Задачи на максимум и минимум

11 класс Никольский С.М.

http://aida.ucoz.ru

2

1. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением $I = 2t^2 - 5t$ (I – в амперах, t – в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в момент времени t = 10 сек.

Ответ: v(t) = 4t – 5 (А/с), v(10) = 35 (А/с)

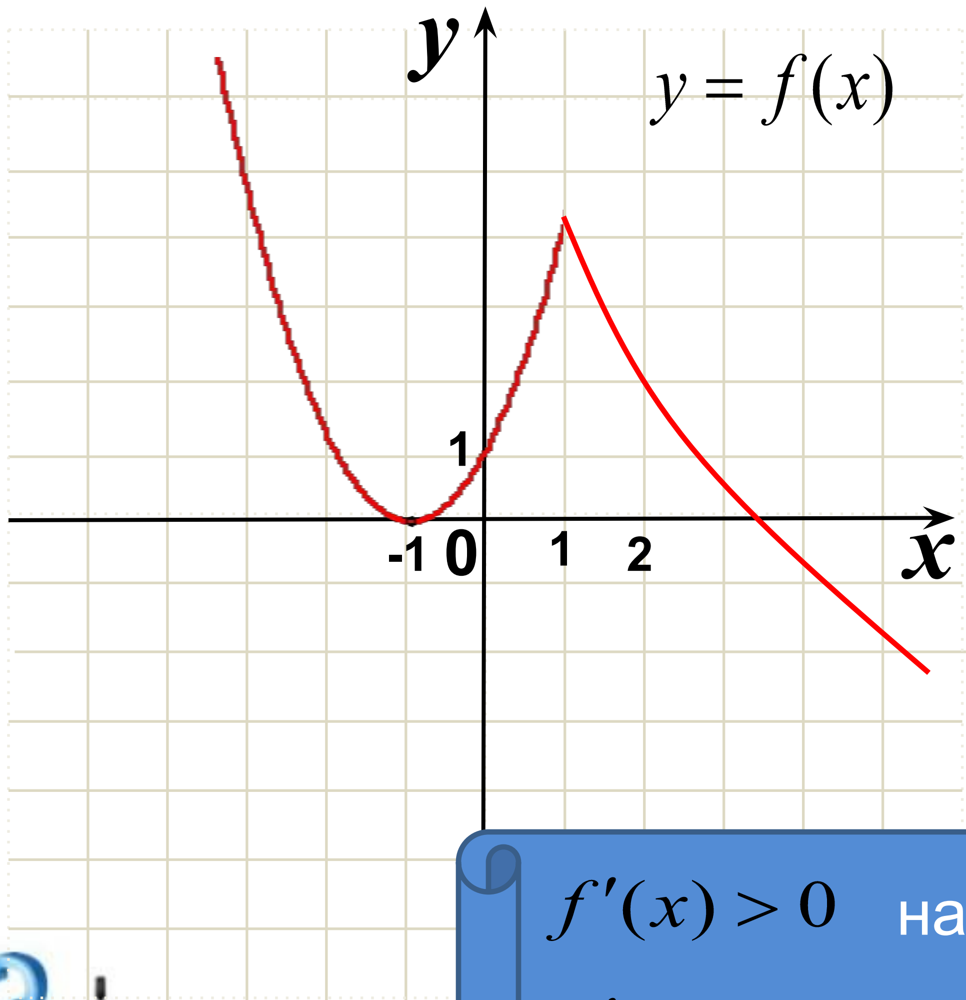
2. Известно, что тело массой m=5 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 + 2$ (S – путь в метрах, t – время в секундах). Найдите кинетическую энергию тела через 2 сек после начала движения.

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

$$v(t) = 2t(м/с)$$

$$v(2) = 4(м/с)$$

$$E = \frac{5 \cdot 16}{2} = 40(Дж)$$

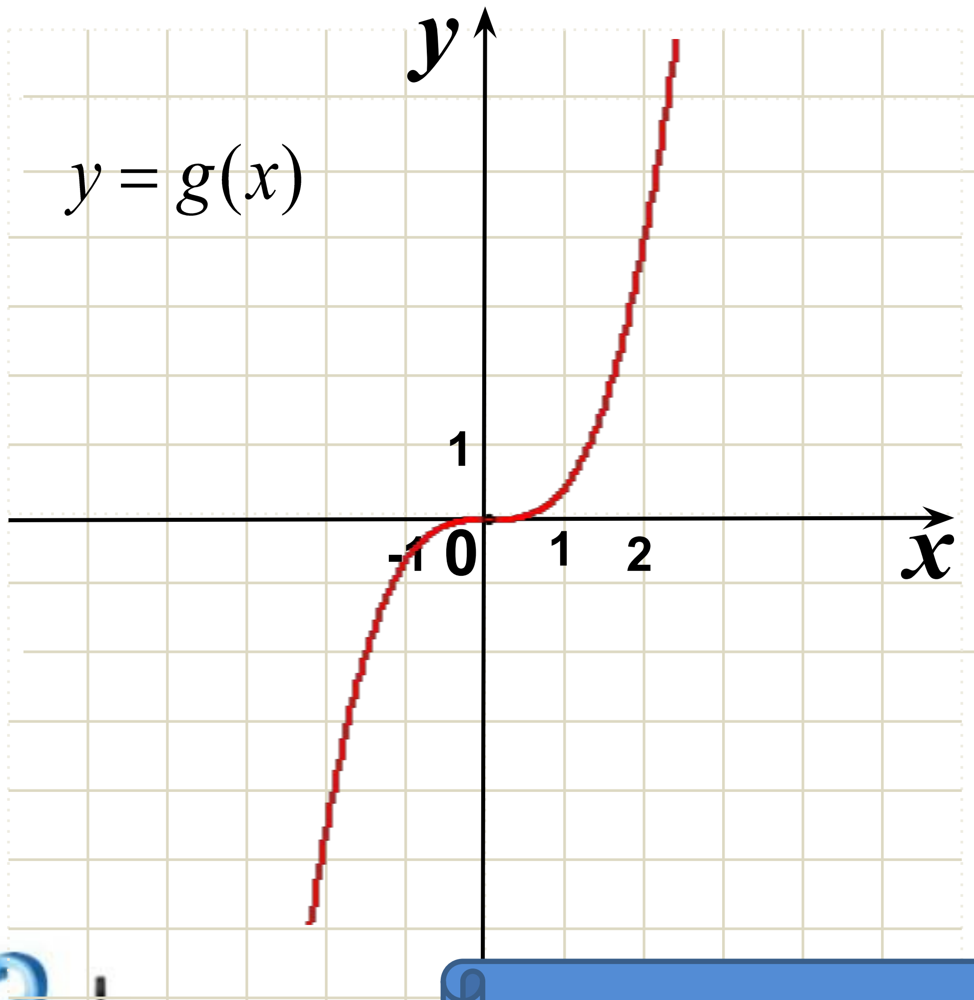


По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на R

Ответ:

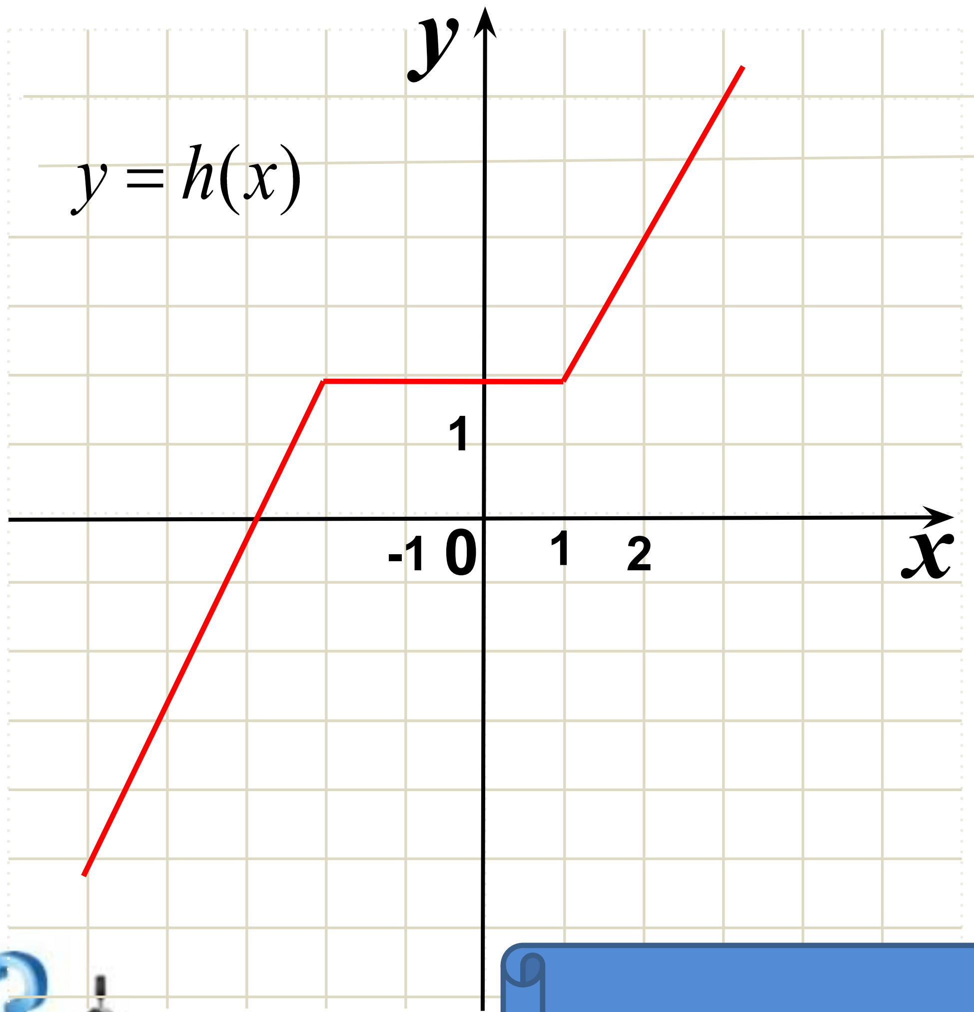
$f'(x) > 0$ на $(-1;1)$

$f'(x) < 0$ на $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$



По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на R

Ответ: $g'(x) > 0$ на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$



По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на R

Ответ:

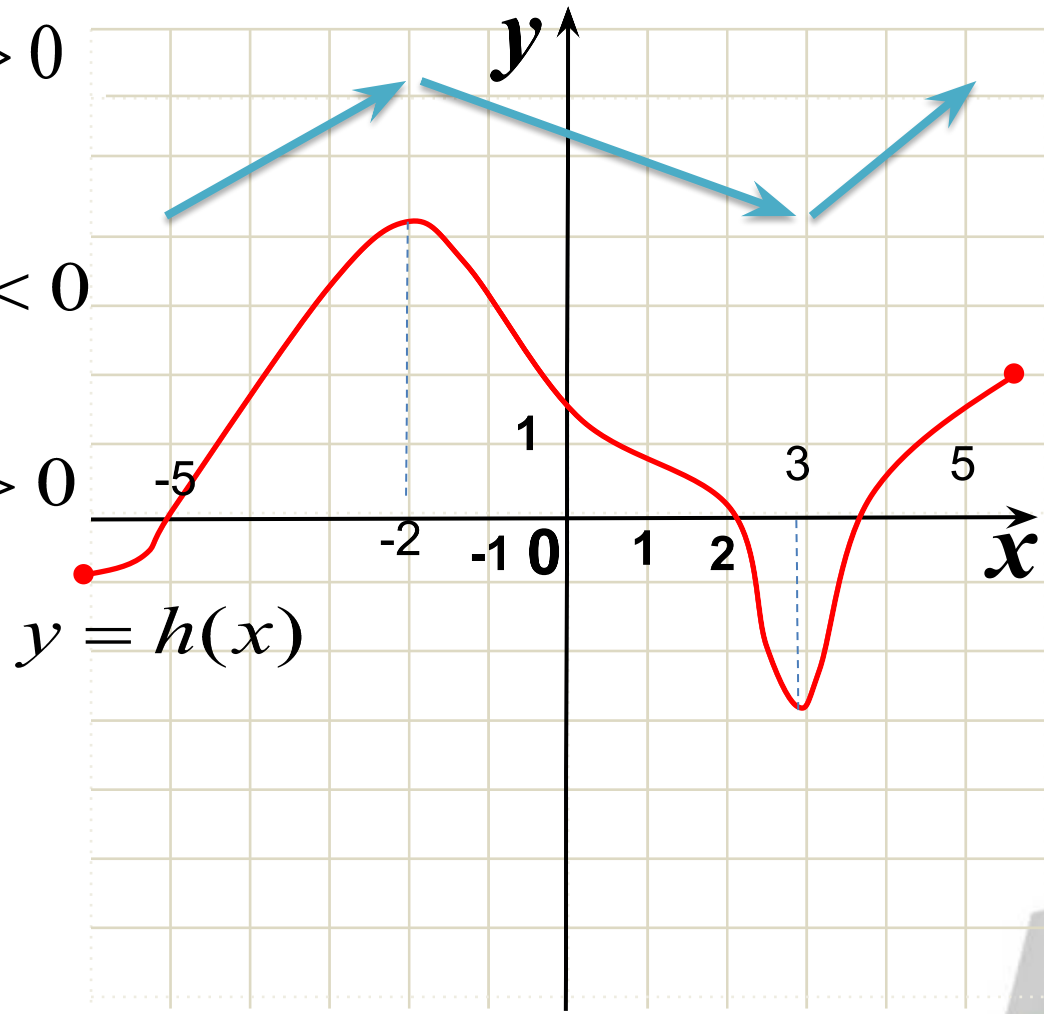
$h'(x) > 0$ на $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

На рисунке изображен график дифференцируемой функции y = h(x). Определите знак производной функции на промежутках

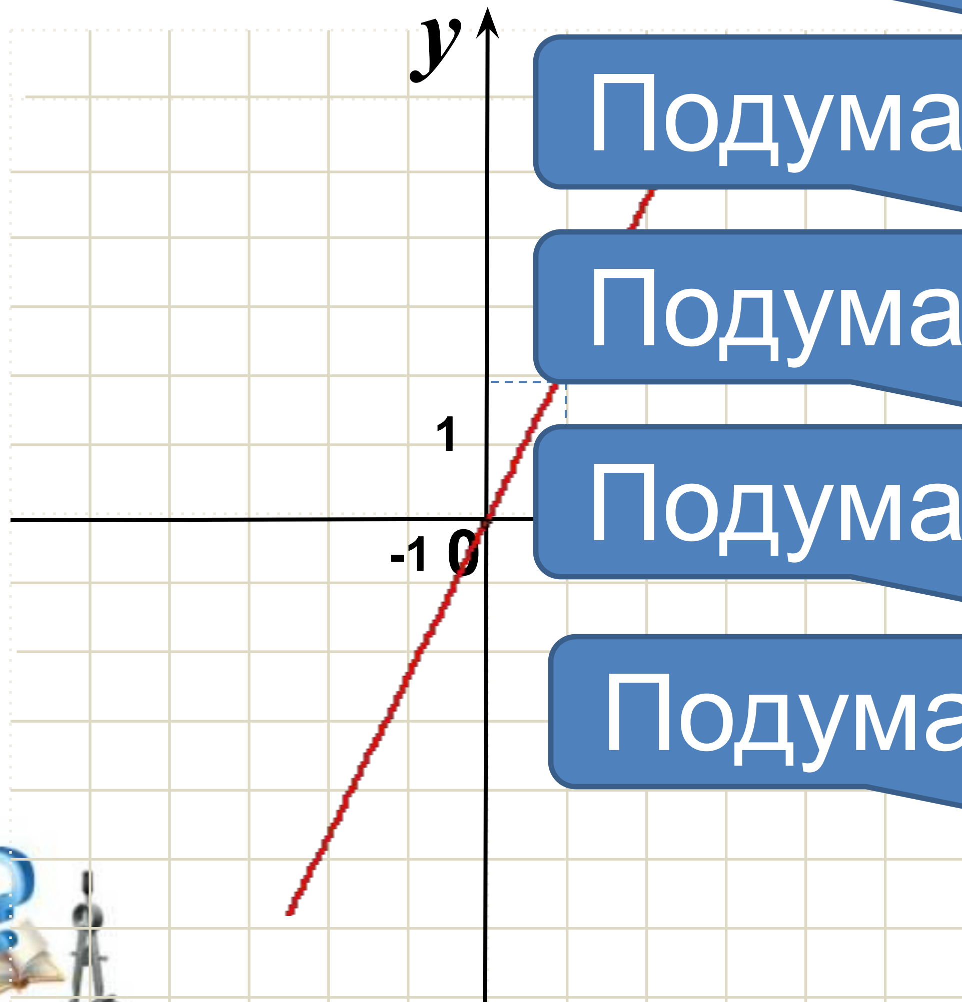
$a)[-5;-2)$ $h'(x) > 0$

$б)(-2;3)$ $h'(x) < 0$

$в)(3;5]$ $h'(x) > 0$



Дан график произв… перечисленных функций. Определи…



Верно

Подумай

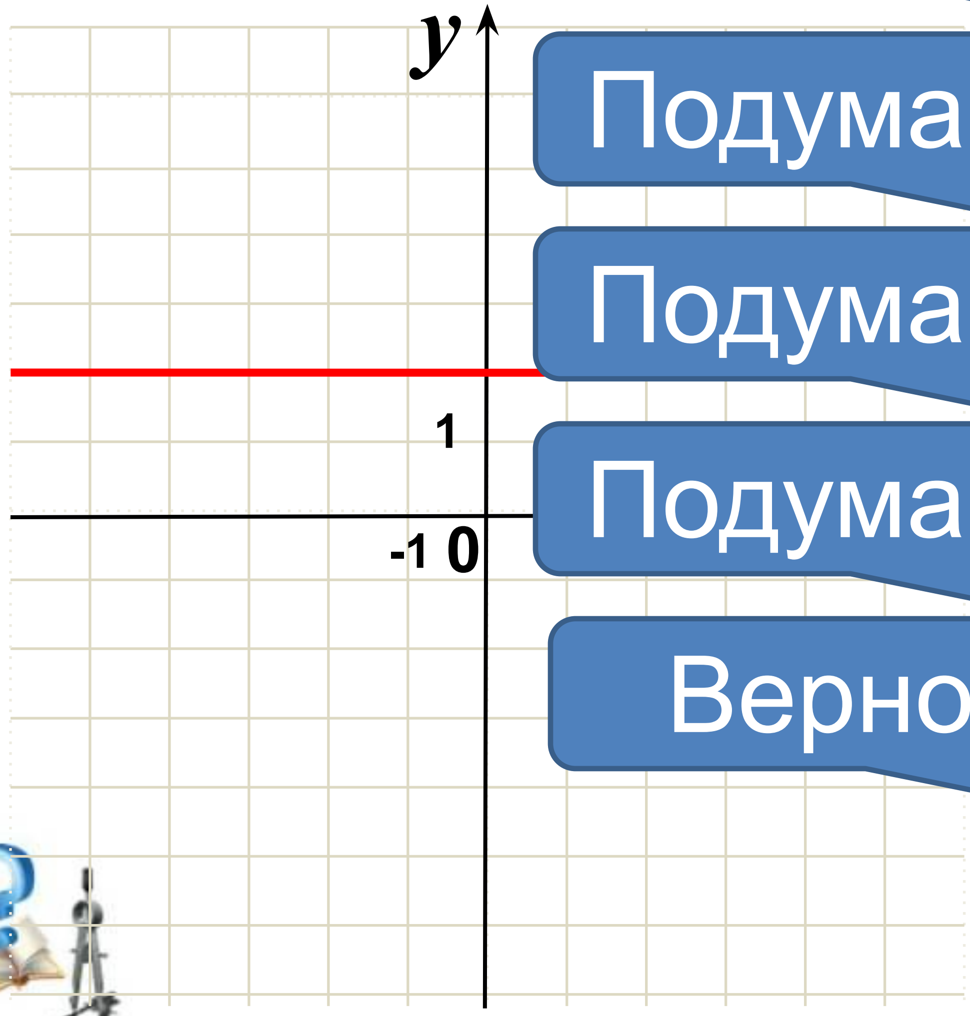
Подумай

Подумай

Подумай

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = \sin x$
4. $\varphi(x) = \cos x$
5. $q(x) = 2x$

Дан график произв… перечисленных функций. Определ…



Подумай

Подумай

Подумай

Подумай

Верно

1 $f(x) = x^2$

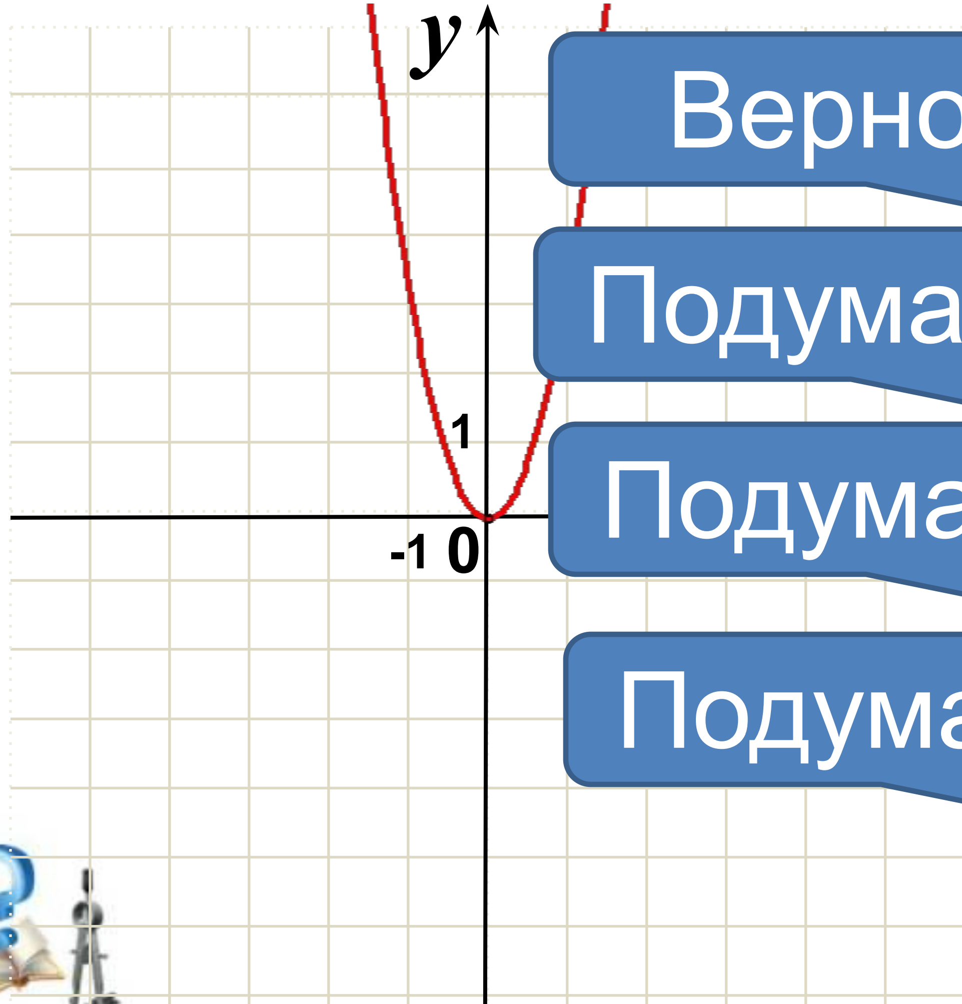
2 $g(x) = x^3$

3 $h(x) = \sin x$

4 $\varphi(x) = \cos x$

5 $q(x) = 2x$

Дан график произв … перечисленных функций. Определ …



Подумай

1 $f(x) = x^2$

Верно

2 $g(x) = x^3$

Подумай

3 $h(x) = \sin x$

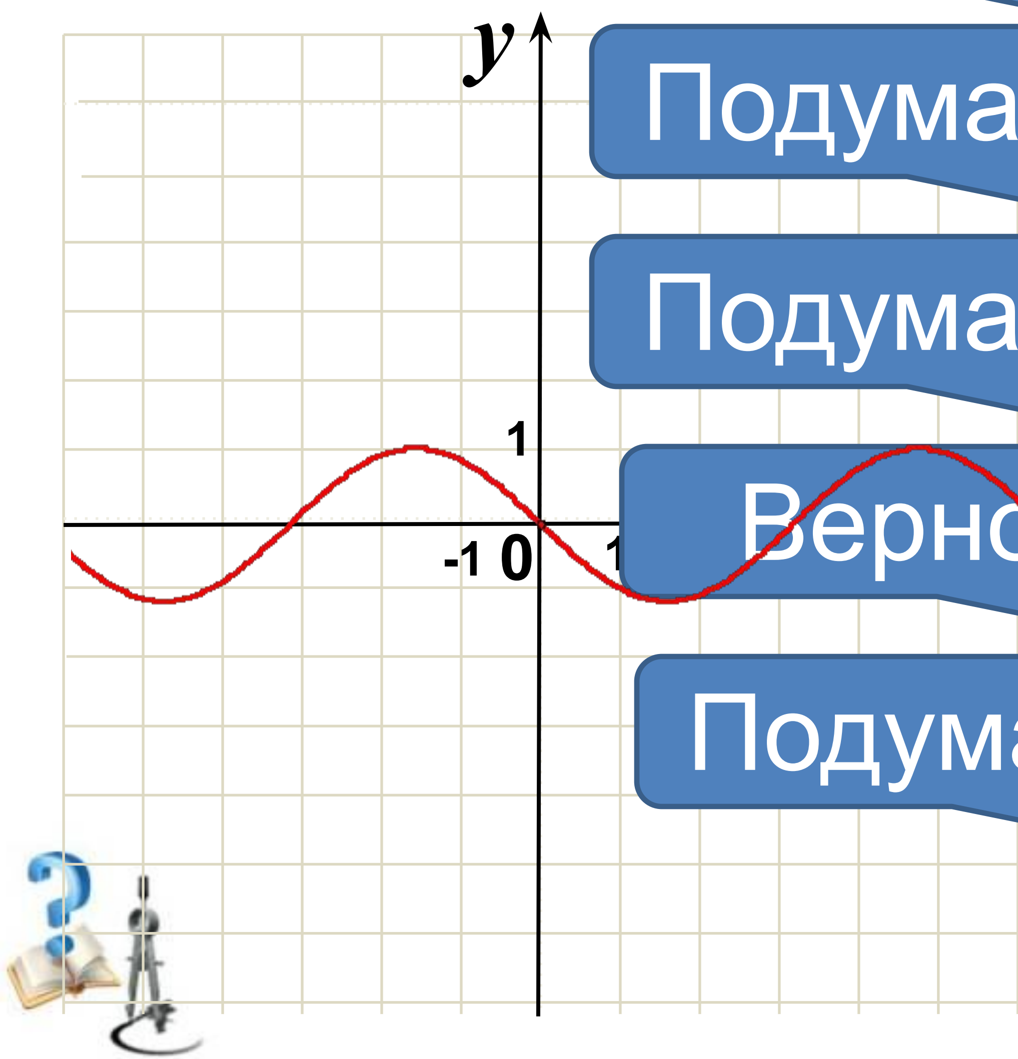
Подумай

4 $\varphi(x) = \cos x$

Подумай

5 $q(x) = 2x$

Дан график произв… перечисленных функций. Определ…



Подумай — 1 $f(x)=x^2$

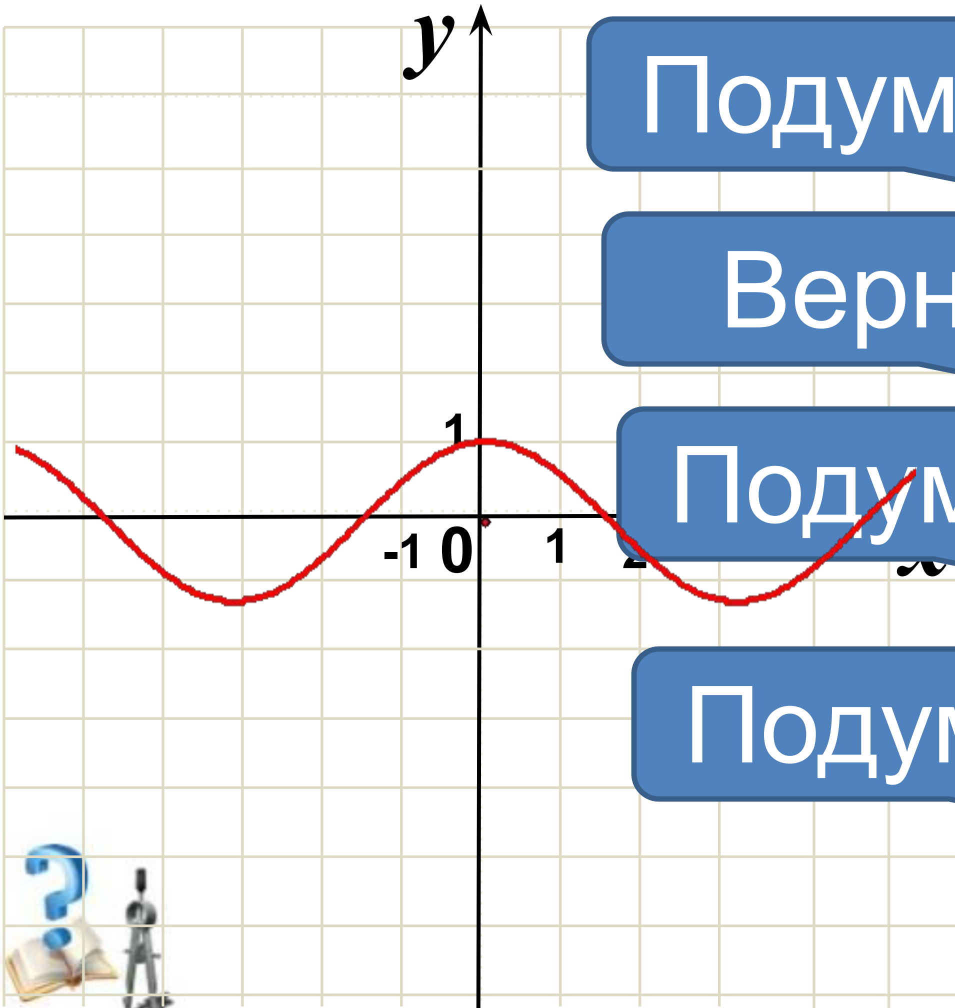
Подумай — 2 $g(x)=x^3$

Подумай — 3 $h(x)=\sin x$

Верно — 4 $\varphi(x)=\cos x$

Подумай — 5 $q(x)=2x$

Дан график произв… перечисленных функций. Определ…



Подумай

1 $f(x) = x^2$

Подумай

2 $g(x) = x^3$

Верно

3 $h(x) = \sin x$

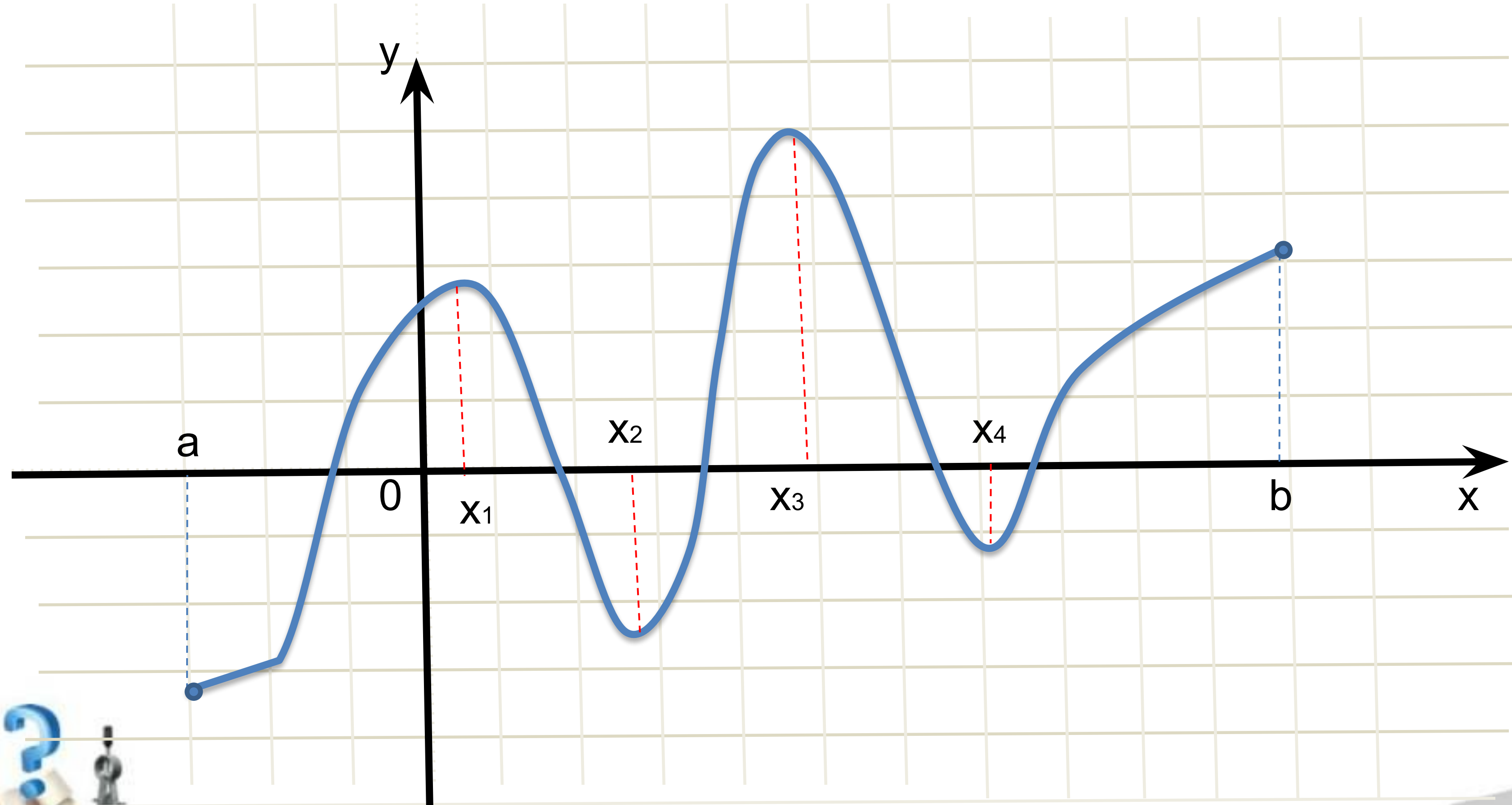
Подумай

4 $\varphi(x) = \cos x$

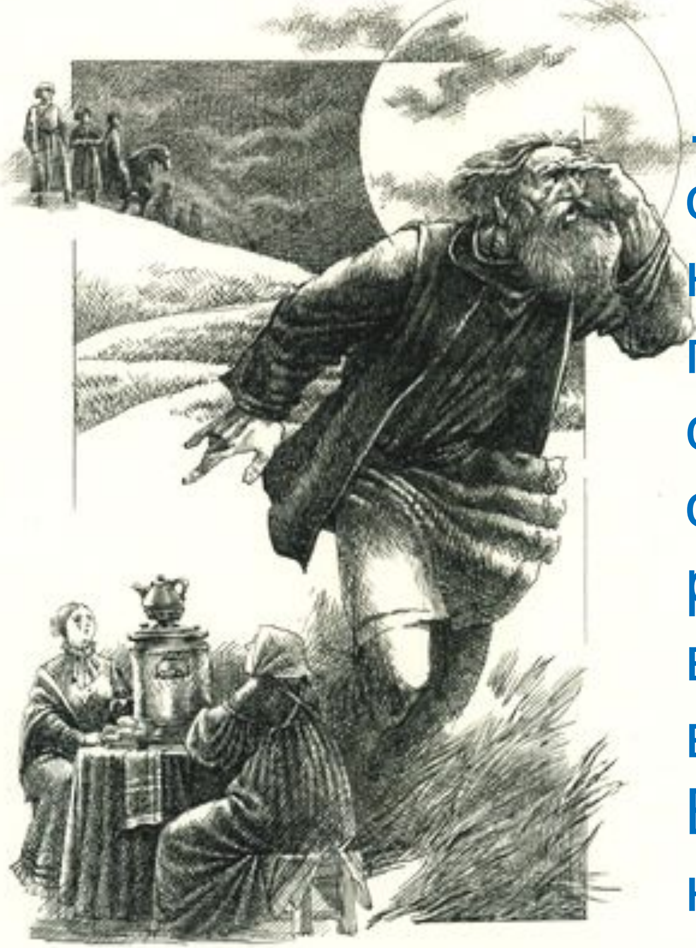
Подумай

5 $q(x) = 2x$

Функция *f(x)* задана на [a; b]. Определите *max* и *min функции*, и точки локального экстремума на [a; b].



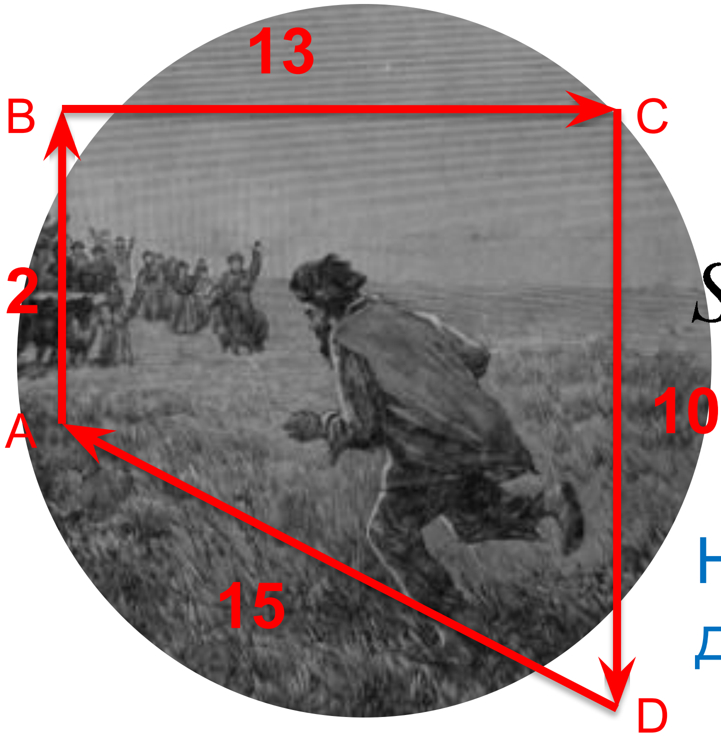
Л.Н.Толстой «Много ли человеку земли надо?»



…Крестьянин Пахом очень мечтал о собственной земле и собрал он наконец, желанную сумму, предстал перед требованием старшины: «Сколько за день земли обойдешь, вся твоя будет за 1000 р. Но если к заходу солнца не возвратишься на место, с которого вышел, пропали твои деньги». Выбежал утром Пахом, прибежал на место и упал без чувств, обежав четырехугольник периметром 40 км.

$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$P = 2 + 13 + 10 + 15 = 40 \text{ (км)}$$



$$S = \frac{2+10}{2} \cdot 13 = 6 \cdot 13 = 78(км^2)$$

Наибольшую ли площадь при данном периметре получил Пахом?

Начертите четырехугольник с периметром 40 км и наибольшей площадью

1 ряд

2 ряд

3 ряд

Составить таблицу для вычисления площадей прямоугольников с различными длинами

Периметр P	40	40	40	40	40	40
Стороны a b	1 19 19	2 18 36	5 15 75	6 14 84	8 12 96	10 10 100
Площадь S						

Вывод. **Из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Пахом, например, мог бы пройти всего 36 км (Р = 9*4=36 км) и иметь участок площадью S = 9*9 =81(кв.км)**

Схема исследования на наибольшее и наименьшее значения функции

1. Ввести переменную x, от значения которой зависит та величина, которая согласно условию задачи принимает наибольшее (наименьшее) значение;

2. Определить границы изменения переменной x – промежуток X;

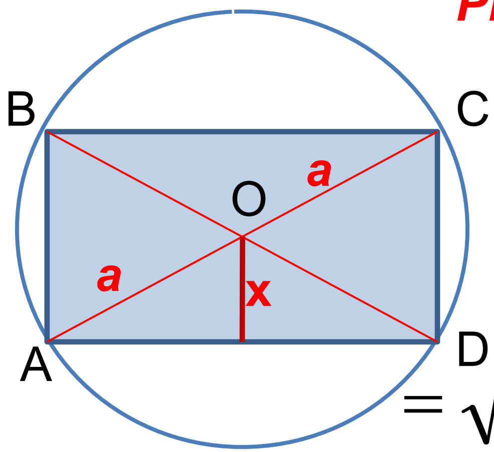
3. Выразить через x величину, которая согласно условию задачи принимает наибольшее (наименьшее) значение (получить функцию f(x));

4. Рассмотреть функцию f(x), заданную на X, найти ее критические точки, точки локального максимума (минимума);

5. Объяснить, почему в точке локального максимума (минимума) функция принимает наибольшее (наименьшее) значение;

6. Интерпретировать результаты исследования функции f(x) с точки зрения решаемой задачи.

В круг радиуса *а* вписать прямоугольник наибольшей площади.



РЕШЕНИЕ

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$

1. $x = \dfrac{AB}{2}$, $0 < x < a$

2. $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} =$

$$= \sqrt{(2a)^2 - (2x)^2} = \sqrt{4a^2 - 4x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

3. $S_{ABCD}(x) = AD \cdot CD = 2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 2x = 4x\sqrt{a^2 - x^2}$

4. $S'(x) = (4x)' \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + 4x \cdot (\sqrt{a^2 - x^2})' =$

$$= 4 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + 4x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

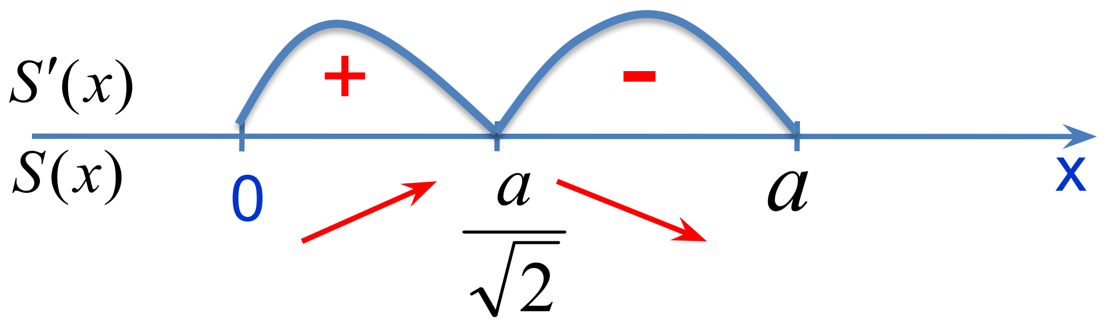
$$= \frac{4(a^2 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

продолжение

$$S'(x) = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

5. $S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, **где** $\frac{a}{\sqrt{2}} \in (0; a)$

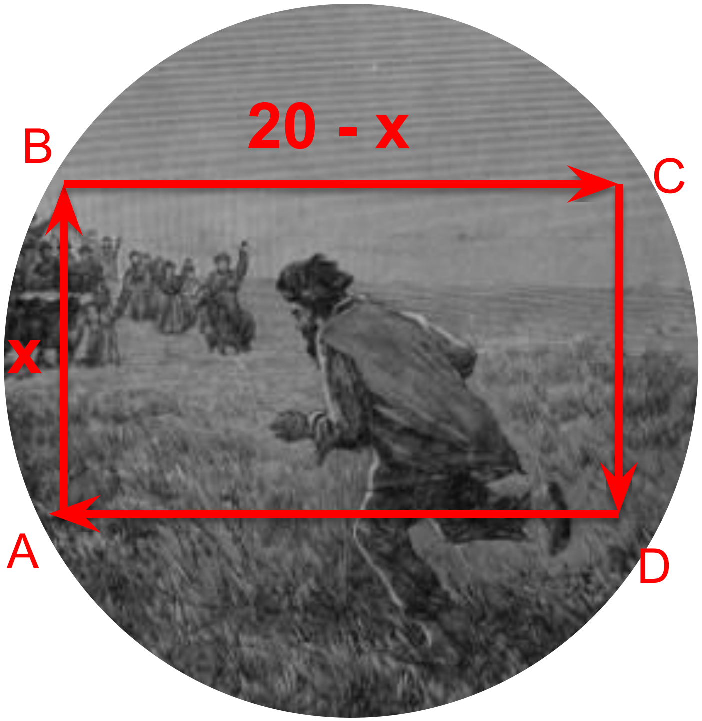
6.



$$\max_{(0;a)} S(x) = S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2$$

Ответ: $2a^2$

Наибольшую ли площадь при данном периметре (40 км) получил Пахом?



$$\frac{P}{2} = 20 \qquad 0 < x < 20$$

$$S(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$$

$$S'(x) = 20 - 2x$$

$$S'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$

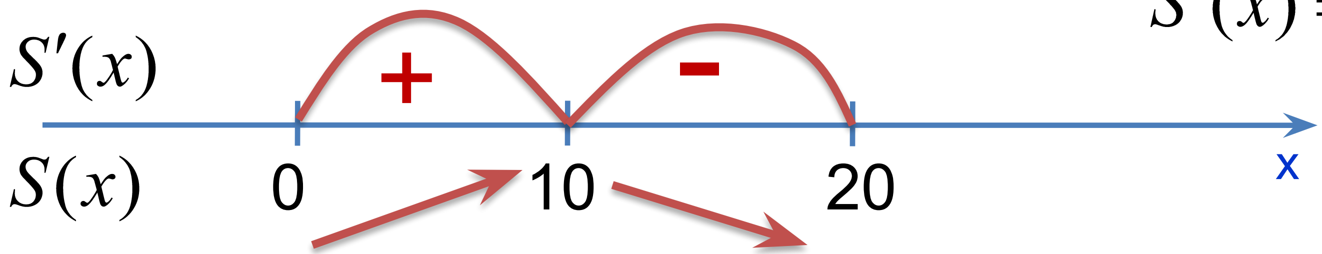
$$10 \in (0;20)$$

на интервале (0; 20) функция имеет единственную критическую точку x=10

продолжение

$$S(x) = x \cdot (20 - x)$$

$$S'(x) = 20 - 2x$$



$$S'(5) = 20 - 10 > 0$$

$$S'(15) = 20 - 30 < 0$$

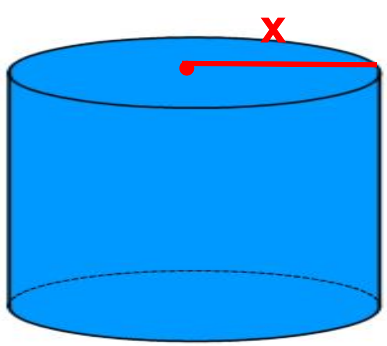
$$\max_{(0;20)} S(x) = S(10) = 100$$

Если бы Пахом при P=40 км, пробежал бы по периметру квадрата, то площадь была бы больше и равна 100 кв.км

Задача 5.100

В некотором царстве, в некотором государстве подорожала жесть, идущая на изготовление консервных банок. Экономный хозяин фабрики рыбных консервов хочет выпускать свою продукцию в банках цилиндрической формы объемом V с наименьшими возможными затратами жести. Вычислите диаметр основания и высоту такой банки.

Решение



1. $x > 0,\quad S_{осн} = \pi x^2$

$$C_{окр} = 2\pi x$$

2. $V = \pi x^2 t \Rightarrow t = \dfrac{V}{\pi x^2}$

3. $S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \dfrac{V}{\pi x^2}$

продолжение

$$S(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

на интервале (0; +∞)

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$$

$$S'(x) = 0$$

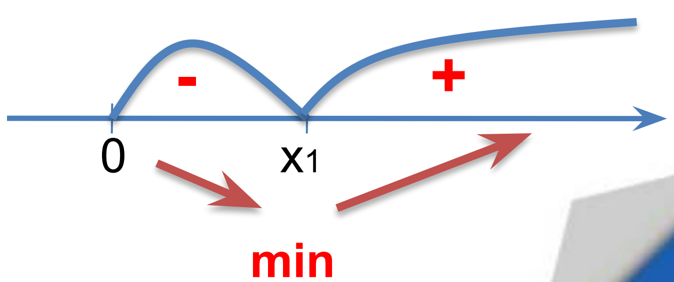
$$4\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$$

$$4\pi x = \frac{2V}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

на интервале (0; +∞) функция имеет единственную критическую точку x_1



продолжение

$$D = 2x = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

$$t = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Ответ: $D = t = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

Дана прямоугольная система координат x0y . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка M(0;1), а катеты лежат на прямых x = -2 и y = 0.

<u>Решение</u>

1) Изобразим один из возможных прямоугольных треугольников – треугольник ABD.

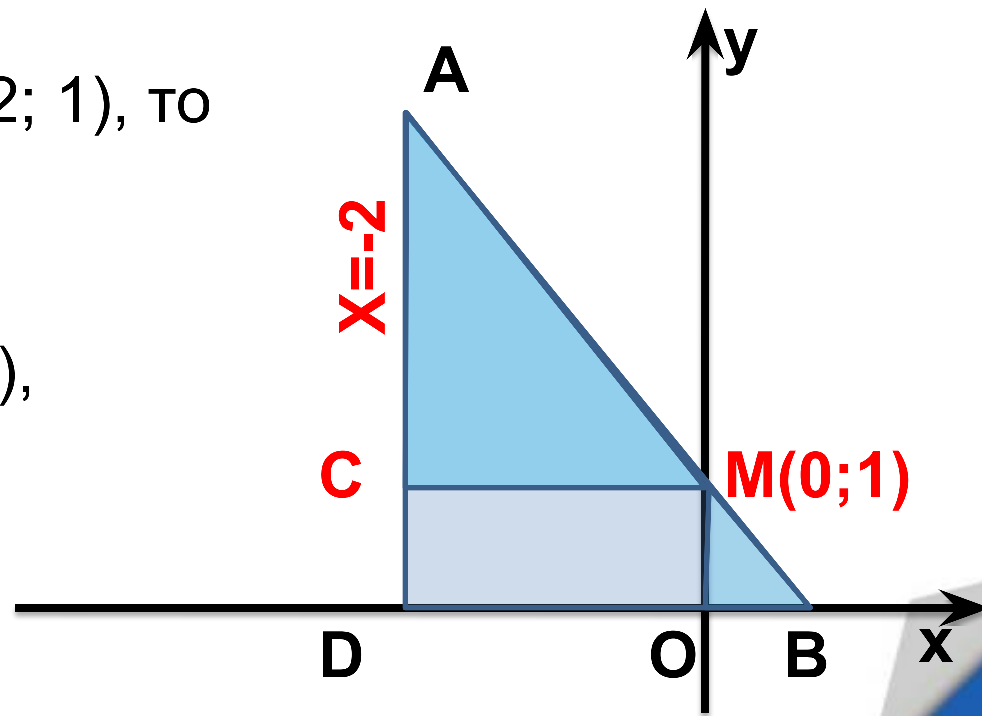
2) Так как M(0;1) и C(-2; 1), то

MO=1, OD=MC=2.

3) Обозначим AC=t ($t>0$),

тогда $\Delta ACM \sim \Delta MOB$

(по двум углам)

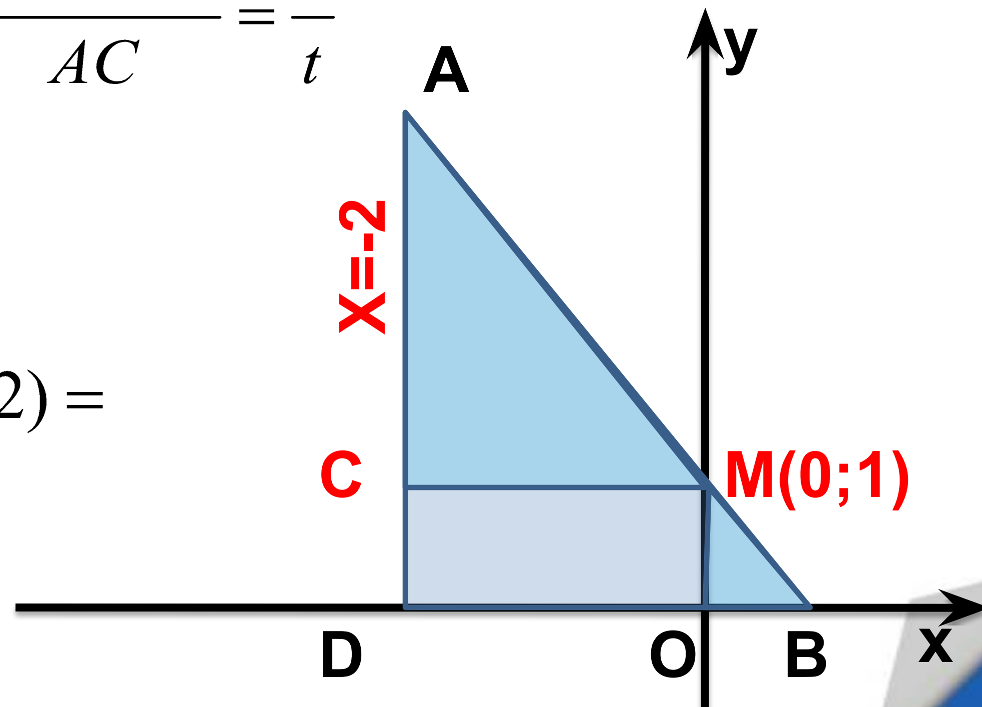


Дана прямоугольная система координат x0y . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка M(0;1), а катеты лежат на прямых x = -2 и y = 0.

<u>продолжение</u>

4) Из подобия треугольников ACM и MOB следует, что

$$\frac{AC}{MO}=\frac{MC}{BO}\Rightarrow BO=\frac{MC\cdot MO}{AC}=\frac{2}{t}$$



5) $$S_{\Delta ADB}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DB$$

$$S_{\Delta ADB}=\frac{1}{2}\cdot(t+1)\cdot(\frac{2}{t}+2)=$$

$$=t+\frac{1}{t}+2$$

Дана прямоугольная система координат x0y . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка M(0;1), а катеты лежат на прямых x = -2 и y = 0.

продолжение

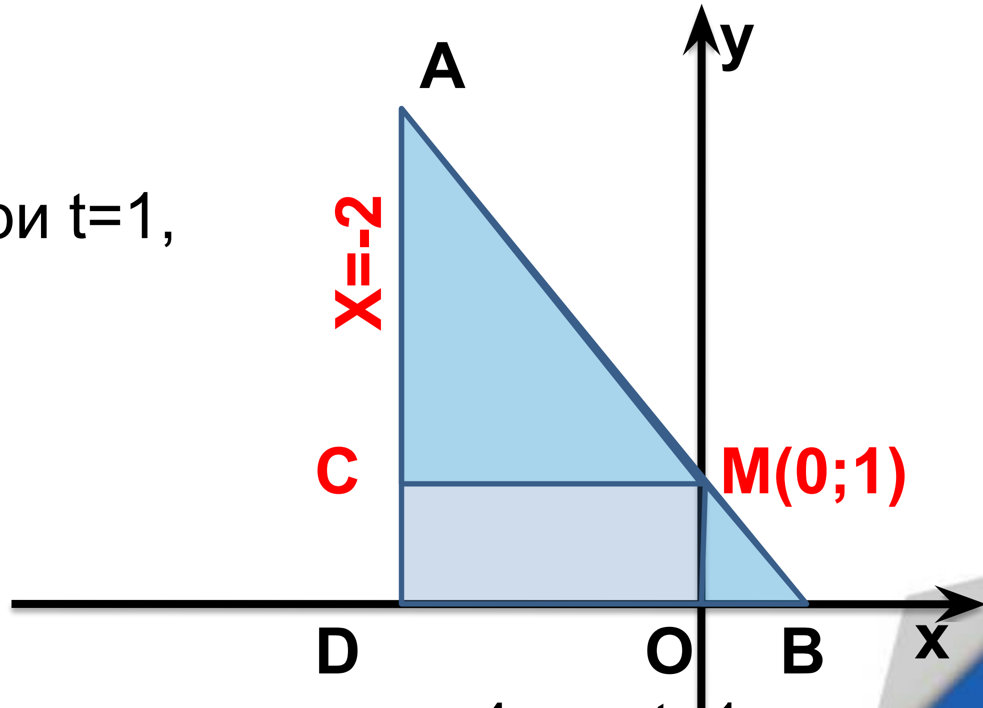
6) Так как для любого t>0 справедливо неравенство

$$t+\frac{1}{t}\geq 2$$ причем

$$t+\frac{1}{t}=2$$ только при t=1,

то для t>0 функция

$$t+\frac{1}{t}+2$$



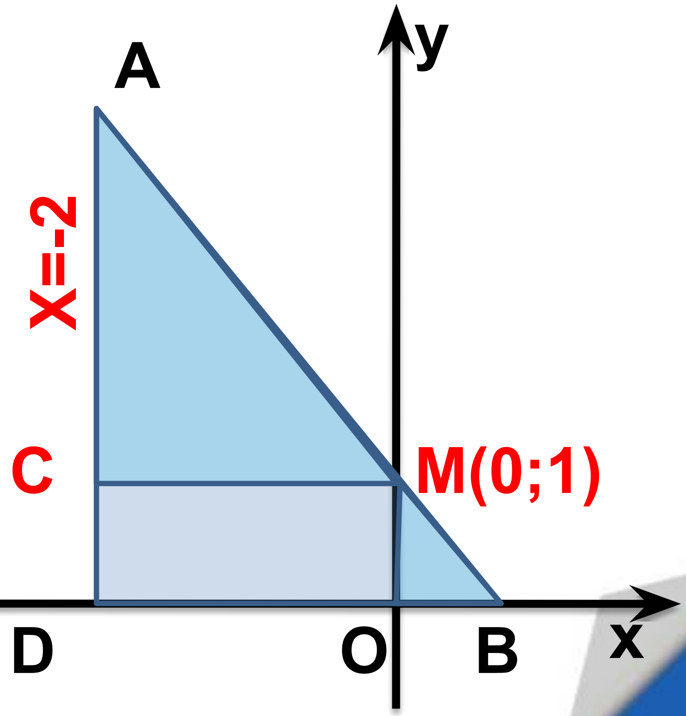
достигает наименьшего значения 4 при t=1.

Дана прямоугольная система координат x0y . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка M(0;1), а катеты лежат на прямых x = -2 и y = 0.

<u>продолжение</u>

7) Заметим, что если в данной задаче обозначить OB=t, то аналогичными рассуждениями можно получить, что

$$S = t + \frac{4}{t} = 2\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right)$$



Тогда из неравенства

$$\frac{t}{2} + \frac{2}{t} \geq 2$$

следует, что $S \geq 4$

Ответ:4

Д/З: п.5.9 – выучить; выучить алгоритм
решить №№5.94*, 5.95 + творческое задание (необязательное) Придумать прикладную задачу по пройденной теме.

- Какова схема исследования на наибольшее и наименьшее значение функции?

Продолжите фразы:

- Сегодня на уроке я узнал…
- Сегодня на уроке я научился…
- Сегодня на уроке я познакомился…
- Сегодня на уроке я повторил…
- Сегодня на уроке я закрепил…

Список использованных ресурсов и литературы

1. Лукин Р.Д., Лукина Т.К., Янунина М.С. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. – М. Просвещение, 1989 г.
2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. – М.:Просвещение, 2008.
3. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. Дидактический материал. 11 кл.. – М.: Просвещение, 2009.
4. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. 11 кл.Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2009.
5. Толстой Л.Н. Много ли человеку земли надо.

http://images.yandex.ru/search?p=3&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=hiero.ru&img_url=en.hiero.ru%2Fpict%2F766%2F2137861.jpg&rpt=simage (сколько земли 1)

http://images.yandex.ru/search?p=8&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=feb-web.ru&img_url=feb-web.ru%2Ffeb%2Ftolstoy%2Fpictures%2FLEB-338.jpg&rpt=simage (сколько земли 2)

Презентация – шаблон Microsoft Office PowerPoint 97-2003, автор Александрова З.В. (Aida_Alex) http:aida.ucoz.ru