

Презентация к уроку алгебры 10 класс.
Выполнил ученик 10 Б – Белов Никита.

Формулы сложения

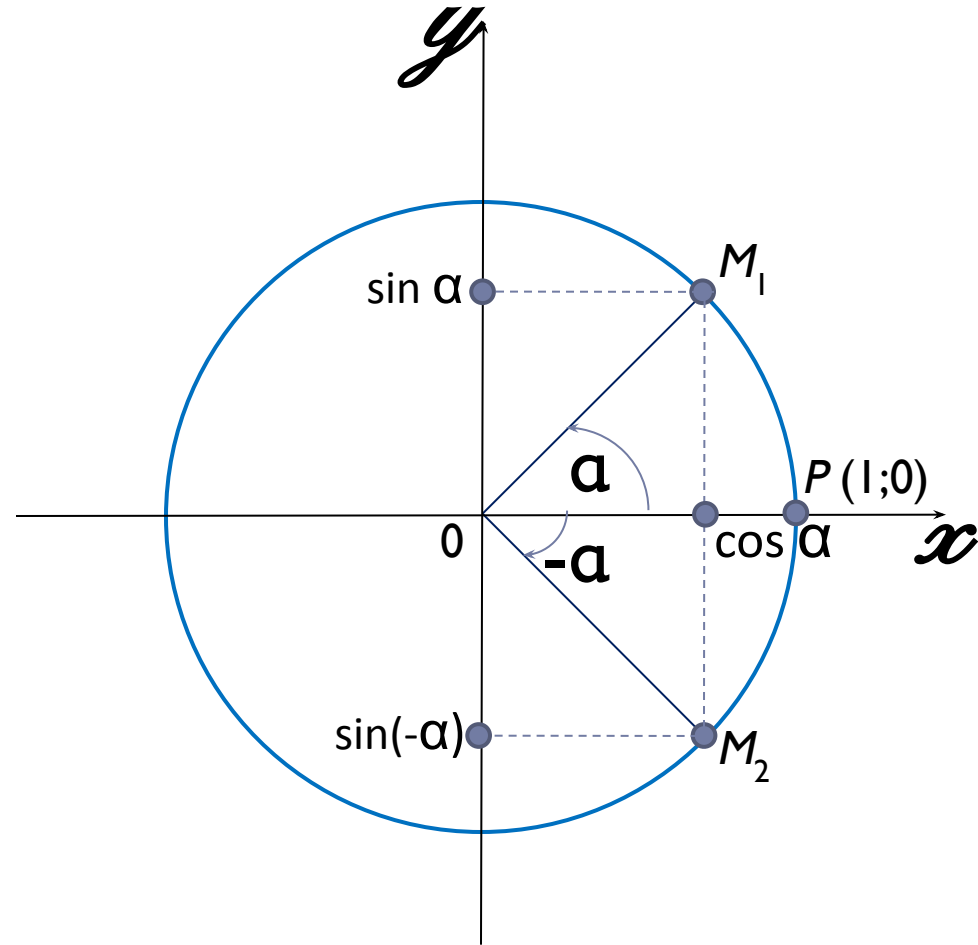
Тригонометрические формулы

Повторение

- $M_1 (\cos \alpha; \sin \alpha)$
- $M_2 (\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$

- $\sin(-\alpha) = ?$
- $\cos(-\alpha) = ?$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = ?$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = ?$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = ?$

- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = \sin(-\alpha)/\cos(-\alpha) =$
 $= (-\sin \alpha)/\cos \alpha = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$



Формулы сложения

□ *Формулами сложения* называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через косинусы и синусы углов α и β .

□ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

□ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

□ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

□ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$



Теорема

□ Для любых α и β справедливо равенство $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

□ По определению:

$M_\alpha (\cos \alpha; \sin \alpha)$

$M_{-\beta} (\cos(-\beta); \sin(-\beta))$

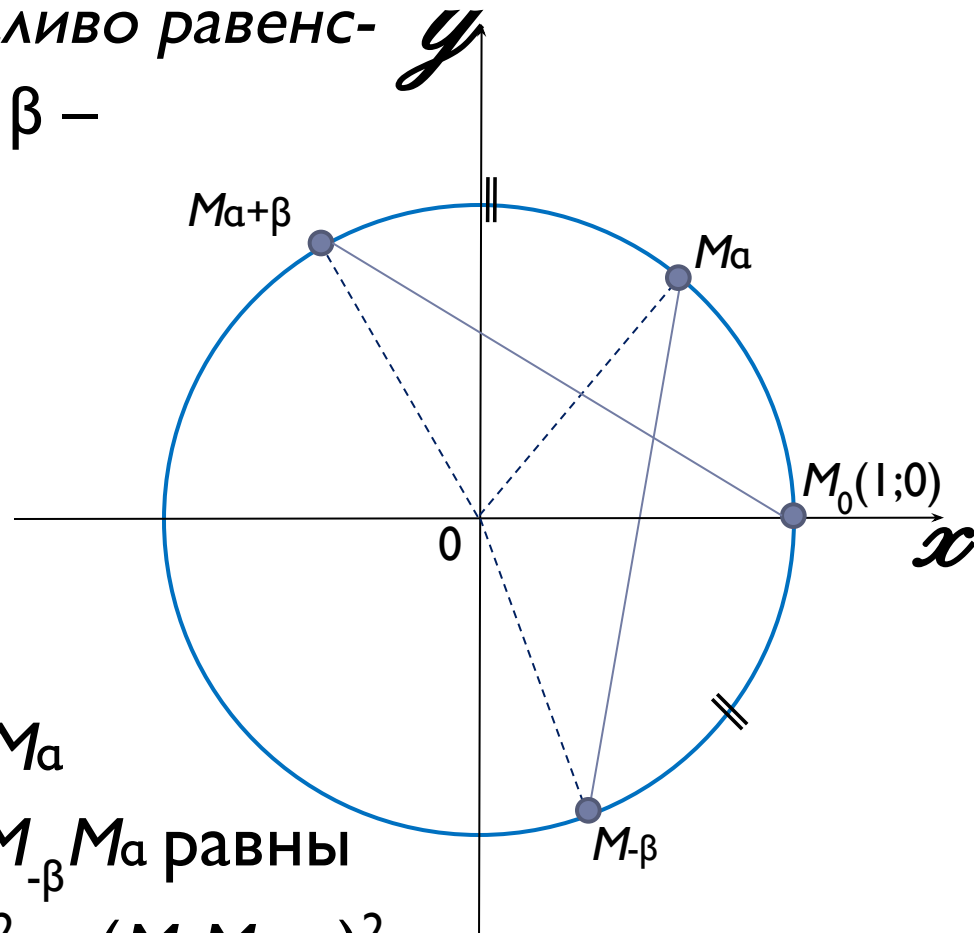
$M_{\alpha+\beta} (\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta))$

□ $\angle M_0 O M_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta} O M_\alpha$

□ $\Rightarrow \triangle M_0 O M_{\alpha+\beta} = \triangle M_{-\beta} O M_\alpha$

□ \Rightarrow основания $M_0 M_{\alpha+\beta} = M_{-\beta} M_\alpha$ равны

□ А значит равны $(M_{-\beta} M_\alpha)^2$ и $(M_0 M_{\alpha+\beta})^2$, запишем их



Теорема

□ Имеем:

$$M_0 (1; 0)$$

$$M_\alpha (\cos \alpha; \sin \alpha)$$

$$M_{-\beta} (\cos(-\beta); \sin(-\beta))$$

$$M_{\alpha+\beta} (\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta))$$

$$(M_0 M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta} M_\alpha)^2$$

$$\square \Rightarrow (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2 = (\cos(-\beta) - \cos \alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin \alpha)^2$$

$$\square \Leftrightarrow 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) = \cos^2 \beta - 2\cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2\sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$\square \Leftrightarrow 2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$\square \Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Теорема доказана.



Следствие 1

- $\cos(\alpha - \beta) = ?$
 - $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) =$
 $= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 - $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$
 - $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$
 - $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\pi/2) \cos \alpha + \sin(\pi/2) \sin \alpha = \sin \alpha$
 - т.е. $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$
 - При $\alpha = \pi/2 - \beta$ имеем:
 - $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\pi/2 - \pi/2 + \beta) = \cos \beta = \sin \alpha = \sin(\pi/2 - \beta)$
 - т.е. $\sin(\pi/2 - \beta) = \cos \beta$
-



Следствие 1

$$\begin{aligned}\square \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\pi/2 - (\alpha + \beta)) = \cos((\pi/2 - \alpha) - \beta) = \\ &= \cos(\pi/2 - \alpha) \cos \beta + \sin(\pi/2 - \alpha) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\square \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\square \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\square \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$



Следствие 2

- Можно вывести аналогичные формулы для $\operatorname{tg}(a \pm \beta)$ и $\operatorname{ctg}(a \pm \beta)$.
- $$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a \pm \beta) &= \sin(a \pm \beta) / \cos(a \pm \beta) = \\ &= (\sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta) / (\cos a \cos \beta \mp \sin a \sin \beta) = \\ &= (\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} \beta) / (1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \beta)\end{aligned}$$
- Аналогично
$$\operatorname{ctg}(a \pm \beta) = (\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} \beta \mp 1) / (\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} a)$$



Конец

....