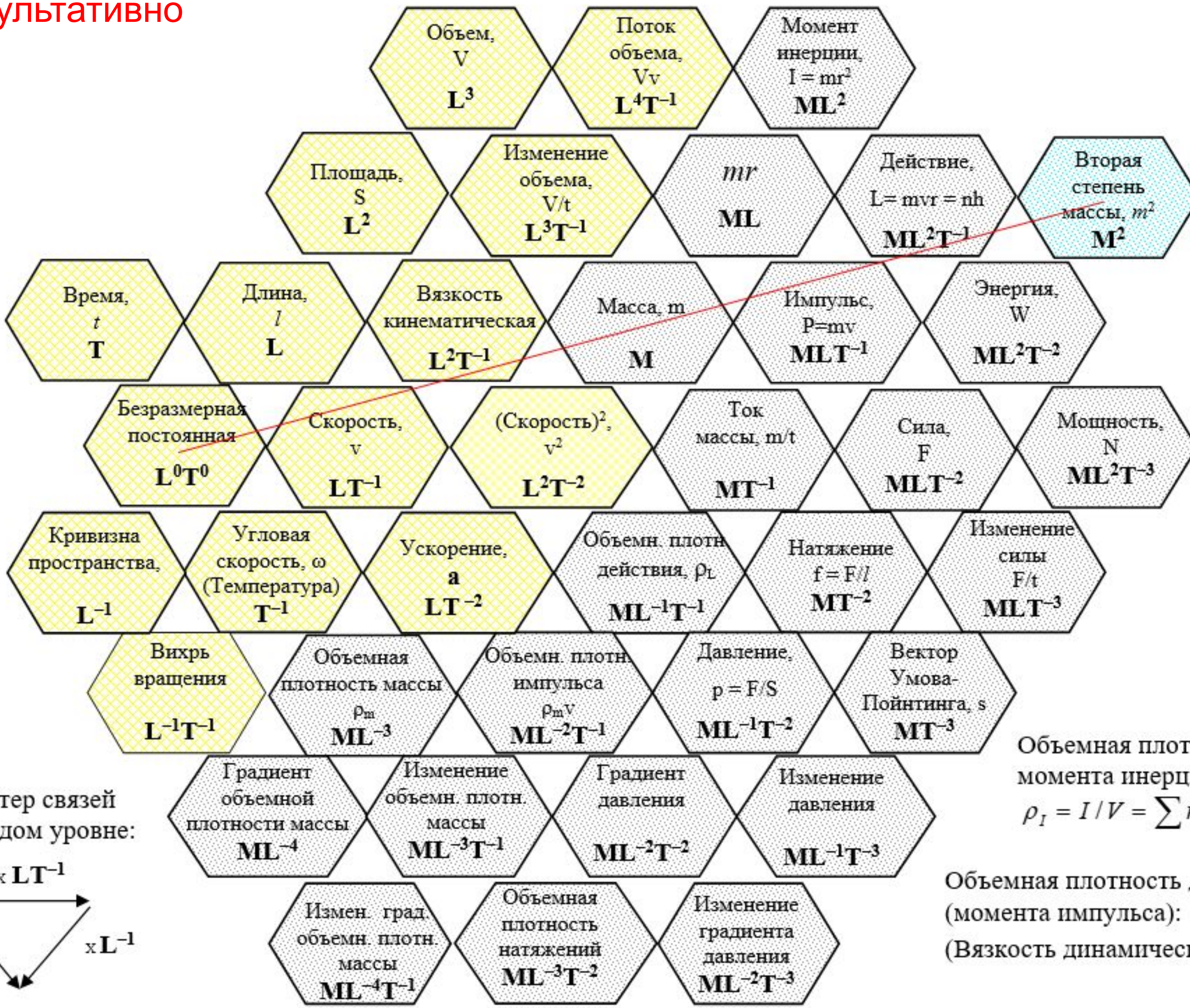
$$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad U_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{GMm}{2r_0} = -\frac{U_G(r_0)}{2} \equiv W_0;$$

$$\boxed{M r_0 = const}$$

СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

(Два системных уровня: кинематические и динамические ФВ)

Факультативно



Объемная плотность момента инерции:

$$\rho_I = I/V = \sum m_i r_i^2 / V$$

Характер связей на каждом уровне:

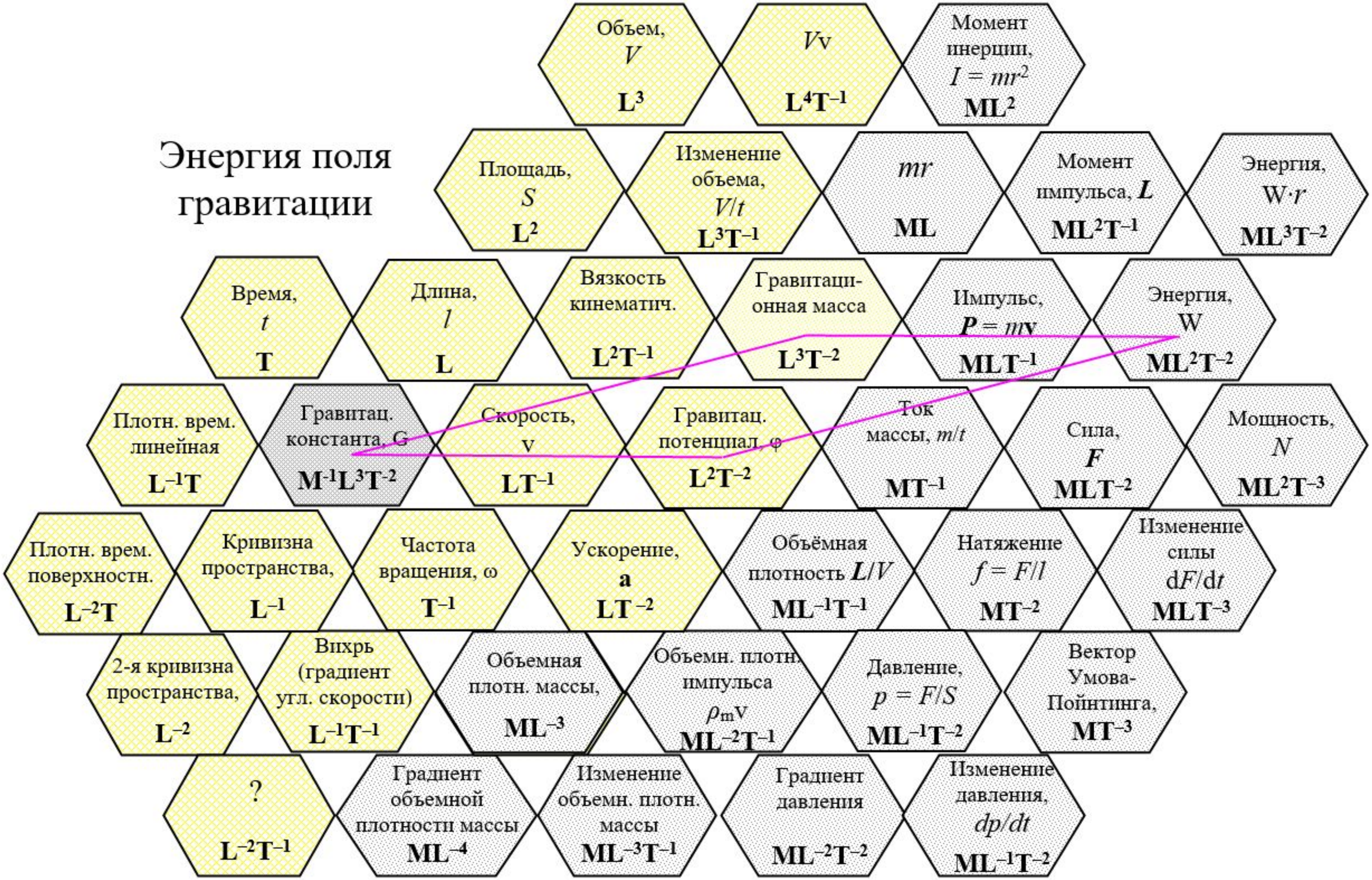
x LT^{-1}

x T^{-1} x L^{-1}

Объемная плотность действия (момента импульса): $\rho_L = L/V$ (Вязкость динамическая)

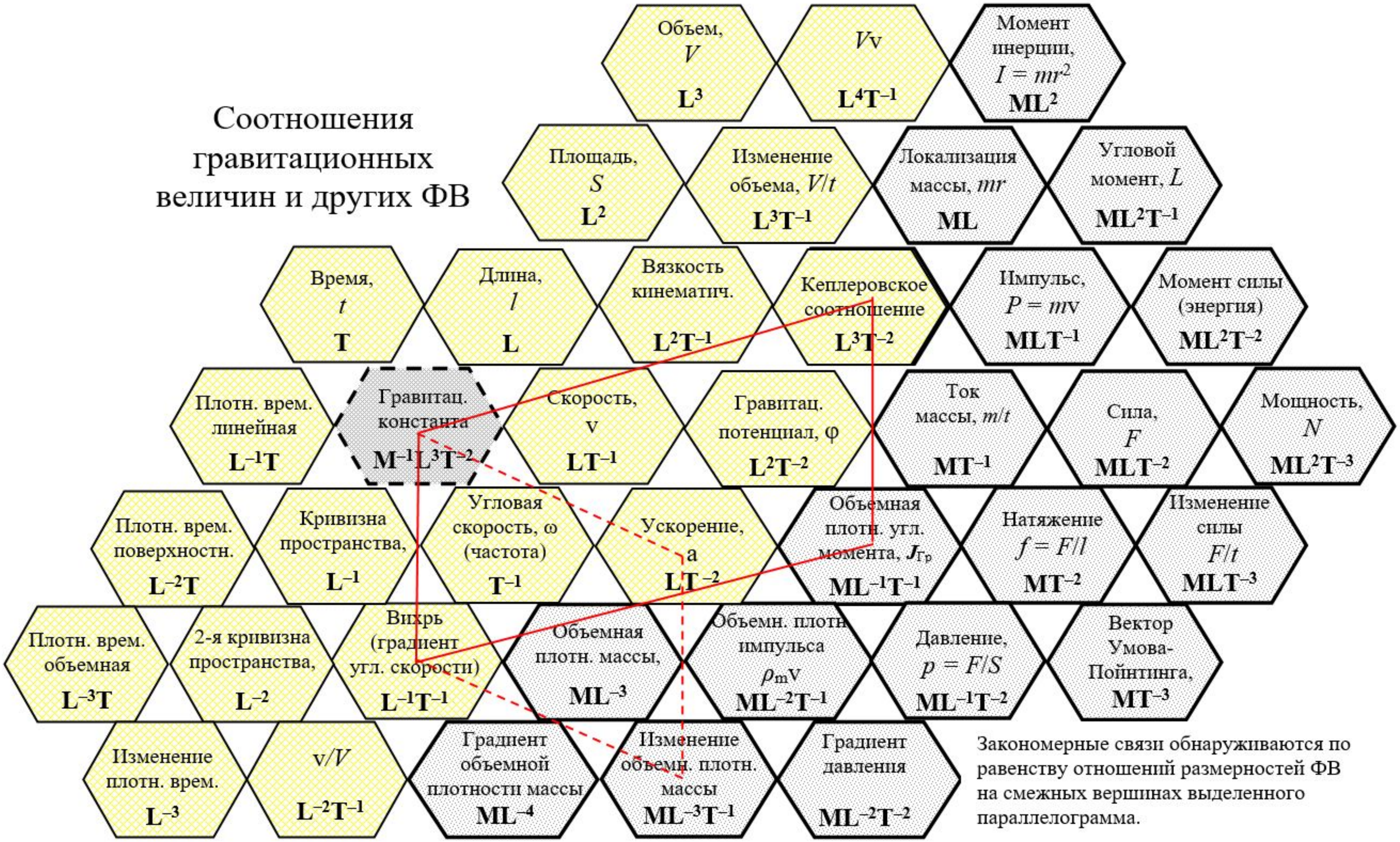
Факультативно

Энергия поля гравитации



Факультативно

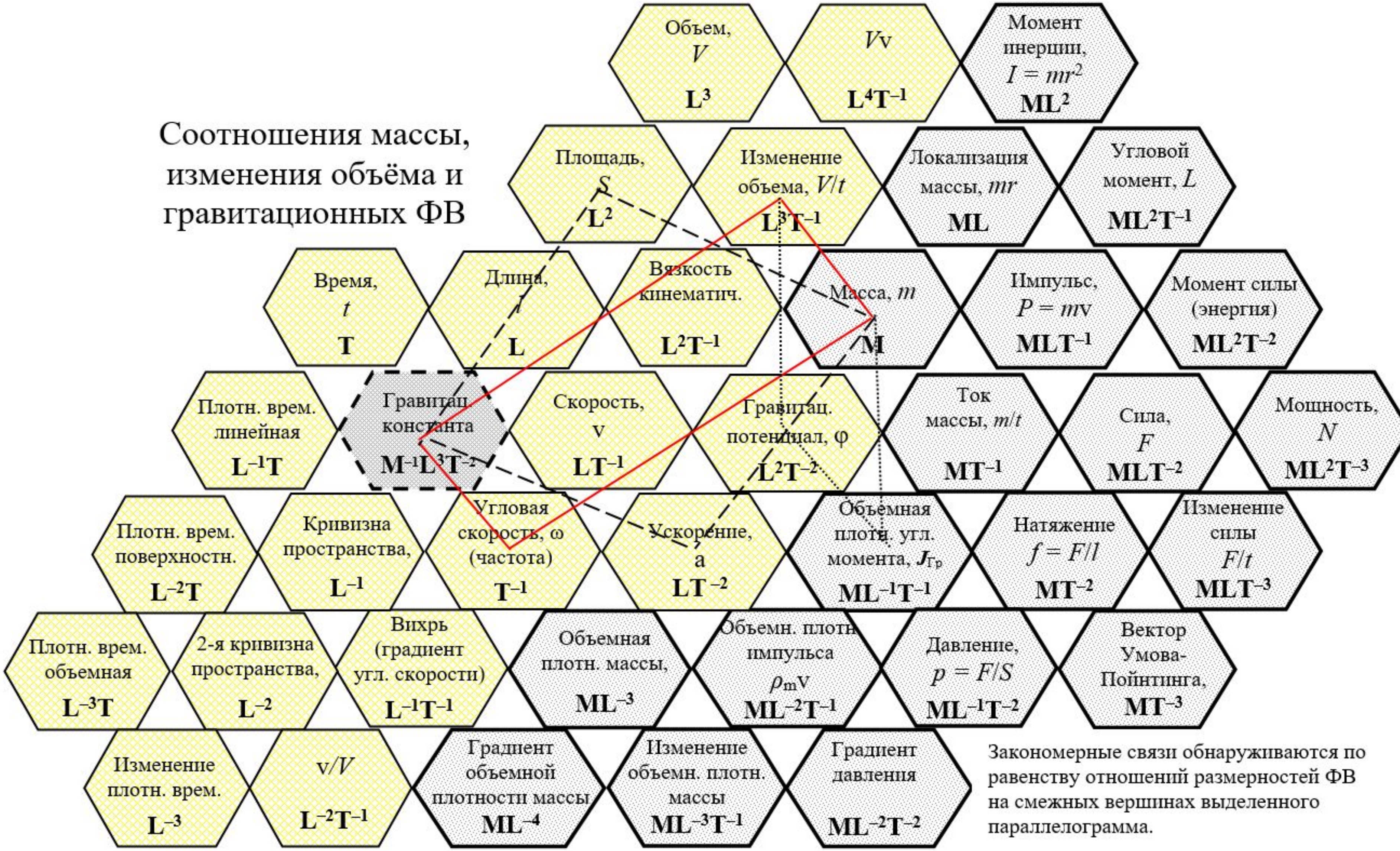
Соотношения гравитационных величин и других ФВ



Закономерные связи обнаруживаются по равенству отношений размерностей ФВ на смежных вершинах выделенного параллелограмма.

Факультативно

Соотношения массы, изменения объёма и гравитационных ФВ



Закономерные связи обнаруживаются по равенству отношений размерностей ФВ на смежных вершинах выделенного параллелограмма.

ТЕОРЕМА О ВИРИАЛЕ

$$\frac{1}{2}m\left\langle \mathrm{v}^2 \right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle U \right\rangle$$

Средняя кинетическая энергия материальной точки, совершающей пространственно ограниченное движение под действием сил притяжения, подчиняющихся закону обратных квадратов, равна половине ее средней потенциальной энергии с обратным знаком

Связь между потенциальной энергией и силой

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется ***потенциальным полем.***

Каждой точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы $\vec{F}$ действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии $\boldsymbol{U}$.

Между силой $\vec{F}$ и потенциальной энергией $\boldsymbol{U}$ имеется связь.

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{r}}}$$

Проекции вектора силы на оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Через проекции вектор силы записывается так:

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \boldsymbol{k} \right)$$

или более коротко $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad} U$

где $$\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k}.$$

Градиент *– это вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции.*

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}U$$

В формуле стоит знак «минус», что означает направленность силы в сторону наибыстрейшего уменьшения *U*.

Закон сохранения механической энергии

В сороковых годах девятнадцатого века трудами Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля (в разное время и независимо друг от друга) был доказан закон сохранения и превращения энергии.

Для консервативной системы частиц **полная энергия системы**:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} + U_{\text{внеш.}} = \text{const}$$

Для механической энергии **закон сохранения** звучит так: ***полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остаётся постоянной***.

Для замкнутой системы,
т.е. для системы на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} = \text{const}$$

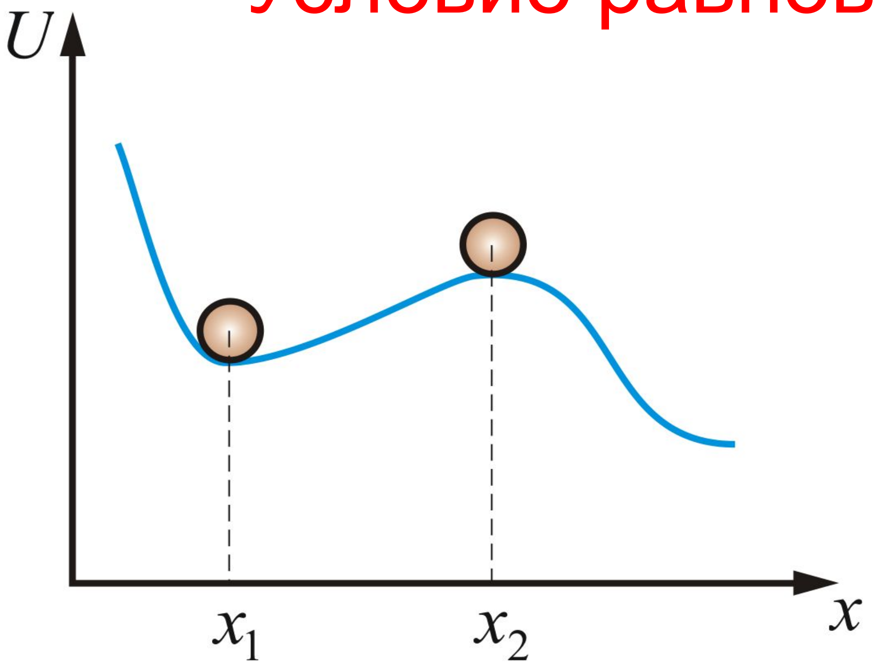
т.е. **полная механическая энергия замкнутой системы** *материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы,* ***остаётся постоянной****.*

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется – частично она переходит в другие виды энергии – неконсервативные.

Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется ***диссипативной,***

а сам процесс перехода называется ***диссипацией энергии***.

Условие равновесия МС



$$\left|\vec{F}_x\right| = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

При $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0$ система будет находиться в состоянии равновесия

для $x = x_1$ положение устойчивое;

для $x = x_2$ положение неустойчивое.

Превращения энергии

Потенциальная и кинетическая энергии могут превращаться друг в друга. Рассмотрим случай свободного падения первоначально покоившегося тела с высоты h. До начала падения кинетическая энергия тела равна нулю (тело покоится), а потенциальная — равна mgh. В конце падения тело обладает скоростью

$$v = \sqrt{2gh}$$

и, следовательно, кинетической энергией

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh,$$

Основные физические величины и соотношения для поступательного и вращательного (относительно неподвижной оси) движений тела

Поступательное движение		Вращательное движение	
Перемещение	$d\vec{r}$	Угловое перемещение	$d\vec{\varphi}$
Скорость	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
Ускорение	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$
Масса	m	Момент инерции	J
Сила	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$	Момент силы	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Импульс	$\vec{p}$	Момент импульса	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_s d\varphi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	Кинетическая энергия	$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики	$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$
	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	S	Угол поворота	φ
Скорость	$\upsilon = \frac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{d\upsilon}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
	$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$ $S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t \upsilon dt$		$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega dt$
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$

Закон сохранения импульса	$m\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \mathrm{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \dfrac{I\omega^2}{2}$
Полная энергия тела, катящегося с высоты h			
$mgh = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$			

Законы сохранения и причина их действия по теореме Э. Нётер

Энергии	Однородность времени
Импульса	Однородность пространства
Момента импульса	Изотропность пространства
Электрического заряда	Симметрия П-В к градиентным преобразованиям

Факультативно

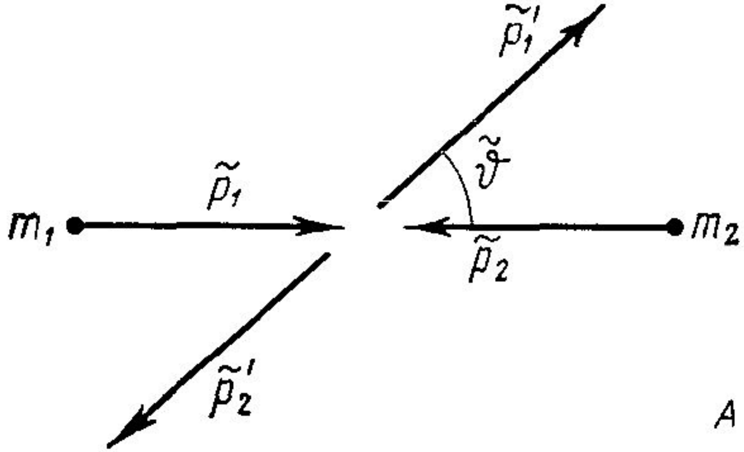


Рис. 4.12

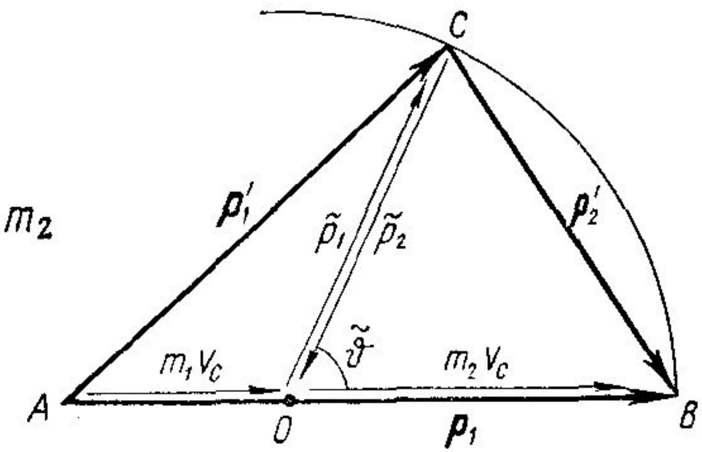


Рис. 4.13

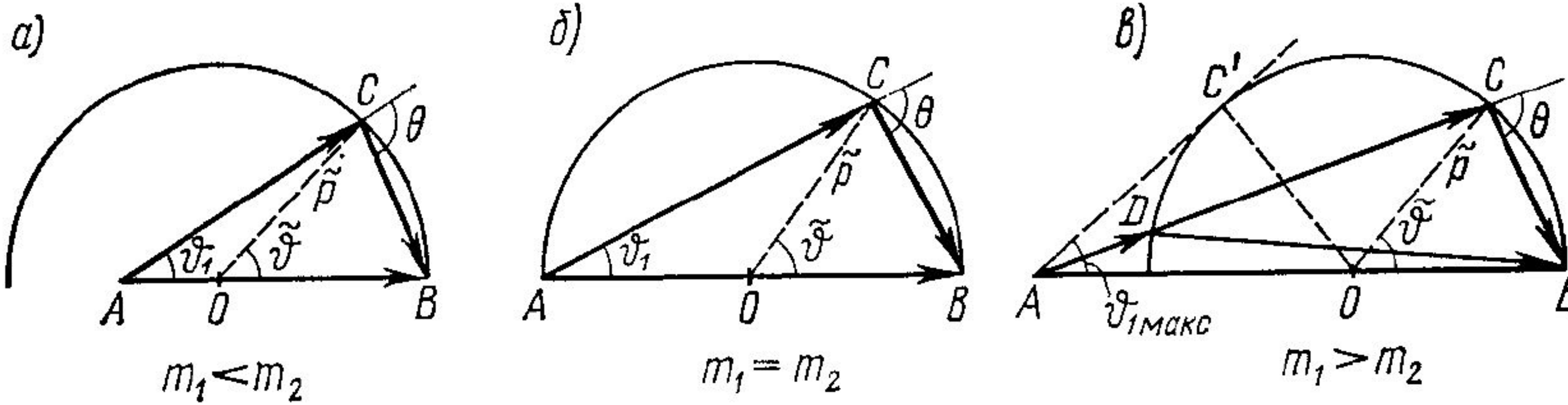


Рис. 4.14

Факультативно

для построения векторной диаграммы импульсов, соответствующей упругому столкновению двух частиц (одна из которых первоначально покоилась) необходимо:

1) изобразить отрезок AB, равный импульсу p_1 налетающей частицы;

2) через точку B — конец вектора $\mathbf{p}_1$ — провести окружность радиуса

$$\tilde{p} = \mu v_{\text{отн}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1, \tag{4.66}$$

центр которой — точка O — делит отрезок AB на две части в отношении $AO : OB = m_1 : m_2$.

Эта окружность есть геометрическое место точек всех возможных положений вершины C треугольника импульсов ABC, стороны AC и CB которого и представляют собой возможные импульсы частиц после столкновения (в K-системе отсчета).

Конец лекции 4-2022