Предел последовательности

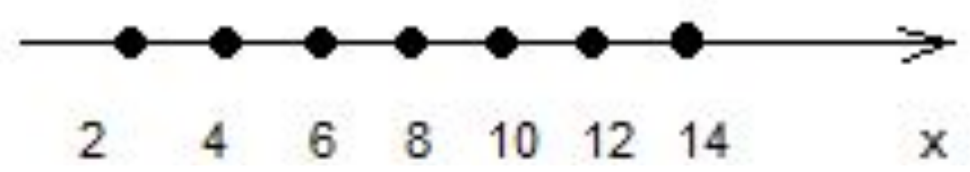
Предел числовой последовательности

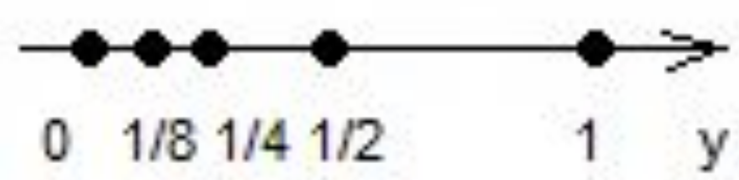
Рассмотрим две числовые последовательности:

(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, …, $2n$,…;

(y_n) : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … $\frac{1}{2^n}$, …

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.
Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.



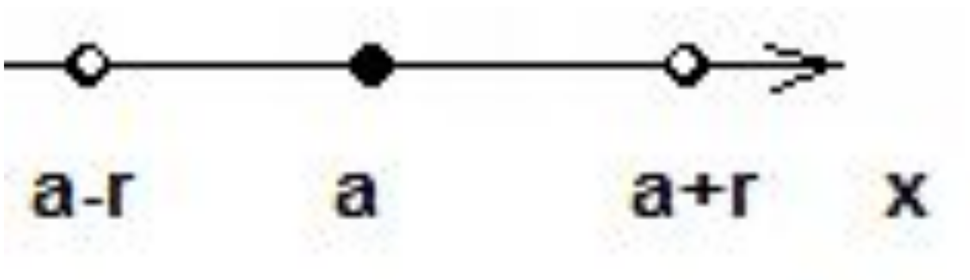


Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее…

Определение 1. *Пусть a - точка прямой, а r - положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют* ***окрестностью точки*** a *, а число r -* ***радиусом окрестности****.*

Геометрически это выглядит так:



Например

(-0.1, 0.5) – окрестность точки 0.2, радиус окрестности равен 0. 3.

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали «*пределом последовательности*».

Определение 2. Число b называют ***пределом последовательности*** y_n, если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут: $y_n \to b$.

Читают: y_n стремится к b.

Либо пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

Комментарий

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Возьмем окрестность точки r радиуса, r, то есть $(b\text{-}r,\ b+r)$. Тогда существует такой номер n_1, начиная с которого все последующие члены последовательности содержатся внутри указанной окрестности, например, $y_{n+1},\ y_{n+8}$ и т. д., а вне этой окрестности содержится конечное числа членов последовательности $y_{1,}\ \ y_{n\text{-}1},\ \ y_{n\text{-}5}$ и т. д.

При этом, если выбрать другую окрестность (другого радиуса), то для нее также найдется какой – то номер, начиная с которого все последующие члены последовательности будут попадать в указанный интервал.

Пример.

Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r = 0.1$, если

1. $x_n = \dfrac{1}{n^2}, \; a = 0;$

Решение.

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < 0.1$$

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1$$

$$n^2 > 10 \Rightarrow \left(\sqrt{10}; +\infty\right) \ni n \Rightarrow n_0 = 4$$

Пример

Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса r=0.1, если a=0, $x_n=\frac{1}{n^2}$

Решение

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<0.1$$

$$\left|\frac{1}{n^2}\right|<0.1$$

$$\frac{1}{n^2}<0.1$$

$$n^2>10 \Rightarrow \left(\sqrt{10};+\infty\right) \ni n \Rightarrow n_0=4$$

Ответ: начиная с n_0=4 все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность (-0.1;0.1)

Практические задания

1. Запишите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

$$а)\ \ a = 0,\ \ r = 0.1; \qquad б)\ \ a = -3,\ \ r = 0.5;$$

2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

$$а)\ \ (2.1,\ \ 2.3); \qquad б)\ \ (-7,\ \ -5)?$$

3. Принадлежит ли точка x_1 окрестности точки a радиуса r, если:

$$а)\ \ x_1 = 1,\ \ a = 2,\ \ r = 0.5;\ \ б)\ \ x_1 = -0.2,\ \ a = 0,\ \ r = 0.3?$$

Практические задания

4. Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса r:

$$а)\ x_n = \frac{1}{2n},\ a = 0,\ r = 0{,}1;\quad б)\ x_n = 3 + \frac{1}{n^2},\ a = 3,\ r = 0{,}2.$$

5. Постройте график последовательности y_n и составьте, если это возможно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

$$а)\ y_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n;\qquad б)\ y_n = 5 - \frac{2}{n}.$$