

# Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ 2

Зарецкий М.В.

ЧОУ ДПО ИТФИ

# Метод математической ИНДУКЦИИ

Рассуждения бывают общие и частные.  
Натуральное число, сумма цифр которого делится на 3, делится на 3 - общее.  
Число 741 делится на 3 - частное.  
Переход от общего утверждения к частному называется **дедукцией**.  
Дедукция широко используется в математике.

Переход от частных утверждений к общему называется **индукцией**.

Индукция лежит в основе получения нового знания.

Индукция бывает **полной** (все частные случаи рассмотрены) и **неполной** (на основании ряда частных случаев делается общий вывод). Неполная индукция может привести к ошибкам.

Рассмотрим пример полной индукции.



Существуют правильные многогранники следующих видов (таб. 1).

Таб. 1 Правильные многогранники

№	Вид	Вершины	Ребра	Грани
1	Тетраэдр	4	6	4
2	Гексаэдр	8	12	6
3	Октаэдр	6	12	8
4	Додекаэдр	20	30	12
5	Икосаэдр	12	30	20

Пусть  $V$ ,  $\Gamma$ ,  $P$  — число вершин, граней и ребер правильного многогранника.

Перебором легко доказать, что  $V + \Gamma = P + 2$ .

Это полная индукция

● Многочлен Эйлера  $n^2 + n + 41$  дает простые числа при  $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ . Можно ли на этом основании сделать вывод, что эта формула позволяет получить простое число при любом  $n$ ? При  $n = 40$  получаем:

$$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41^2.$$

Долгое время считалось, что выражение  $991n^2 + 1$  ни при каких натуральных  $n$  не является точным квадратом. Затем обнаружилось 29-значное число  $n$ , при котором выражение дает точный квадрат



Заблуждение Ферма (Pierre de Fermat, 1601 – 1665)  $2^{2^n} + 1$  - простое число. При  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  это так. Но при  $n = 5$  получаем  $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ . Это число делится на 641. Проверьте!

Перейдем к изучению **математической индукции**.

Метод математической индукции основан на аксиоме (принципе математической индукции).

Утверждение, зависящее от натурального числа  $n$ , справедливо для всех  $n$ , если:

1. оно справедливо при  $n = 1$  (базис индукции);
2. из справедливости его при  $n = k$  следует его справедливость при  $n = k + 1$  шаг индукции.

Рассмотрим пример. Надо доказать, что:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3}$$



1. Базис индукции. При  $n = 1$  формула верна, так как  $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ .

2. Шаг индукции. Пусть  $k$  – произвольное натуральное число и формула справедлива при  $n = k$ , то есть

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k + 1) = \frac{k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2)}{3}.$$

Докажем, что формула имеет верна при  $n = k + 1$ , то есть

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k + 1) \cdot (k + 2) = \frac{(k + 1) \cdot (k + 2) \cdot (k + 3)}{3}.$$

Для этого достаточно вычислить

$$(k + 1) \cdot (k + 2) + \frac{k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2)}{3}. \text{ Почему?}$$



# Элементы комбинаторики

В самых разных ситуациях приходится решать вопросы о том, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно получить из имеющихся объектов. Например, руководителю проекта необходимо разделить работу между программистами. Сколько возможно вариантов расписания занятий в университете.

Мы познакомимся с несколькими основными задачами комбинаторики, понимание которых необходимо программисту. Начнем с основных правил.

**Правило сложения или правило или.** Если элемент  $a$  может быть выбран  $n$  способами, а элемент  $b$  может быть выбран  $m$  способами, то выбрать **или**  $a$ , **или**  $b$  можно  $m + n$  способами.



Пример. Студенту требуется начать работу с языком Python. Он может воспользоваться услугами двух облачных сервисов (Google Colaboratory или RStudio Cloud) или установить на своем компьютере среду разработки (Anaconda, PyCharm, Visual Studio с нагрузкой Python, RStudio). Сколькими способами он может начать работу с Python, если он выбирает только один вариант: или использует облачную среду, или устанавливает среду разработки на свой компьютер?

● Решение. Выбрать облачную среду студент может 2 способами ( $n = 2$ ), выбрать среду для стационарной разработки - 4 способами ( $m = 4$ ).

Следовательно, выбрать или облачную, или стационарную среду можно  $n + m = 2 + 4 = 6$  способами.

Примечание. Среда разработки RStudio, предназначенная в первую очередь для разработки на языке R, позволяет работать и с языком Python.



● Правило умножения (правило «и», основное правило комбинаторики). Если элемент  $a$  может быть выбран  $n$  способами и для каждого из таких выборов элемента  $a$  другой элемент  $b$  может быть выбран  $m$  способами, то выбор пары элементов  $(a, b)$  может быть осуществлен  $m \cdot n$  способами.

Пример. Пусть студенту требуется выбрать пару («Облачная среда разработки», «Стационарная среда разработки»). Сколько имеется вариантов?

# Размещения, сочетания, перестановки

● Пусть имеется  $n$  различных элементов. При выборе  $m$  элементов из имеющихся  $n$  принято говорить, что они образуют соединения из  $n$  элементов по  $m$ .

**Размещениями** из  $n$  элементов по  $m$  ( $m \leq n$ ) называются соединения из  $n$  элементов по  $m$ , отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком



● Пример. Запишем все размещения из четырех элементов  $A, B, C, D$  по два:  $AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC$ . Получили 12 размещений из 4 элементов по 2.

Количество размещений из  $n$  элементов по  $m$  обозначают  $A_n^m$ . Мы установили, что  $A_4^2 = 12$ . В общем случае:  $A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 2) \cdot (n - m + 1)$ .

Эту формулу можно представить так:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

● Пример. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5, если ни одна цифра не должна повторяться?

$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ . Тот же ответ можно получить и так:  $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$ .

Если  $m = n$ , размещения отличаются друг от друга только порядком элементов.

Такие размещения называются **перестановками**.



● Количество перестановок из  $n$  элементов обозначается  $P_n$ . Получим формулу для этой величины: 
$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Напомню, что по определению  $0! = 1$ .

Пример. Группа из 10 студентов использует на занятии 10 компьютеров. Программа генерирует список студентов с указанием номера компьютера. Сколько возможно вариантов? Найдите!

**Сочетаниями** из  $n$  элементов по  $m$  ( $m \leq n$ ) называются соединения из  $n$  элементов по  $m$ , отличающиеся друг от друга составом элементов.

Пример. Запишем все сочетания из четырех элементов  $A, B, C, D$  по два:  
 $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ .

Получили 6 сочетаний из 4 элементов по 2.

Количество сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  обозначается  $C_n^m$ . Встречается и такое обозначение:  $\binom{n}{m}$



Обратите внимание на расположение  $n$  и  $m$  в формулах – что «вверху» и что внизу в каждой из них. Пишется именно так!

Получим формулу для количества сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ .

Выбрать  $m$  из  $n$  разных элементов можно  $C_n^m$  способами. Имеется  $m!$  возможностей упорядочения элементов каждого из сочетаний. Таким образом,  $A_n^m = m! C_n^m$ .

$$\text{Следовательно, } C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

● Пример. Отдел в программистской фирме состоит из 10 человек. Сколько имеется вариантов создания группы из 4 человек для выполнения задания?

Решение. Надо найти величину

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

Обратите внимание на то, что не нужно сначала вычислять числитель и знаменатель, а только потом делить. Придется выполнить много ненужных вычислений. Но о компьютерной реализации – потом.



- Сочетания и бином Ньютона

Отметим сначала следующее:

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m.$$

Самостоятельно проверьте все эти утверждения!

С помощью этих свойств можно получить таблицу Паскаля (рис. 1).

					1									
					1		1							
				1		2		1						
			1		3		3		1					
		1		4		6		4		1				
	1		5		10		10		5		1			
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Рис. 1. Таблица Паскаля

Пусть  $n$  – номер строки в треугольнике,  $m$  – номер столбца в треугольнике (нумерация в обоих случаях начинается с 0). Элементы, расположенные на пересечении строки  $n$  и столбца  $m$  треугольника суть величины  $C_n^m$ .



Заметим, что числа, расположенные в строках треугольника суть коэффициенты полинома  $(x + a)^0$  при  $n = 0$ ,  $(x + a)^1$  при  $n = 1$ ,  $(x + a)^2$  при  $n = 2$ ,  $(x + a)^3$  при  $n = 3$  и т.д.

Можно доказать, что

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k a^{n-k}.$$

Эта формула называется формулой разложения **бинома Ньютона**. Ее коэффициенты  $C_n^k$  называются **биномиальными коэффициентами**.

Формула бинома Ньютона доказывается методом математической индукции.

Биномиальные коэффициенты играют важную роль в теории вероятностей (биномиальный закон распределения случайной величины). В современной компьютерной графике используются кривые и поверхности Безье, основанные на полиномах Бернштейна, в которых используются биномиальные коэффициенты.



# Комбинаторика в Python

Решение задач комбинаторики требует выполнения громоздких вычислений. Рассмотрим компьютерную реализацию этих вычислений на примере пакетов языка Python. Но для того, чтобы понять вычислительные аспекты комбинаторики, будем писать свои программы и сравнивать их с программами из пакетов Python.

Начнем с вычисления факториала. Тем более, что вычисление факториала – классический пример при изучении рекурсии.

```
✓ [3] def myFact(m):  
0 сек.     if m == 0:  
           return 1  
           else:  
             return m * myFact(m-1)  
  
✓ [5] p,q,r=myFact(0),myFact(5),myFact(15)  
0 сек.     print(p,q,r)  
  
1 120 1307674368000
```

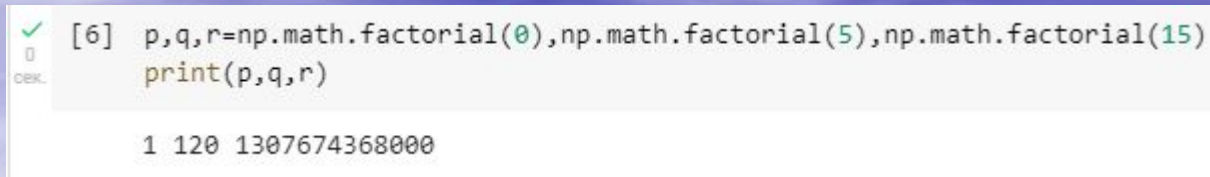
Рис. 2. Программа для вычисления факториала и примеры ее использования

Вместо рекурсии можно использовать цикл.

Отметим, что факториал от аргумента 15 – это весьма большая величина.



Выполним те же вычисления с помощью функции из пакета NumPy (рис. 3).



```
[6] p,q,r=np.math.factorial(0),np.math.factorial(5),np.math.factorial(15)
    print(p,q,r)

1 120 1307674368000
```

The image shows a screenshot of a Jupyter Notebook cell. The cell contains two lines of Python code: `p,q,r=np.math.factorial(0),np.math.factorial(5),np.math.factorial(15)` and `print(p,q,r)`. The output of the cell is `1 120 1307674368000`. The cell is numbered [6] and has a green checkmark icon in the top left corner.

Рис. 3. Вычисление факториала с помощью функции из пакета NumPy  
В реальных задачах использование пакетов предпочтительнее.

Язык Python не ограничивает длину целого числа. Всегда ли это хорошо? Найдем количество перестановок для 50 объектов, равное  $50!$  (рис. 4).

```
✓
0 сек.
▶ s=np.math.factorial(50)
  print(s)
  t=float(s)
  print(t)
  out=r'{0:5.3e}'.format(t)
  print(out)

304140932017133780436126081660647688443776415689605120000000000000
3.0414093201713376e+64
3.041e+64
```

Рис. 4 Вычисление количества перестановок для 50 объектов  
Мы получили целое число перемещений – точное, но малополезное. Преобразовав это число в вещественное, мы получили возможность оценить его. С помощью форматирования мы сделали вывод более удобным для оценки.



# Более интересный подход к вычислению факториала реализован в научном пакете `scipy.special` (рис. 5)

```
✓ [34] p,q,r=scipy.special.factorial(0,exact = True),scipy.special.factorial(5,exact=True),scipy.special.factorial(50)
0     print(p,type(p),q,type(q),r,type(r))
сек.  out=r'{0:5.3e}'.format(t)
      print(out)

1 <class 'int'> 120 <class 'int'> 3.041409320171338e+64 <class 'numpy.float64'>
3.041e+64
```

Рис. 5. Вычисление факториала функцией пакета `scipy.special`

Функция `scipy.special.factorial` принимает 2 аргумента. Первый аргумент – неотрицательное целое число, факториал которого вычисляется.

Второй аргумент `exact` указывает, вычисляется ли факториал в виде целого числа или в виде вещественного числа. Аргумент не является обязательным. Если он не задан, результат возвращается в виде вещественного числа. Если требуется, чтобы результат был возвращен в виде целого числа, при вызове функции указывается `exact = True` (см. рис. 5).

Функция `binom` из того же пакетане имеет аргумента `exact` и возвращает только вещественные значения.