

## **Лекция 5-2**

# **Рекуррентная сеть Хопфилда**

Рекуррентная сеть Хопфилда представляется в виде системы с обратной связью выхода сети с ее входом. Выходные сигналы нейронов являются одновременно входными сигналами сети. В классической сети Хопфилда отсутствует связь выхода нейрона с собственным входом, что соответствует значению веса 0 на главной диагонали матрицы, а матрица весов является симметричной.

# Нейронная сеть Хопфилда

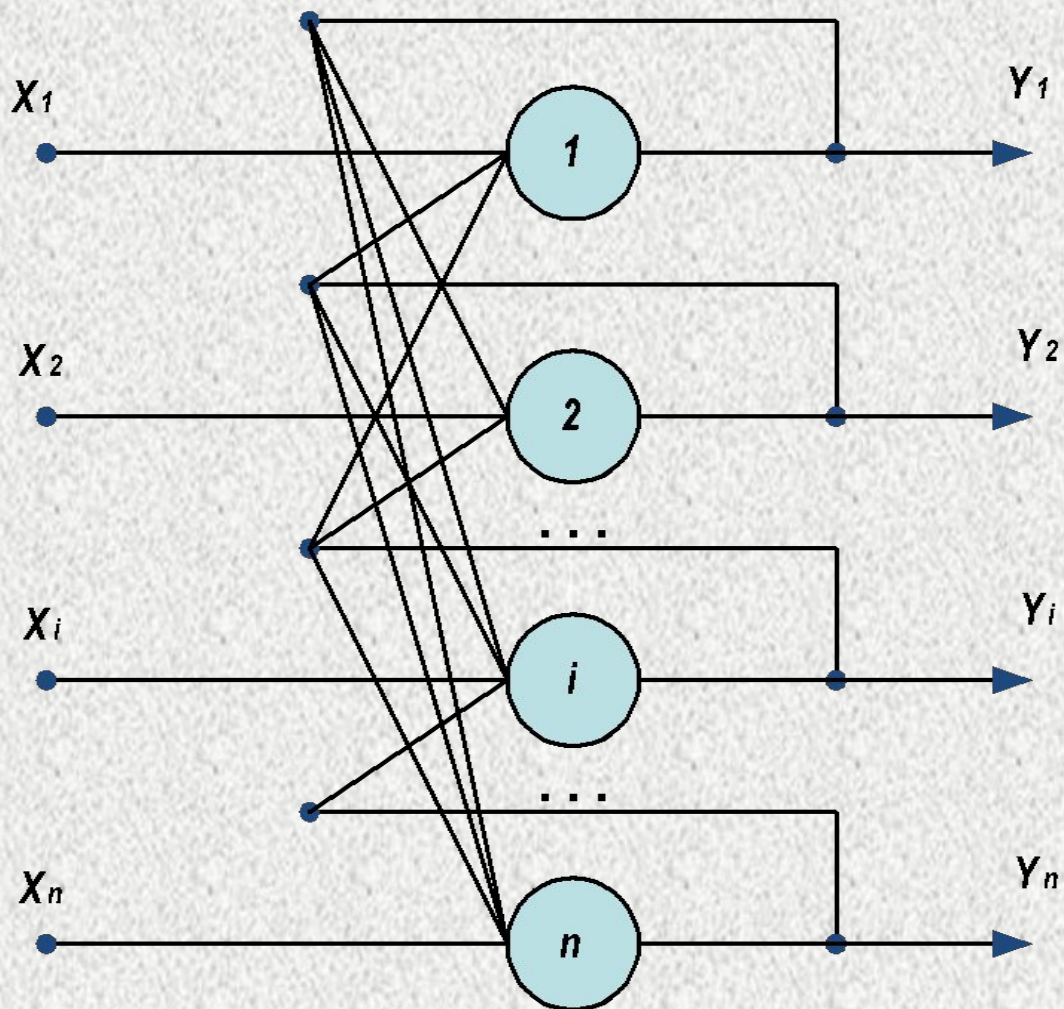


Рис.3.4. Структура нейронной сети Хопфилда

**Входной сигнал** - вектор  $X = \{x_i; i=1, \dots, n\}$ ,  $n$  – число нейронов в сети и размерность входных и выходных векторов.

**Каждый элемент  $x_i$**  равен +1, или -1.

**Вектор  $k$ -го примера** -  $X^k$ , а его компоненты -  $x_i^k$ ,  $k=1, \dots, m$ ,  $m$  – число примеров.

**Если образ распознан**, выход сети равен  $Y = Xk$ , где  $Y$  – вектор выходных значений сети:  $Y = \{y_i; i=1, \dots, n\}$ .

### Инициализация сети

#### ВЕСА СЕТИ

$$w_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^m x_i^k x_j^k, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

где  $i$  и  $j$  – индексы соответственно предсинаптического и постсинаптического нейронов;

$x_i^k, x_j^k$  –  $i$ -ий та  $j$ -ый элементы вектора  $k$ -го примера.

**Рекуррентные сети устойчивы, если весовая матрица  $W = (w_{ij})$  симметрична, а на ее главной диагонали – нули:**

- 1)  $w_{ij} = w_{ji}$  для всех  $i \neq j$ ; (2.58)
- 2)  $w_{ii} = 0$  для всех  $i$ .

**В качестве входных данных сети Хопфилда можно использовать двоичные значения. Здесь мы будем использовать +1 для обозначения состояния «включено» и (-1) для состояния «выключено».**

**Расчет суммарного сигнала  $net_j$  нейрона  $S_j$  вычисляется по формуле:**

$$net_j = \sum_{i=1}^n S_i * W_{ij}$$

**где  $S_i$  – обозначает состояние нейрона с номером  $i$ .**

Когда элемент обновляется, его состояние изменяется в соответствии с правилом:

$$S_j = \begin{cases} +1, & \text{если } net_j > 0 \\ -1, & \text{если } net_j < 0 \end{cases}$$

Эта зависимость называется сигнум - функцией и записывается следующим образом:

$$S_j = \text{sgn}(net_j)$$

Если комбинированный ввод равен 0, то элемент остается в состоянии, в котором он был до обновления.

Сеть Хопфилда ведет себя как память и процедура сохранения отдельного вектора (образца) представляет собой вычисление прямого произведения вектора с ним самим. В результате этой процедуры создается матрица, задающая весовые значения сети Хопфилда, в которой все диагональные элементы должны быть установлены равными 0 (поскольку диагональные элементы задают автосвязи элементов, а элементы сами с собой не связаны).

Таким образом, весовая матрица, соответствующая сохранению вектора  $X$ , задается следующей формулой:

$$W = X^T * X$$

Рассмотрим практический пример использования сети Хопфилда для запоминания и ассоциации образов

Исходный образец:  $[1 \ -1 \ 1 \ 1]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * [1 \ -1 \ 1 \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Весовые значения после обнуления главной диагонали будут равны:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



**Первый элемент обновляется путем умножения  
образца на первый столбец матрицы весов**

$$[1 \ -1 \ 1 \ 1] * \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\text{sgn}(3) = 1$$

**Отметим, что первый элемент вектора [1 -1 1 1] остался в том же состоянии (1)**

**АНАЛОГИЧНО РАССЧИТЫВАЮТСЯ СОСТОЯНИЯ ОСТАВШИХСЯ  
ЭЛЕМЕНТОВ: -1 1 1**

Проверим устойчивое состояние сети Хопфилда для найденных весов  $W$ , но для искаженного образца:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Элементы должны обновляться в случайном порядке. Для иллюстрации будем обновлять элементы в порядке 3, 4, 2, 1. Сначала рассмотрим элемент 3-ий:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{sgn}(1) = 1$$

Элемент 3-ий не поменял своего значения (1).

**Рассмотрим состояние для элемента 4-го:**

$$[-1 \ -1 \ 1 \ 1]^* \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{sgn}(1) = 1$$

**Элемент 4-ый остается в том же состоянии (1).**

**Теперь рассмотрим элемент 1-ый:**

$$[-1 \ -1 \ 1 \ 1]^* \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \text{sgn}(3) = 1$$

**Следует отметить, что 1-ый элемент изменил свое состояние с -1 на 1.**

**Рассмотрим состояние для элемента 2-го:**

$$[1 \ -1 \ 1 \ 1] * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$\text{sgn}(-3) = -1$$

**Элемент 2-ой остается в том же состоянии (-1).**

**Следует отметить, что мы выявили исходный вектор (1 -1 1 1), характеризующий устойчивое состояние сети**

Определим весовую матрицу сети Хопфилда для двух образцов:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

При запоминании двух и более образцов используем процедуру сложения полученных матриц. В результирующей матрице обязательно обнуляем главную диагональ

$$W = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Существует зависимость между количеством элементов сети  $N$  и количеством образцов, которые она может запомнить  $P$ :**

$$W = \begin{matrix} & 0 & -2 & 2 \\ -2 & & 0 & \\ 2 & -2 & & 0 \end{matrix}$$

**Таким образом, для запоминания 100 образцов необходимо иметь сеть, количество входов которой больше 1500**