

# Качество автоматических систем управления

О качестве системы управления имеет смысл говорить, если она устойчива. Поэтому показатели качества определяют при предположении, что *система устойчива*.

Если исследуемая АСУ устойчива, то возникает вопрос о том, насколько качественно происходит регулирование в этой системе и удовлетворяет ли оно технологическим требованиям данного процесса.

**Под качеством системы управления понимается совокупность требований, которые прямо или косвенно характеризуют точность ее работы.**

Задача системы управления заключается либо в поддержании выходной координаты объекта  $y(t)$  на заданном уровне, либо в изменении координаты в соответствии с заданным законом.

Система **поддерживающая** управляемую величину на заданном уровне называется **системой регулирования**

Наиболее полной характеристикой качества системы управления является величина динамической ошибки, равная разности между текущим  $y(t)$  и заданным  $x(t)$  значениями управляемой величины:

$$e(t) = y(t) - x(t) \rightarrow 0.$$

Если ошибка управления при любых изменениях  $y(t)$  равна 0, то система называется **инвариантной по заданию**. Если ошибка равна нулю при любых изменениях возмущения  $f(t)$  – то система **инвариантна по возмущению**. Система **инвариантная по заданию и возмущению называется инвариантной в целом**.

Функцию ошибки  $e(t)$  для любого момента времени трудно определить, поскольку она зависит от большого количества параметров системы.

Идеальной системой была бы инвариантная система, но обеспечение инвариантности не всегда возможно, поэтому при анализе и синтезе систем используют различные показатели качества управления, позволяющие сопоставлять различные системы, осуществлять разработку систем, удовлетворяющих требованиям потребителей.

Существует два основных подхода к оценке качества:

- 1) использует информацию о *временных параметрах системы*;
- 2) использует информацию о *частотных свойствах системы*.

# Показатели качества в переходном режиме

Все показатели качества делятся на показатели качества *в переходном режиме* и показатели качества в *установившемся режиме*.

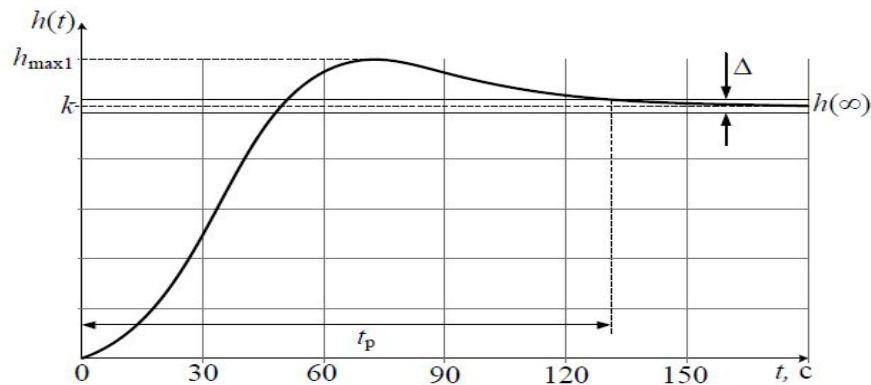
Показатели качества в переходном режиме делятся на *прямые* и *косвенные* показатели.

Косвенные делятся:

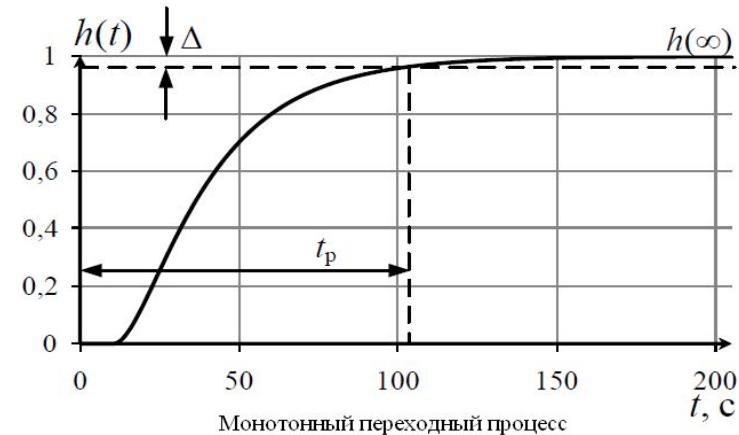
- *на корневые;*
- *частотные;*
- *интегральные.*

При оценке качества в переходном режиме обращают внимание на форму переходного процесса. Различают следующие типовые переходные процессы:

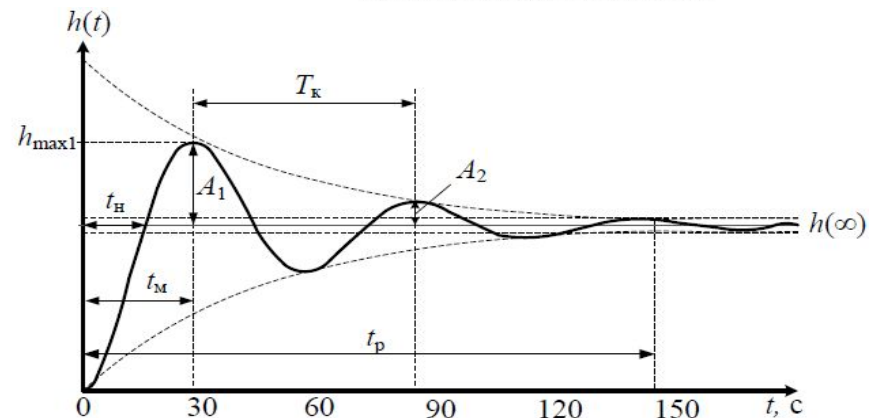
- монотонный переходный процесс, когда  $dh/dt$  не меняет знак;
- апериодический переходный процесс, когда  $dh/dt$  меняет знак один раз;
- колебательный переходный процесс, когда  $dh/dt$  меняет знак много раз.



Апериодический переходный процесс



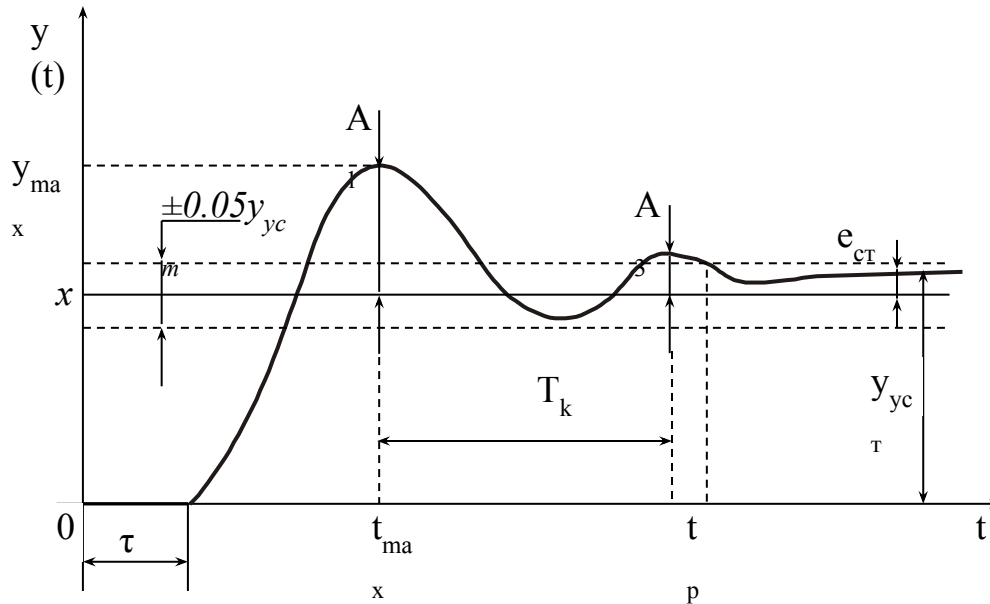
Монотонный переходный процесс



Колебательный переходный процесс

## Прямые показатели качества

Прямые оценки качества СУ определяются непосредственно по переходным процессам, вызванными изменением задания или возмущения. Переходный процесс устойчивой системы всегда затухает и в зависимости от характера затухания подразделяется на монотонный (апериодический) и колебательный



Колебательный переходный процесс

**Основные прямые показатели качества переходного процесса:**

1. *Время переходного процесса  $t_p$ .*
2. *Перерегулирование  $\sigma$ .*
3. *Степень затухания колебаний  $\psi$ .*
4. *Время достижения первого максимума  $t_{\max}$ .*
5. *Статическая ошибка  $e_c$ .*
6. *Запаздывание  $\tau$ .*
7. *Динамический коэффициент регулирования  $R_d$ .*
8. *Период колебаний  $T_k$ .*

**1. Время переходного процесса  $t_p$**  (время регулирования) - минимальное время, по истечении которого отклонение выходной величины  $y(t)$  от установившегося значения  $y_{уст}$  не превышает некоторой заданной величины  $\pm q$ .

Математически это определение можно записать следующим образом:

$$t_p = \min_{T_p} \{ T_p : |y(t) - y_{уст}| \leq q, t \geq T_p \}$$

Значение  $q$  можно выбирать из диапазона  $q = (0,01 \div 0,1)y_{уст}$ , хотя обычно принимают  $q = \pm 5 \% y_{уст}$  или  $(0,05 y_{уст})$ .

Этот показатель характеризует скорость протекания переходного процесса. Если кривая переходного процесса монотонна, то этот показатель является единственным.

**2. Перерегуливание  $\sigma$**  - разность между максимальным значением  $y_{max}$  переходной характеристики и её установившимся значением  $y_{уст}$ . Обычно перерегуливание выражают как отношение максимального отклонения управляемой величины  $A_1$  от установившегося значения  $y_{уст}$  к этому установившемуся значению, выраженное в процентах:

$$\sigma =$$

В большинстве случаев требуется, чтобы перерегуливание не превышало 10 – 30 %. У апериодического переходного процесса можно обеспечить нулевое перерегуливание. Увеличение быстродействия обычно приводит к увеличению перерегуливания.

**3. Степень затухания колебаний  $\psi$**  определяется по формуле:

где  $A_1$  и  $A_3$  - 1-я и 3-я амплитуды переходной кривой. Чем  $\psi$  ближе к 1 тем система лучше гасит колебания, но обычно довольствуются  $\psi > 0,7 \div 0,8$ . При  $\psi = 1$  в системе нет колебаний, переходной процесс апериодический.

**4. Статическая ошибка  $e$  (установившаяся ошибка)** - это отклонения установившегося значения выходной величины  $y(t) = y_{уст}$  от заданной  $x$ . Статическая ошибка должна стремиться к нулю. Чем она меньше тем система точнее.

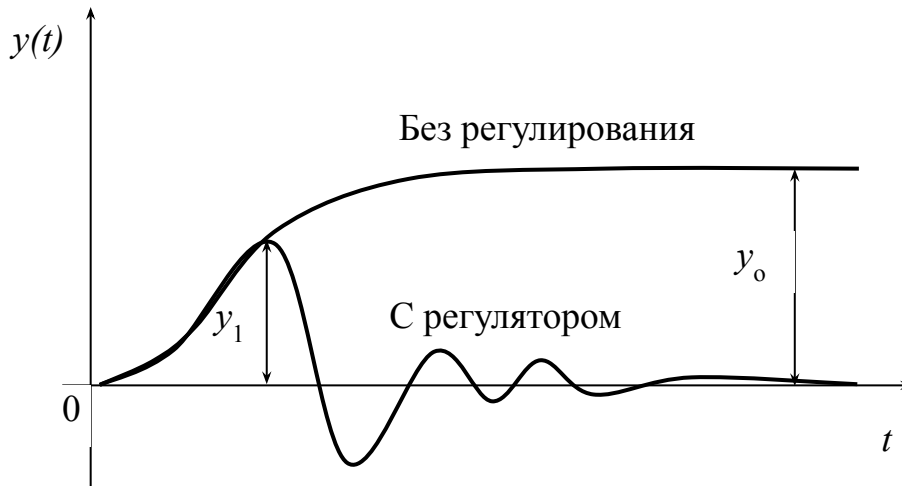
5. **Время достижения первого максимума**  $t_{\max}$  определяется по графику.

6. **Запаздывание**  $\tau$  - время от момента нанесения воздействия на систему до начала изменения выходной величины.

7. **Динамический коэффициент регулирования**  $R_d$  %, который определяется из формулы:

$$R_d = (y_1/y_0) \cdot 100.$$

Величина  $R_d$  характеризует степень воздействия регулятора на процесс, т. е. степень понижения динамического отклонения в системе с регулятором и без него (см. рис.)



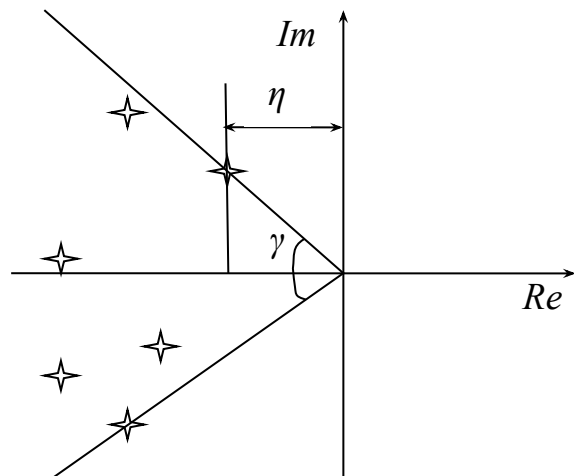
Переходные процессы по возмущению в системе с регулятором и без регулятора

Динамический коэффициент выражается в процентах и чем он меньше, тем выше качество регулирования.

8. **Период колебаний**  $T_k$  (для колебательных процессов) - расстояние между соседними максимумами или минимумами.

## Корневые показатели качества.

Многие свойства системы можно определить при проектировании по расположению корней характеристического полинома на комплексной плоскости. Прежде всего, все корни  $s_i$  для устойчивой системы должны находиться в левой полуплоскости, то есть слева от мнимой оси. На рисунке знаком  $\star$  отмечены положения корней характеристического уравнения.



Корневые показатели качества

Чем дальше от мнимой оси расположены корни характеристического уравнения, тем дальше от границы устойчивости находится система и тем выше ее быстродействие.

Для оценки быстродействия системы используют корневой показатель - **степень устойчивости  $\eta$** , а для оценки скорости затухания колебаний в системе – **колебательность или степень колебательности  $\mu$** .

1. **Степень устойчивости  $\eta$**  - это расстояние от мнимой оси до ближайшего корня  $\eta = \min |\operatorname{Re}(s_i)|$ , где  $\operatorname{Re}(s_i) = \alpha_i$  - действительная часть корня  $s_i$ .

Степень устойчивости позволяет оценить время регулирования с помощью следующей зависимости:  $t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{q}$ .

2. **Колебательность  $\mu$** . Колебательность рассчитывается через угол  $\gamma$ :  $\mu = \operatorname{tg}(\gamma/2)$ . Для определения  $\gamma$  проводятся два луча, которые ограничивают все корни на комплексной плоскости, а  $\gamma$  - угол между этими лучами. Колебательность может быть определена также по формуле:

$$\mu = \max \left| \frac{\operatorname{Im}(s_i)}{\operatorname{Re}(s_i)} \right| = \max \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$$

Если  $\mu = 0$ , то переходный процесс будет апериодическим.

При проектировании систем управления обычно требуется обеспечить быстродействие не ниже заданного (степень устойчивости не меньше заданной  $\min \eta$ ) и колебательность не выше заданной  $\max \mu$ .

Поведение реального объекта управления всегда несколько отличается от рассматриваемой модели, более того, его динамика может меняться во времени. Поэтому недостаточно спроектировать просто устойчивую систему, нужно чтобы система сохранила устойчивость при некоторых изменениях параметров объекта и регулятора в сравнении с расчетными, то есть обладала запасами устойчивости.

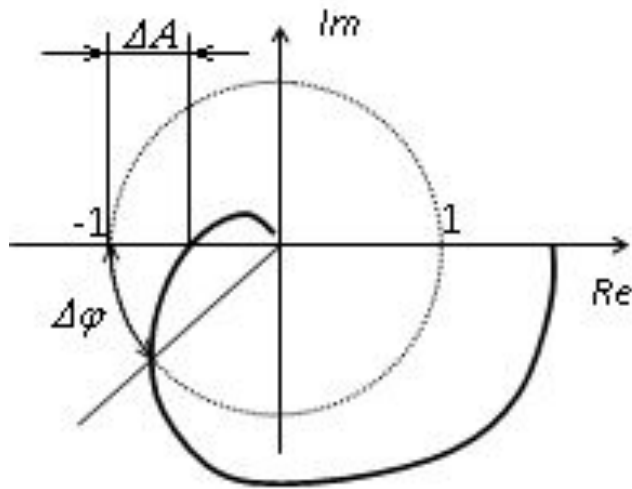
Обычно рассматривают **запасы устойчивости по амплитуде  $\Delta A$**  и **по фазе  $\Delta \phi$** .

**Запас устойчивости по амплитуде  $\Delta A$**  – это дополнительное усиление контура.

**Запас устойчивости по фазе  $\Delta \phi$**  – это дополнительный сдвиг фазы, который необходим, чтобы вывести систему на границу области устойчивости.

Запас устойчивости по фазе  $\Delta \phi$  определяется на частоте среза  $\omega_c$ , где  $A(\omega_c) = 1$ . Запас по фазе должен быть не менее  $30^\circ$ .

Запасы устойчивости  $\Delta A$  и  $\Delta \phi$  можно определить графически, для этого строят АФЧХ разомкнутой системы (см. рисунок).



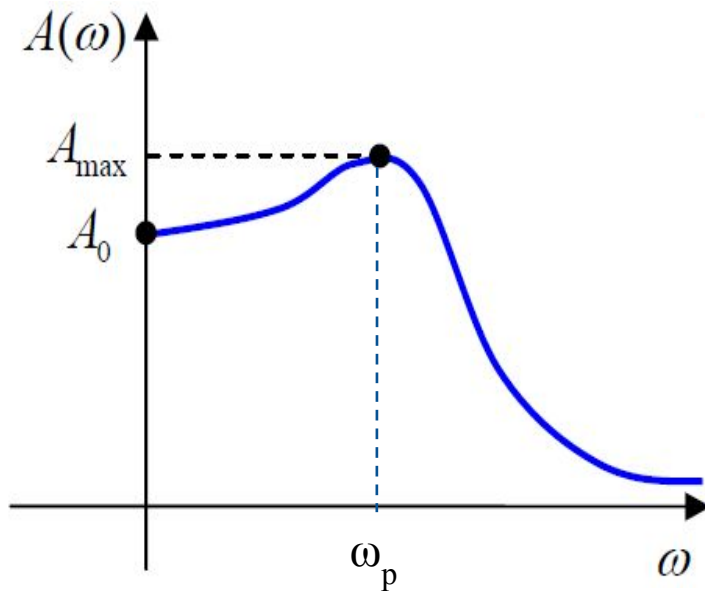
АФЧХ разомкнутой системы

Запас устойчивости по амплитуде  $\Delta A$  определяется по точке пересечения АФЧХ с отрицательной действительной полуосью. Для определения  $\Delta \phi$  строится окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Запас  $\Delta \phi$  определяется по точке пересечения с этой окружностью.

Запас по амплитуде также вычисляется по формуле:  $A_g$ , где  $A_g < 1$  – значение амплитудной характеристики на частоте  $\omega_g$ , где фазовая характеристика равна  $-180^\circ$ . В практических задачах нужно обеспечивать запас по амплитуде не менее 6 дБ.

Еще одной частотной характеристикой оценки качества системы является **показатель колебательности  $M$** . Он определяется по АЧХ замкнутой системы как отношение ее максимума  $A_{\max}$  к значению АЧХ на нулевой частоте  $A_0$ :

$$M = \frac{A_{\max}}{A_0}$$



АЧХ замкнутой системы

Частота ( $\omega_p$ ) на которой АЧХ принимает максимальное значение  $A_{\max}$ , называется **резонансной**.

Полоса частот от нулевой до частоты, на которой убывающая АЧХ достигает значения  $0,707A(0)$ , называется **полосой пропускания звена или системы**.

Время регулирования может быть оценено по частоте среза ЛАЧХ, т. е. по частоте ( $\omega_{cp}$ ) на которой убывающая ЛАЧХ пересекает ось абсцисс, а АЧХ становится меньше единицы

$$t_p \approx (1 \dots 2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}$$

Показатели качества связаны между собой определенными соотношениями:

$$t_p = \frac{3}{\eta}; \quad \Psi = 1 - M^{-\frac{\pi}{m}}; \quad M = \frac{m^2 + 1}{2m}.$$



Для обобщенной оценки быстроты затухания и величины отклонения регулируемой величины от заданной в виде единого числового значения используют **интегральные оценки качества**.

## 1. Линейная интегральная оценка:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt$$

Это простейшая интегральная оценка, которая определяет площадь между заданным значением выходной величины  $x(t)$  и её текущим значением  $y(t)$  ( $e(t) = x(t) - y(t)$ ).

Чем оценка  $I_1$  будет меньше, тем быстрее затухает переходный процесс и меньше величина ошибки. Однако интегральная оценка  $I_1$  годится только для аperiodических (монотонных) переходных процессов (рис.1 13, а). Если же имеют место колебания (рис.113, б), то алгебраическое сложение площадей может привести к ситуации, когда при больших колебаниях интеграл будет маленьким или равным нулю.

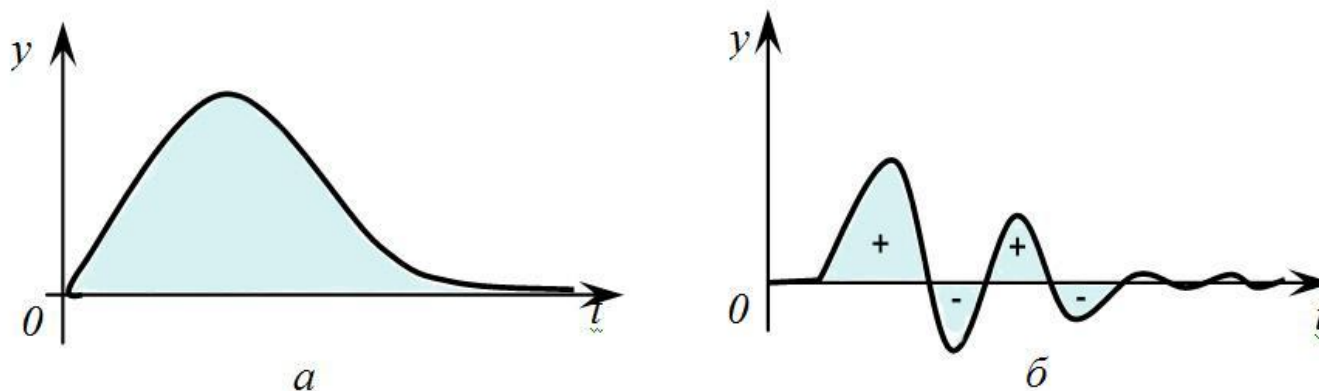


Рис. 113. Переходные процессы: а – аperiodический; б - колебательный

В целях устранения этого недостатка на практике чаще всего применяют квадратичную интегральную оценку.

## 2. Квадратичная интегральная оценка:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

Этот показатель не зависит от знака  $e(t)$  и, следовательно, может быть применен как для монотонных, так и для колебательных процессов. Вторая степень убирает знак, кроме того, большая ошибка в квадрате будет ещё больше, а маленькая ещё меньше.

Переходные процессы с разными показателями колебательности и различной длительностью переходных процессов могут дать равные значения критерия. Чтобы учесть скорость изменения переходного процесса применяют комплексную квадратичную интегральную оценку  $I_3$ , учитывающую не только величину ошибки, но и скорость ее изменения.

## 3. Комплексная квадратичная интегральная оценка:

$$I_3 = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \beta^2 \cdot \dot{e}^2(t)] dt$$

где  $-\beta$  весовой коэффициент, который определяет значимость второго слагаемого подынтегральной функции.

Использование интегральной квадратичной оценки  $I_2$  в качестве минимизируемого критерия качества синтеза системы регулирования может привести к большим перерегулированиям переходного процесса (до 20 % от установившегося значения  $y(\infty)$ ). При минимизации комплексной квадратичной интегральной оценки  $I_3$  ограничиваются как величина ошибки  $e(t)$ , так и её скорость. В результате чего получают достаточно быстрые и плавные переходные процессы.

**Невозможно одновременно обеспечить наилучшие показатели качества по всем интегральным критериям.** Например, увеличение запаса устойчивости системы, приводит к увеличению динамической ошибки, уменьшения показателя колебательности приводит к увеличению времени переходного процесса. Поэтому при синтезе систем регулирования используют несколько показателей качества. Для одного из них, называемого **критерием оптимальности**, добиваются экстремального (минимального или максимального значения), а для других вводят ограничения в виде неравенств.

Характеристикой качества системы в *установившемся режиме* является *установившаяся ошибка*.

Когда внешние воздействия являются функциями времени, установившаяся ошибка как вынужденная составляющая ошибки также является функцией времени. Установившаяся ошибка  $e_B(t)$  определяется следующим образом :

$$e_B(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

Если на систему действуют два внешних воздействия - задающие воздействия  $x(t) = g(t)$  и возмущения  $f(t)$ , то установившуюся ошибку можно представить в виде суммы :

$$e_e(t) = e_{eg}(t) + e_{ef}(t),$$

где  $e_{eg}(t)$  и  $e_{ef}(t)$  - установившиеся ошибки от задающего воздействия  $g(t)$  и возмущения  $f(t)$  соответственно.

Числовыми показателями качества в установившемся режиме являются коэффициенты ошибок, которые определяются следующим образом.

**Установившуюся ошибку** от задающего воздействия -  $e_{eg}(t)$  можно представить в виде ряда:

$$e_{eg}(t) = C_{g0} \cdot g(t) + C_{g1} \cdot \frac{dg(t)}{t} + C_{g2} \cdot \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots$$

$$C_{g0} = W_{eg}(0), C_{gi} = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}, i = 1, 2, \dots$$

Здесь  $W_{eg}(s)$  - передаточная функция относительно входа  $g(t)$  и выхода  $e(t)$ . Коэффициенты  $C_{gi}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) называются **коэффициентами ошибки по задающему воздействию**.

Аналогично можно представить установившуюся ошибку от возмущения -  $e_{ef}(t)$ :

$$e_{ef}(t) = C_{f0} \cdot f(t) + C_{f1} \cdot \frac{df(t)}{t} + C_{f2} \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \dots$$

$$C_{f0} = W_{ef}(0), C_{fi} = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^i W_{ef}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}, i = 1, 2, \dots$$

Здесь  $W_{ef}(s)$  - передаточная функция относительно входа  $f(t)$  и  $e(t)$ . Предполагается, что возмущение не приложено в одной точке с задающим устройством. Коэффициенты  $C_{fi}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) называются **коэффициентами ошибки по возмущению**.

Первые три коэффициента ошибок имеют специальные названия:  $C_{g0}$  и  $C_{f0}$  - *коэффициенты позиционной ошибки*;  $C_{g1}$  и  $C_{f1}$  - *коэффициенты скоростной ошибки*;  $C_{g2}$  и  $C_{f2}$  - *коэффициенты ошибки по ускорению*.

Установившаяся ошибка при постоянном внешнем воздействии называется **статической ошибкой**. Система называется **статической**, если статическая ошибка отлична от нуля, и **астатической**, если статическая ошибка равна нулю.

Можно также говорить о статической и астатической системах относительно того или иного внешнего воздействия.

Система называется **статической относительно задающего воздействия (возмущения)**, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) отлична от нуля, и **астатической относительно задающего воздействия (возмущения)**, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) равна нулю.

Формулы ошибок  $e_{eg}(t)$  и  $e_{ef}(t)$  при постоянных  $g(t) = \text{const}$ ,  $f(t) = \text{const}$  принимают вид:

$$e_{eg}(t) = C_{g0} \cdot g, C_{g0} = W_{eg}(0),$$

$$e_{ef}(t) = C_{f0} \cdot f, C_{f0} = W_{ef}(0).$$

Отсюда следует, что система будет статической относительно воздействия  $g$  (возмущения  $f$ ), если  $C_{g0} \neq 0$  ( $C_{f0} \neq 0$ ), и астатической относительно задающего воздействия  $g$  (возмущения  $f$ ), если  $C_{g0} = 0$  ( $C_{f0} = 0$ ).

Астатическая система относительно задающего воздействия обладает астатизмом  $n$ -го порядка, если

$$C_{g0} = C_{g1} = \dots = C_{gn-1} = 0, \quad C_{gn} \neq 0.$$

Аналогично определяется астатическая система с астатизмом  $n$ -го порядка относительно возмущения. Если система обладает астатизмом  $n$ -го порядка, то коэффициенты ошибок  $C_{gi}$  ( $C_{fi}$ ) при  $i = 1, 2, \dots, n$  можно определить следующим образом:

$$C_{gi} = \frac{W_{eg}(s)}{s^i} \Big|_{s=0}, \quad \left( C_{fi} = \frac{W_{ef}(s)}{s^i} \Big|_{s=0} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

# Вопросы для самоконтроля

1. Какие существуют прямые показатели качества АСР?
2. Какие существуют корневые показатели качества АСР?
3. Какие существуют частотные показатели качества АСР?
4. Какие существуют интегральные показатели качества АСР?
5. Какие существуют показатели качества в установившемся режиме?