Лекция 5-2

Рекуррентная сеть Хопфилда

Рекуррентная сеть Хопфилда представляется в виде системы с обратной связью выхода сети с ее входом. Выходные сигналы нейронов являются одновременно входными сигналами сети. В классической сети Хопфилда отсутствует связь выхода нейрона с собственным входом, что соответствует значению веса 0 на главной диагонали матрицы, а матрица весов является симметричной.

Нейронная сеть Хопфилда

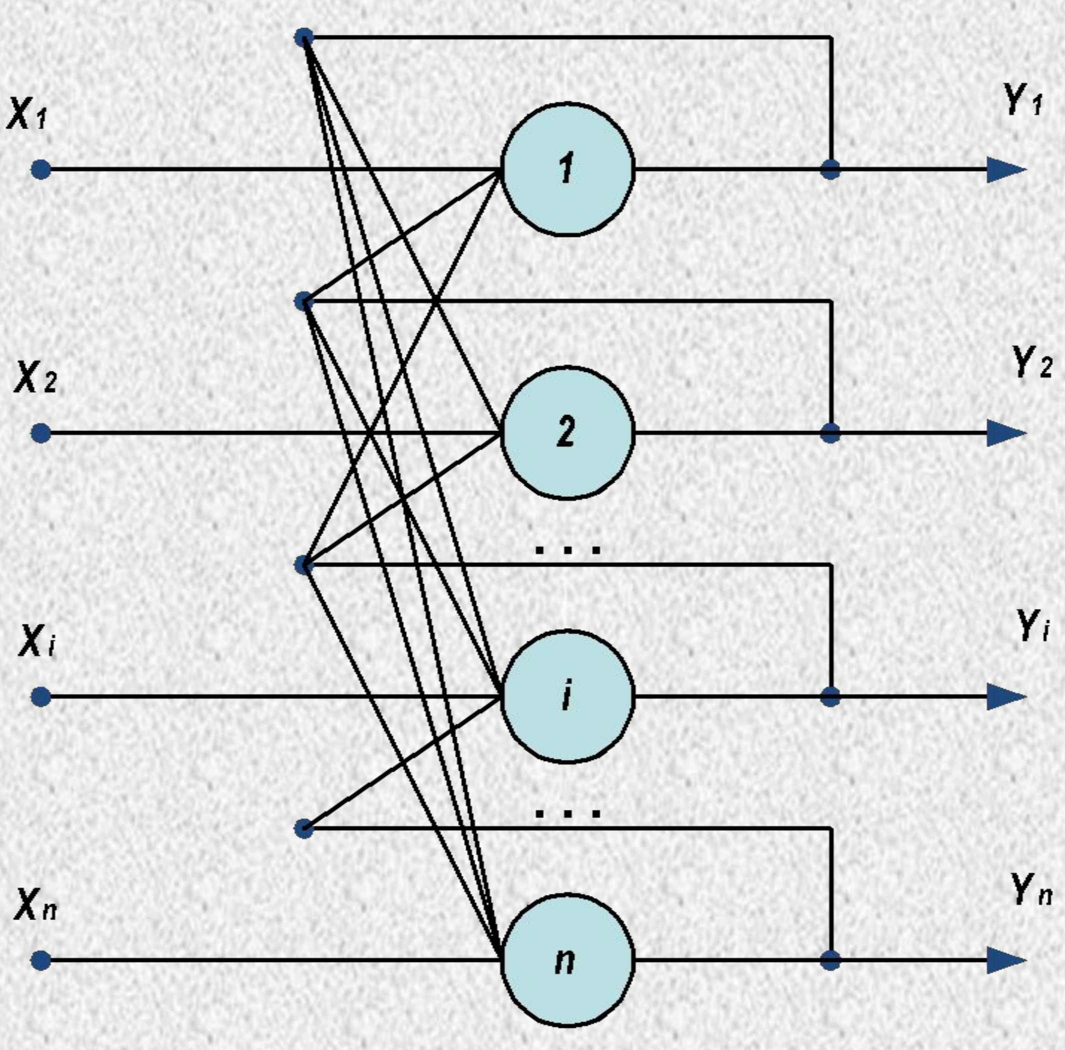

Рис.3.4.Структура нейронной сети Хопфилда

Входной сигнал - вектор $X=\{x_i: i=1,...,n\}$, n – число нейронов в сети и размерность входных и выходных векторов.

Каждый элемент x_i равен +1, или -1.
Вектор *k*-го примера - X^k, а его компоненты - x_i^k, $k=1,...,m$, m – число примеров.

Если образ распознан, выход сети равен $Y=X\mathbf{k}$,
где Y – вектор выходных значений сети: $Y=\{y_i, i=1,...,n\}$.

Инициализация сети

ВЕСА СЕТИ

$$w_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} x_i^k x_j^k, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

где i и j – индексы соответственно предсинаптического и постсинаптического нейронов;
x_i^k, x_j^k – i-ий та j-ый элементы вектора k-го примера.

Рекуррентные сети устойчивы, если весовая матрица W = (w_{ij}) симметрична, а на ее главной диагонали – нули:

1) $w_{ij} = w_{ji}$ *для всех i ¹ j ; (2.58)*
2) $w_{ii} = 0$ *для всех i .*

В качестве входных данных сети Хопфилда можно использовать двоичные значения. Здесь мы будем использовать +1 для обозначения состояния «включено» и (-1) для состояния «выключено».

Расчет суммарного сигнала net_j нейрона Sj вычисляется по формуле:

$$net_j = \sum_{i=1}^{n} S_i * W_{ij}$$

где S_i – обозначает состояние нейрона с номером i.

Когда элемент обновляется, его состояние изменяется в соответствии с правилом:

$$S_j = \begin{cases} +1, & \text{если } net_j > 0 \\ -1, & \text{если } net_j < 0 \end{cases}$$

Эта зависимость называется сигнум - функцией и записывается следующим образом:

$$S_j = \operatorname{sgn}(net_j)$$

Если комбинированный ввод равен 0, то элемент остается в состоянии, в котором он был до обновления.

Сеть Хопфилда ведет себя как память и процедура сохранения отдельного вектора (образца) представляет собой вычисление прямого произведения вектора с ним самим. В результате этой процедуры создается матрица, задающая весовые значения сети Хопфилда, в которой все диагональные элементы должны быть установлены равными 0 (поскольку диагональные элементы задают автосвязи элементов, а элементы сами с собой не связаны).

Таким образом, весовая матрица, соответствующая сохранению вектора X, задается следующей формулой:

$$W = X^T * X$$

Рассмотрим практический пример использования сети Хопфилда для запоминания и ассоциации образцов

Исходный образец: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Весовые значения после обнуления главной диагонали будут равны:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Первый элемент обновляется путем умножения образца на первый столбец матрицы весов

$$[1 \ -1 \quad 1 \quad 1] * \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\mathrm{sgn}(3) = 1$$

Отметим, что первый элемент вектора [1 -1 1 1] остался в том же состоянии (1)

АНАЛОГИЧНО РАССЧИТЫВАЮТСЯ СОСТОЯНИЯ ОСТАВШИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ: -1 1 1

Проверим устойчивое состояние сети Хопфилда для найденных весов W, но для искаженного образца:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Элементы должны обновляться в случайном порядке. Для иллюстрации будем обновлять элементы в порядке 3, 4, 2, 1. Сначала рассмотрим элемент 3-ий:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad \operatorname{sgn}(1) = 1$$

Элемент 3-ий не поменял своего значения (1).

Рассмотрим состояние для элемента 4-го:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \operatorname{sgn}(1) = 1$$

Элемент 4-ый остается в том же состоянии (1).

Теперь рассмотрим элемент 1-ый:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \qquad \operatorname{sgn}(3) = 1$$

Следует отметить, что 1-ый элемент изменил свое состояние с -1 на 1.

Рассмотрим состояние для элемента 2-го:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$\operatorname{sgn}(-3) = -1$$

Элемент 2-ой остается в том же состоянии (-1).

Следует отметить, что мы выявили исходный вектор (1 -1 1 1), характеризующий устойчивое состояние сети

Определим весовую матрицу сети Хопфилда для двух образцов:

$$[-1 \ \ 1 \ -1]$$
$$[\ 1 \ -1 \ \ 1]$$

При запоминании двух и более образцов используем процедуру сложения полученных матриц. В результирующей матрице обязательно обнуляем главную диагональ

$$W = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{matrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{matrix}$$

Существует зависимость между количеством элементов сети N и количеством образцов, которые она может запомнить P:

$$W = \begin{matrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{matrix}$$

Таким образом, для запоминания 100 образцов необходимо иметь сеть, количество входов которой больше 1500