Лабораторная работа. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Варианты

$$a)\quad B=\begin{pmatrix} Nc+10 & N\text{г} & 1 \\ N\text{г} & N\text{c}+10 & 3 \\ 1 & 3 & \text{Nг}+4 \end{pmatrix},\quad \bar{c}=\begin{pmatrix} N\text{г} \\ \text{Nc}+10 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Nг= номер группы (1,2,3,…) , Nc = номер студента (от 1 до 40)

Найти методом Зейделя или методом Якоби решение СЛАУ

Nr=2 (19ИСП-229)
Nr=1 (19ИСП-219)
Nr=3 (ИСП110-11)

1 этап. Проверить условия сходимости

2 этап. Применить выбранный численный метод

СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Метод простых итераций

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k-1)}, \, i = 1,n;$$

$k = 1, 2, \ldots$ до тех пор, пока $\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon$.

Сходимость метода простых итераций определяется теоремой.

Теорема. Для того чтобы метод простых итераций сходился при любом начальном значении вектора $\bar{x}^0$, достаточно, чтобы какая-нибудь норма матрицы α была меньше единицы

$$\|\alpha\| < 1.$$

Итерационный метод

$$\overline{x}^k = \alpha \cdot \overline{x}^{k-1} + \overline{\beta}.$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} \dots & \frac{-a_{13}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{-a_{n2}}{a_{22}} \\ . & . & . & . \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{bn}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Диагональный элемент каждой строки системы по модулю больше, чем сумма остальных элементов в строке, также взятых по модулю.

Например, для СЛАУ из примера 4.1

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix};$$

проверим условия сходимости;

$$|3| > |-1| + |0|, \qquad 3 > 1;$$

$$|1| < |-2| + |1|, \qquad 1 < 3;$$

$$|4| > |2| + |-1|, \qquad 4 > 3,$$

т.е. второе уравнение не удовлетворяет условиям сходимости и данной СЛАУ нельзя найти корни методом Якоби. Таких систем, для которых условия сходимости не выполняются, большое количество. Поэтому существует методика приведения СЛАУ к сходящемуся виду. Для приведения матрицы A к сходящемуся виду практически поступают следующим образом:

1. Из заданной системы выделяют уравнения, модули коэффициентов которых больше суммы модулей остальных коэффициентов в этих уравнениях.

2. Каждое из выделенных уравнений записывается в такую строку новой системы, чтобы этот максимальный элемент стал диагональным.

3. Из оставшихся и выделенных уравнений системы составляются линейно независимые между собой линейные комбинации уравнений так, чтобы выполнялся принцип 2, были заполнены все свободные строки новой системы и были использованы все уравнения исходной системы.

Пример Привести систему

$$\begin{cases} x_1 + 5 \cdot x_2 - \ x_3 = 8; \\ x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 = 8; \\ 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 17 \cdot 4x_3 = -39, \end{cases}$$

к сходящемуся виду и вычислить первые четыре итерации методом Якоби при нулевых начальных условиях.

Каждое уравнение в исходной системе отметим соответственно буквами а)–б)–в). В соответствии с приведенной выше методикой, проанализируем каждое уравнение, начиная с первого.

Первое уравнение а) может быть поставлено в новой сходящейся системе на вторую строку (римские цифры): 5 > 1 + 1.

Второе уравнение б) в новой системе может стать третьим уравнением (III): 3 > 1 + 1.

Третье уравнение 3) могло бы быть в новой системе третьим уравнением, однако его место уже занято. А нам требуется в новой системе первое уравнение. Оно может быть получено на основании третьей рекомендацией методики, при этом обязательно нужно использовать незадействованное пока уравнение в) и любую линейную комбинацию (сложение и умножение на число) других уравнений системы. Таких комбинаций может быть множество – это своего рода искусство. По логике приведения первый коэффициент системы максимальный в уравнении в) и равен 6, но коэффициент 17 должен быть компенсирован и по знаку, и значением. Это может быть достигнуто добавлением уравнения б) и умножением его на скаляр. В результате имеем формулу преобразования I = в) + 6 · б). Полученная система имеет вид

$$\begin{cases} 12 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 = 9\,; \\ x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 = 8\,; \\ x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 = 8\,. \end{cases}$$

Общий вид метода простых итераций

$$x_x = (b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - ... - -a_{1n} \cdot x_n) / a_{11};$$

$$x_2 = (b2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - ... - -a_{2n} \cdot x_n) / a_{22};$$

....;

$$x_n = (b_n - a_{11} \cdot x_1 - a_{12} \cdot x_2 - ... - -a_{1n-1} \cdot x_{n-1}) / a_{nn}.$$

Предполагаем, что вектор начальных приближений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ задан. Далее, как обычно в итерационных методах, в левую часть уравнений подставляем предыдущее решение, в правой части получаем последующее. Запишем итерационные формулы для k-й итерации:

$$x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(k-1)} - a_{13} \cdot x_3^{(k-1)} - ... - -a_{1n} \cdot x_n^{(k-1)}) / a_{11};$$

$$x_2^{(k)} = (b2 - a_{21} \cdot x_1^{(k-1)} - a_{23} \cdot x_3^{(k-1)} - ... - -a_{2n} \cdot x_n^{(k-1)}) / a_{22};$$

....;

$$x_n^{(k)} = (b_n - a_{11} \cdot x_1^{(k-1)} - a_{12} \cdot x_2^{(k-1)} - ... - -a_{1n-1} \cdot x_{n-1}^{(k-1)}) / a_{nn},$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{9}{12} + \frac{1}{3} \cdot x_2^{(k)} - \frac{1}{12} x_3^{(k)};$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5} \cdot x_1^{(k)} + \frac{1}{5} x_3^{(k)};$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \cdot x_1^{(k)} + \frac{1}{3} x_2^{(k)}.$$

Вычислим первую итерацию, подставляя нулевые начальные условия в правые части уравнений. Затем полученные в левой части корни вновь подставим в правые части и таким образом вычислим первые 4 итерации:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	9/12	8/5	8/3
2	0,9277	1,9833	2,9499
3	1	2,0044	3,0164
4	0,999	2,0003	3,0013

Алгоритмизация метода Якоби

Шаг 1. Задание точности вычисления корней ε,
начального приближения $\overline{x}^0$.
Счетчик числа итераций $k = 0$.
Вспомогательная переменная $m = 1$.

Шаг 2. Цикл $m > \varepsilon$.

Шаг 3. Цикл $i = 1, \ldots, n$.

Шаг 4. $m = 0$.
$S = 0$ (переменная для накопления суммы).

Шаг 5. Цикл $j = 1, \ldots, n$.
$S = S + A_{i,j} \cdot x_{j,k}$ для $i \neq j$.
Конец цикла j.

Шаг 6. $x_{j,k+1} = (b_i - S)/A_{i,i}$ для $i \neq j$.
Конец цикла j.

Шаг 7. Если $|b - a| > m$, то $m = |b - a|$.
Конец цикла i.

Шаг 8. $k = k + 1$.
Конец цикла m.

Шаг 9. Печать результатов: корни системы $\overline{x}$, число итераций k.

Метод Зейделя

Метод Зейделя – это модификация метода простых итераций. Основное отличие заключается в том, что при вычислении k-го приближения корня $x_i^{(k)}$ учитывается уже вычисленные на k-й итерации значения $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, …, $x_{i-1}^{(k)}$. Значения $x_{i+1}^{(k-1)}$, $x_{i+2}^{(k-1)}$, …, $x_n^{(k-1)}$ берутся, вычисленные на предыдущем шаге:

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1}{a_{1i}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot x_j^{(k-1)};$$

$$x_2^{(k)} = \frac{b2}{a_{2i}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot x_1^{(k)} - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} \cdot x_j^{(k-1)};$$

....;

$$x_n^{(k)} = \frac{b_n}{a_{ni}} - \sum_{j=n}^{n-1} \frac{a_{nj}}{ann} \cdot x_j^{(k)}.$$

1. Матрица системы, приведенная к сходящемуся виду

$$A := \begin{pmatrix} 12 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{ORIGIN} := 0$$

2. Система, удобная для итераций по схеме Якоби

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta := \begin{pmatrix} \frac{9}{12} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

2. Проверка достаточного условия сходимости

$$\text{norm1}(\alpha) = 0.583 \quad \text{norm2}(\alpha) = 0.524 \quad \text{norme}(\alpha) = 0.61$$

3. Задание начального приближения

$$x^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Задание итерационной формулы

$$i := 0..4$$

$$x^{\langle i+1 \rangle} := \alpha \cdot x^{\langle i \rangle} + \beta$$

4. Формирование вектора-столбца решений *5.Проверка решения*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.928 & 1 & 1 & 1.001 \\ 0 & 1.6 & 1.983 & 2.004 & 2.004 & 2 \\ 0 & 2.667 & 2.95 & 3.019 & 3.001 & 3.001 \end{pmatrix} \qquad A \cdot x^{\langle 4 \rangle} - b = \begin{pmatrix} -0.015 \\ 0.017 \\ 3.086 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$