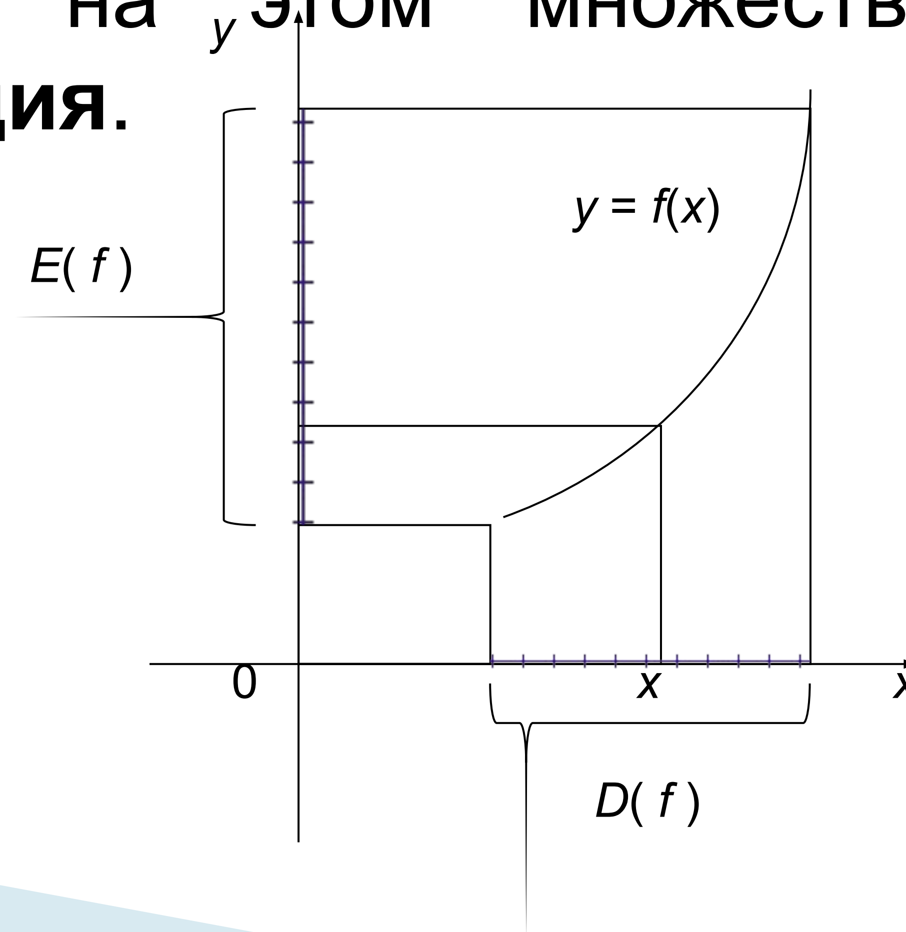
Обратная функция

Если каждому значению *x* из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определённому правилу *f* число *y*, то, говорят, что на этом множестве определена **функция**.



Если функция $y = f(x)$ принимает каждое своё значение y только при одном значении x, то эту функцию называют **обратимой.**

$$y = 2x + 2$$

$$y = x^2$$

$$y = 2 + \frac{1}{x}$$

$$y = x^3$$

$$x_1 = \sqrt{y} \qquad x_2 = -\sqrt{y}$$

- Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области её определения. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$.
- Поменяем местами x и y: $y = g(x)$.
- Функцию $y = g(x)$ называют обратной к функции $y = f(x)$.

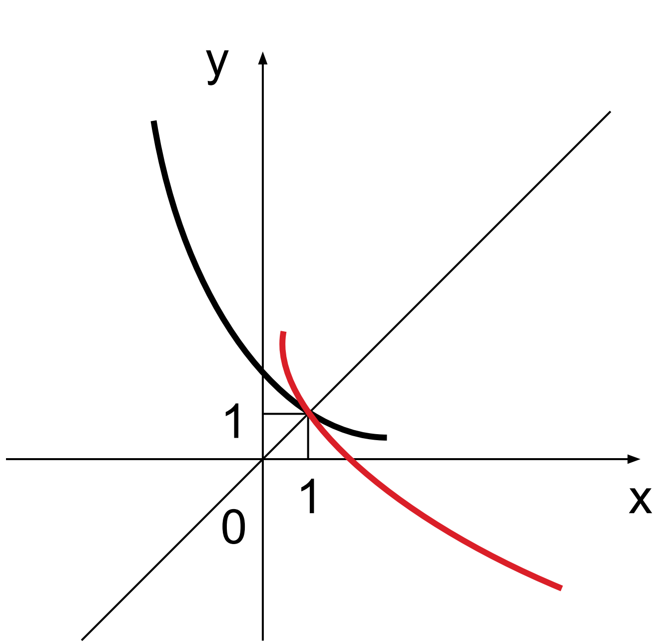
Свойства обратных функций

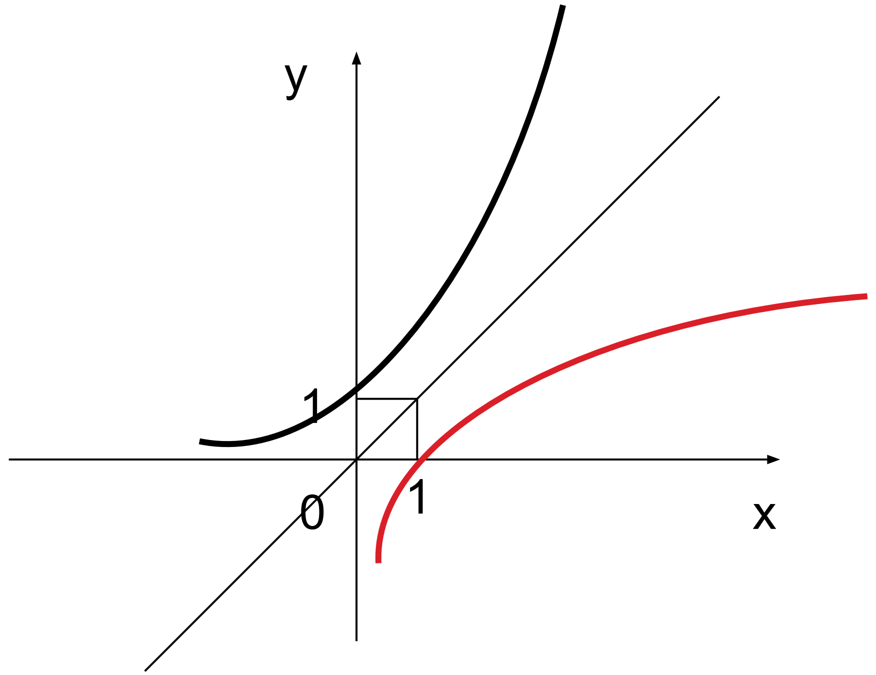
1. Область определения обратной функции D(g). совпадает с множеством значений исходной E(f), а множество значений обратной функции E(g) совпадает с областью определения исходной функции D(f):

   $D(f\ ) = E(g),\ E(f\ ) = D(g).$

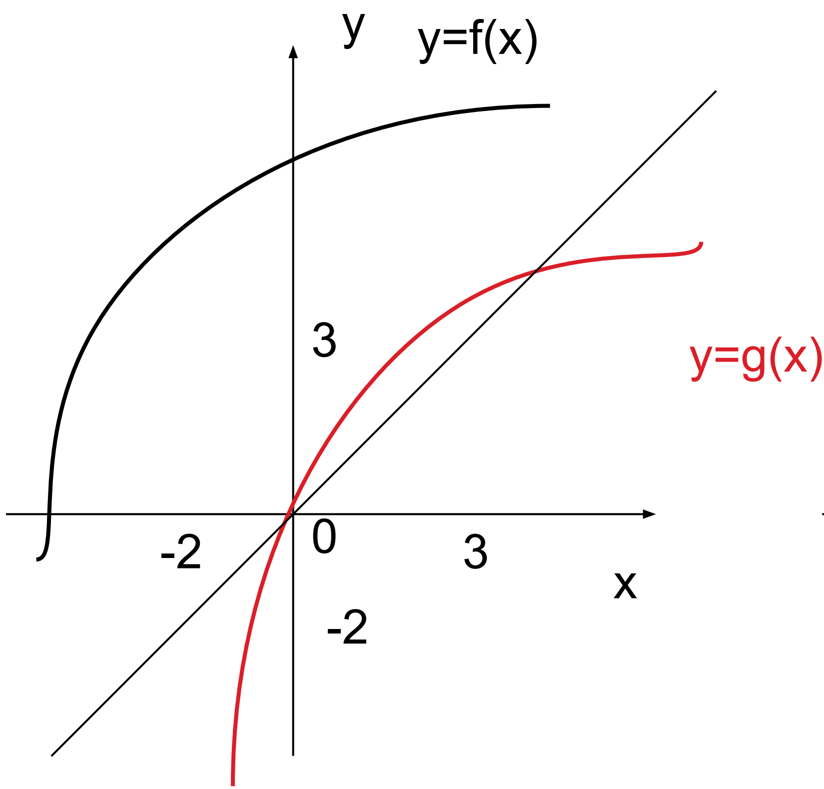
2. Монотонная функция является обратимой.

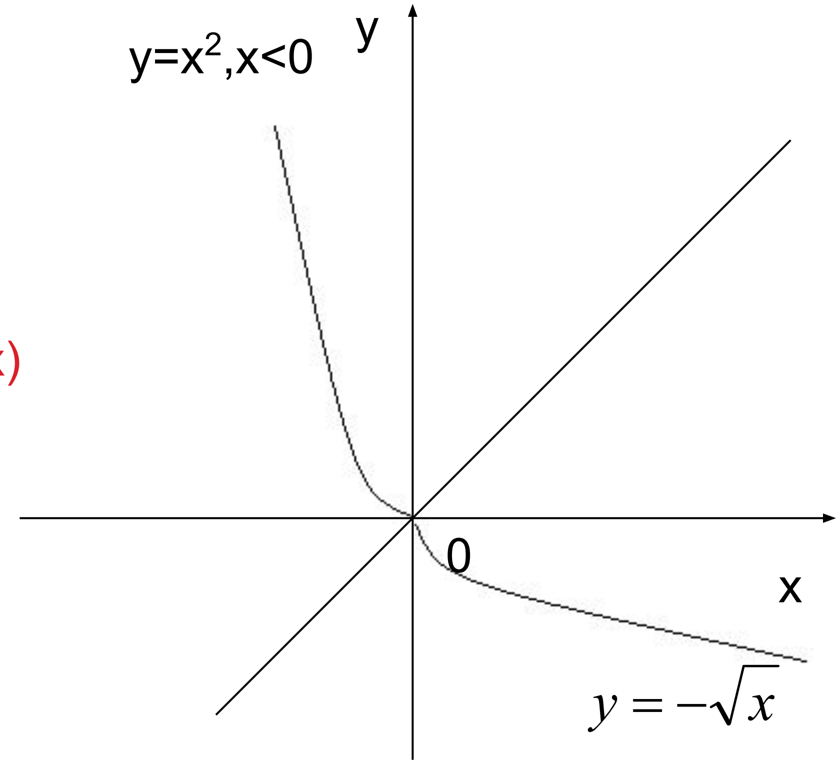
3. График обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.





Построить график функции, обратной данной



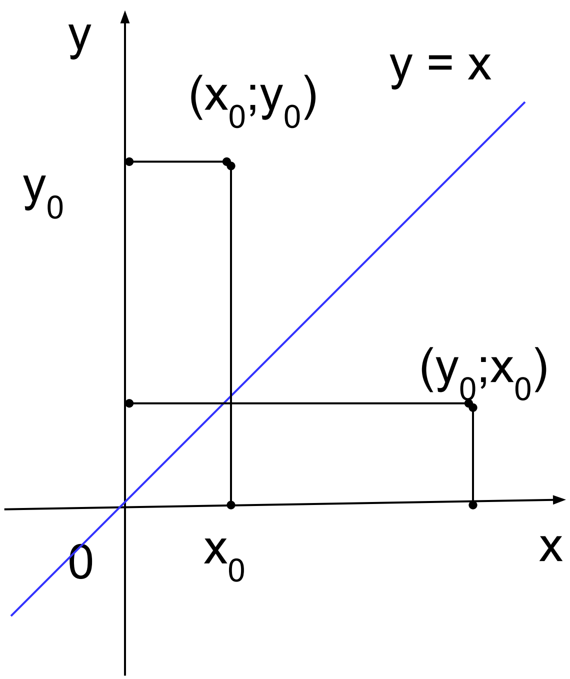


1. D(f)=R
2. E(f)=R
3. возрастающая

1. D(g)=R
2. E(g)=R
3. возрастающая

1. D(y)=(-∞;0]
2. E(y)=[0;+∞)
3. убывающая

1. D(y)=[0;+∞)
2. E(y)=(-∞;0]
3. убывающая



1. *Убедиться в монотонности функции y=f(x). Найти Д(f) и E(f).*
2. *Выразить переменную x через y.*
3. *Переобозначить переменные. (Заменить x на y, y на x).*
4. *Проверить D(f) = E(g), E(f) = D(g).*
5. *Построить графики и проверить симметричность относительно прямой y=x*

Нахождение формулы функции, обратной к функции $y=f(x)$

Пример 1

Найдите функцию, обратную к функции $y = 2x + 4$.

▶ Из равенства $y = 2x + 4$ можно однозначно выразить x через y:

$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$

Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x.

Обозначим в полученной формуле аргумент через x, а функцию — через y.

Получаем функцию $y = \frac{1}{2}x - 2$, обратную к функции $y = 2x + 4$. ◁

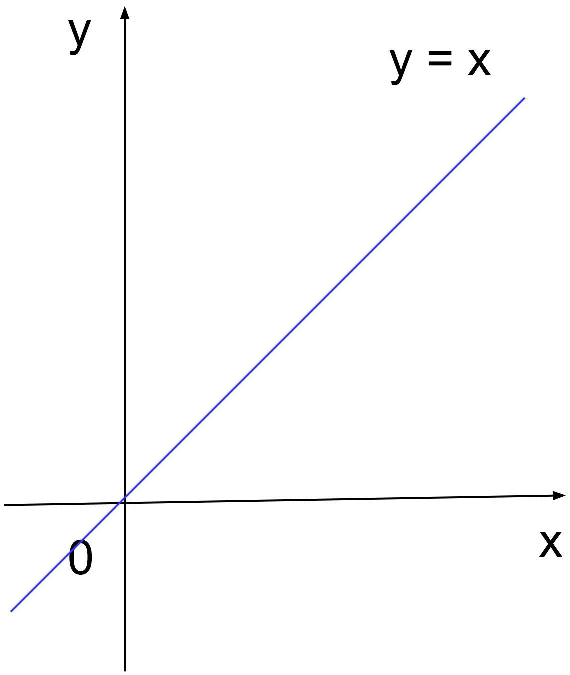
Пример 2 $y = \frac{1}{x-1}$.

▶ Область определения: $x \neq 1$. Тогда из равенства $y = \frac{1}{x-1}$ имеем

$$xy - y = 1,\ xy = y + 1,\ x = \frac{y+1}{y}.$$

Обозначим аргумент через x, а функцию — через y и получим функцию $y = \frac{x+1}{x}$, обратную к заданной. ◁

Для заданной функции найдите обратную функцию и постройте их графики, проверив их симметричность относительно прямой y= x



$$1)\, y = -2x + 4$$

$$2)\, y = \sqrt{x} - 1$$

Проверка:

$$1)\, y = -2x + 4$$
$$Д(y) = R, E(y) = R$$
$$2x = -y + 4$$
$$x = -\frac{1}{2}y + 2$$
Обратная
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$
$$Д(y) = R, E(y) = R$$

$$2)\, y = \sqrt{x} - 1$$
$$Д(y) = [0;\infty), E(y) = [-1;\infty)$$
$$-\sqrt{x} = -y - 1$$
$$\sqrt{x} = y + 1$$
$$x = (y+1)^2$$
Обратная
$$y = (x+1)^2$$
$$Д(y) = [-1;\infty), E(y) = [0;\infty)$$

Установите соответствие между функцией *f(x)* и обратной к ней функцией *g(x)*

1) $f(x) = 2x + 1$

2) $f(x) = 1 - 2x$

3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

5) $f(x) = \frac{2}{x+2}$

1) $f(x) = 2x + 1$

2) $f(x) = 1 - 2x$

3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

5) $f(x) = \frac{2}{x+2}$

Домашняя работа

1	2	3	4
$У=3x-1$	$У=(2x-1)/3$	$Y=x2-1$	$У=(x-1)2$
Проверь своё решение			