




Предел последовательности



Предел числовой последовательности

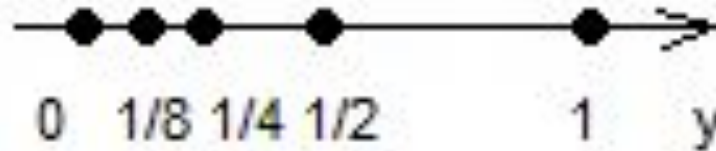
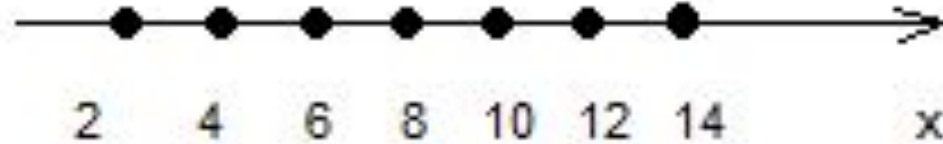
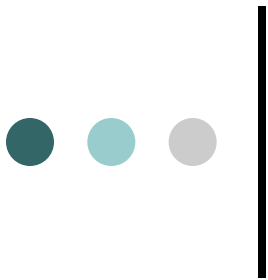
Рассмотрим две числовые последовательности:

$$(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots;$$

$$(y_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.

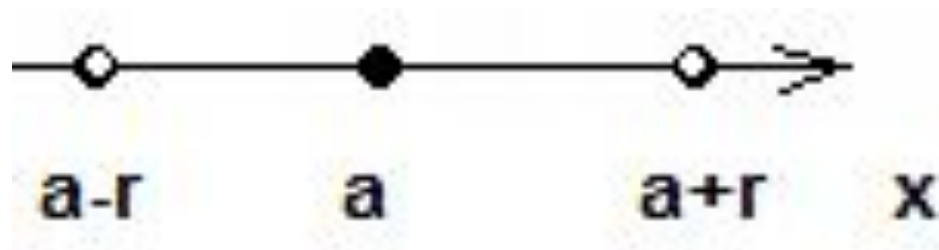


Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее...

Определение 1. Пусть a - точка прямой, а r - положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют **окрестностью точки a** , а число r - **радиусом окрестности**.

Геометрически это выглядит так:





Например

$(-0.1, 0.5)$ – окрестность точки 0.2 , радиус окрестности равен 0.3 .

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики называли «*пределом последовательности*».

● ● ●

Определение 2. Число b называют **пределом** последовательности y_n если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут: $y_n \rightarrow b$.

Читают: y_n стремится к b .

Либо пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b .



Комментарий

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Возьмем окрестность точки b радиуса,

r , то есть $(b-r, b+r)$. Тогда существует такой номер n_1 ,

начиная с которого все последующие члены

последовательности содержатся внутри указанной

окрестности, например, y_{n+1} , y_{n+8} и т. д., а вне этой

окрестности содержится конечное числа членов

последовательности y_1 , y_{n-1} , y_{n-5} и т. д.

При этом, если выбрать другую окрестность (другого радиуса), то для нее также найдется какой – то номер, начиная с которого все последующие члены последовательности будут попадать в указанный интервал.

Пример.

Существует ли номер n_0 , начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r = 0.1$, если

1. $x_n = \frac{1}{n^2}$, $a = 0$;

Решение.

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow (\sqrt{10}; +\infty) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

Пример

Существует ли номер n_0 , начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r=0.1$, если $a=0$, $x_n = \frac{1}{n^2}$

Решение

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow (\sqrt{10}; +\infty) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

Ответ: начиная с $n_0=4$ все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность $(-0.1; 0.1)$

Практические задания

1. Запишите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

а) $a = 0, r = 0.1$;

б) $a = -3, r = 0.5$;

2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

а) $(2.1, 2.3)$;

б) $(-7, -5)$?

3. Принадлежит ли точка x_1 окрестности точки a радиуса r , если:

а) $x_1 = 1, a = 2, r = 0.5$; б) $x_1 = -0.2, a = 0, r = 0.3$?



Практические задания

4. Существует ли номер n_0 , начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса r :

$$a) x_n = \frac{1}{2n}, \quad a = 0, \quad r = 0,1; \quad б) x_n = 3 + \frac{1}{n^2}, \quad a = 3, \quad r = 0,2.$$

5. Постройте график последовательности y_n и составьте, если это возможно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

$$a) y_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n; \quad б) y_n = 5 - \frac{2}{n}.$$