

Лекция 5-2

Рекуррентная сеть Хопфилда

Рекуррентная сеть Хопфилда представляется в виде системы с обратной связью выхода сети с ее входом. Выходные сигналы нейронов являются одновременно входными сигналами сети. В классической сети Хопфилда отсутствует связь выхода нейрона с собственным входом, что соответствует значению веса 0 на главной диагонали матрицы, а матрица весов является симметричной.

Нейронная сеть Хопфилда

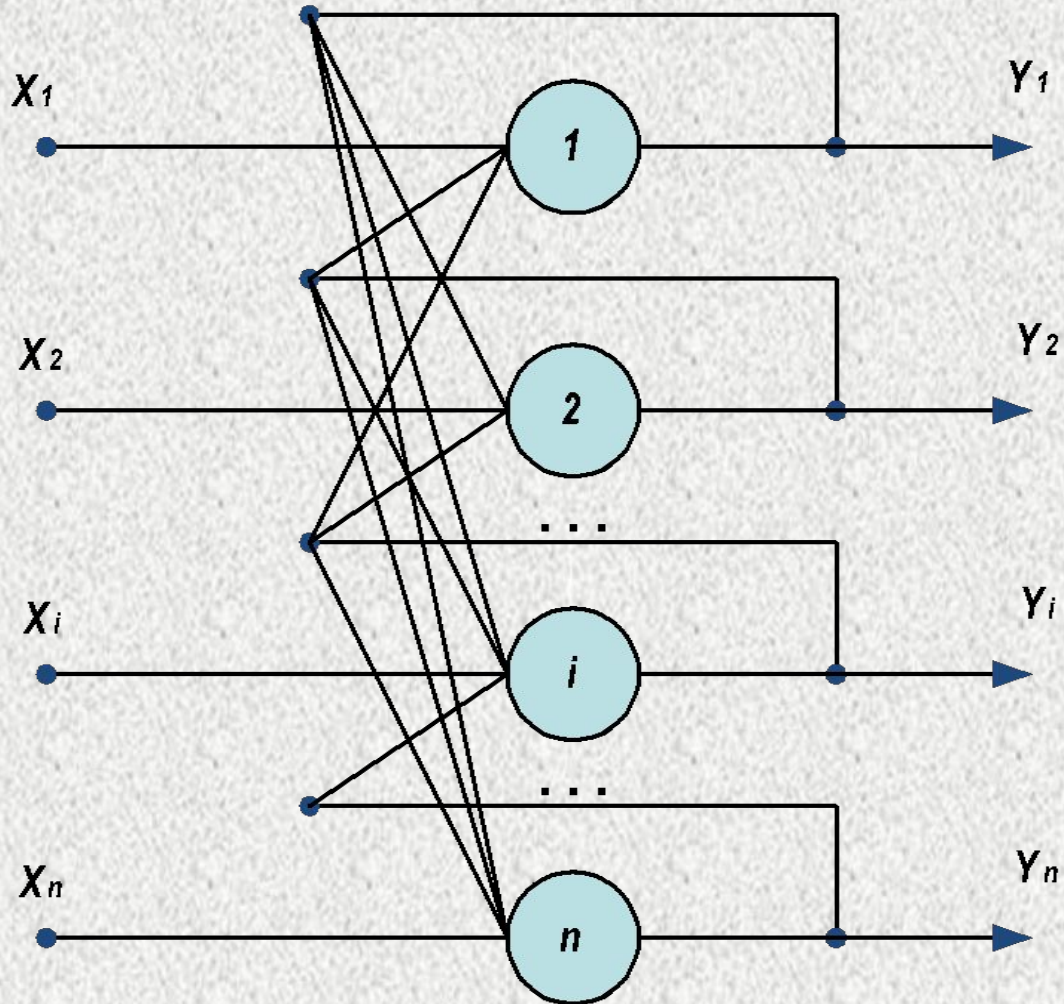


Рис.3.4. Структура нейронной сети Хопфилда

Входной сигнал - вектор $X = \{x_i; i=1, \dots, n\}$, n – число нейронов в сети и размерность входных и выходных векторов.

Каждый элемент x_i равен +1, или -1.

Вектор k -го примера - X^k , а его компоненты - x_i^k , $k=1, \dots, m$, m – число примеров.

Если образ распознан, выход сети равен $Y = Xk$, где Y – вектор выходных значений сети: $Y = \{y_i; i=1, \dots, n\}$.

Инициализация сети

ВЕСА СЕТИ

$$w_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^m x_i^k x_j^k, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

где i и j – индексы соответственно предсинаптического и постсинаптического нейронов;

x_i^k , x_j^k – i -ий та j -ый элементы вектора k -го примера.

Рекуррентные сети устойчивы, если весовая матрица $W = (w_{ij})$ симметрична, а на ее главной диагонали – нули:

- 1) $w_{ij} = w_{ji}$ для всех $i \neq j$; (2.58)
- 2) $w_{ii} = 0$ для всех i .

В качестве входных данных сети Хопфилда можно использовать двоичные значения. Здесь мы будем использовать +1 для обозначения состояния «включено» и (-1) для состояния «выключено».

Расчет суммарного сигнала net_j нейрона S_j вычисляется по формуле:

$$net_j = \sum_{i=1}^n S_i * W_{ij}$$

где S_i – обозначает состояние нейрона с номером i .

Когда элемент обновляется, его состояние изменяется в соответствии с правилом:

$$S_j = \begin{cases} +1, & \text{если } net_j > 0 \\ -1, & \text{если } net_j < 0 \end{cases}$$

Эта зависимость называется сигнум - функцией и записывается следующим образом:

$$S_j = \text{sgn}(net_j)$$

Если комбинированный ввод равен 0, то элемент остается в состоянии, в котором он был до обновления.

Сеть Хопфилда ведет себя как память и процедура сохранения отдельного вектора (образца) представляет собой вычисление прямого произведения вектора с ним самим. В результате этой процедуры создается матрица, задающая весовые значения сети Хопфилда, в которой все диагональные элементы должны быть установлены равными 0 (поскольку диагональные элементы задают автосвязи элементов, а элементы сами с собой не связаны).

Таким образом, весовая матрица, соответствующая сохранению вектора X , задается следующей формулой:

$$W = X^T * X$$

Рассмотрим практический пример использования сети Хопфилда для запоминания и ассоциации образов

Исходный образец: $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * [1 \quad -1 \quad 1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Весовые значения после обнуления главной диагонали будут равны:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Первый элемент обновляется путем умножения
образца на первый столбец матрицы весов**

$$[1 \ -1 \ 1 \ 1] * \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\text{sgn}(3) = 1$$

Отметим, что первый элемент вектора [1 -1 1 1] остался в том же состоянии (1)

**АНАЛОГИЧНО РАССЧИТЫВАЮТСЯ СОСТОЯНИЯ ОСТАВШИХСЯ
ЭЛЕМЕНТОВ: -1 1 1**

Проверим устойчивое состояние сети Хопфилда для найденных весов W , но для искаженного образца:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Элементы должны обновляться в случайном порядке. Для иллюстрации будем обновлять элементы в порядке 3, 4, 2, 1. Сначала рассмотрим элемент 3-ий:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{sgn}(1) = 1$$

Элемент 3-ий не поменял своего значения (1).

Рассмотрим состояние для элемента 4-го:

$$[-1 \ -1 \ 1 \ 1]^* \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{sgn}(1) = 1$$

Элемент 4-ый остается в том же состоянии (1).

Теперь рассмотрим элемент 1-ый:

$$[-1 \ -1 \ 1 \ 1]^* \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \text{sgn}(3) = 1$$

Следует отметить, что 1-ый элемент изменил свое состояние с -1 на 1.

Рассмотрим состояние для элемента 2-го:

$$[1 \ -1 \ 1 \ 1] * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$\text{sgn}(-3) = -1$$

Элемент 2-ой остается в том же состоянии (-1).

Следует отметить, что мы выявили исходный вектор (1 -1 1 1), характеризующий устойчивое состояние сети

Определим весовую матрицу сети Хопфилда для двух образцов:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

При запоминании двух и более образцов используем процедуру сложения полученных матриц. В результирующей матрице обязательно обнуляем главную диагональ

$$W = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Существует зависимость между количеством элементов сети N и количеством образцов, которые она может запомнить P :

$$W = \begin{matrix} & 0 & -2 & 2 \\ -2 & & 0 & \\ 2 & -2 & & 0 \end{matrix}$$

Таким образом, для запоминания 100 образцов необходимо иметь сеть, количество входов которой больше 1500