



# Задачи на максимум и минимум

11 класс Никольский С.М.



1. Изменение силы тока  $I$  в зависимости от времени  $t$  задано уравнением  $I = 2t^2 - 5t$  ( $I$  – в амперах,  $t$  – в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в момент времени  $t = 10$  сек.

Ответ:  $v(t) = 4t - 5$  (А/с),  $v(10) = 35$  (А/с)

2. Известно, что тело массой  $m=5$  кг движется прямолинейно по закону  $S(t) = t^2 + 2$  ( $S$  – путь в метрах,  $t$  – время в секундах). Найдите кинетическую энергию тела через 2 сек после начала движения.

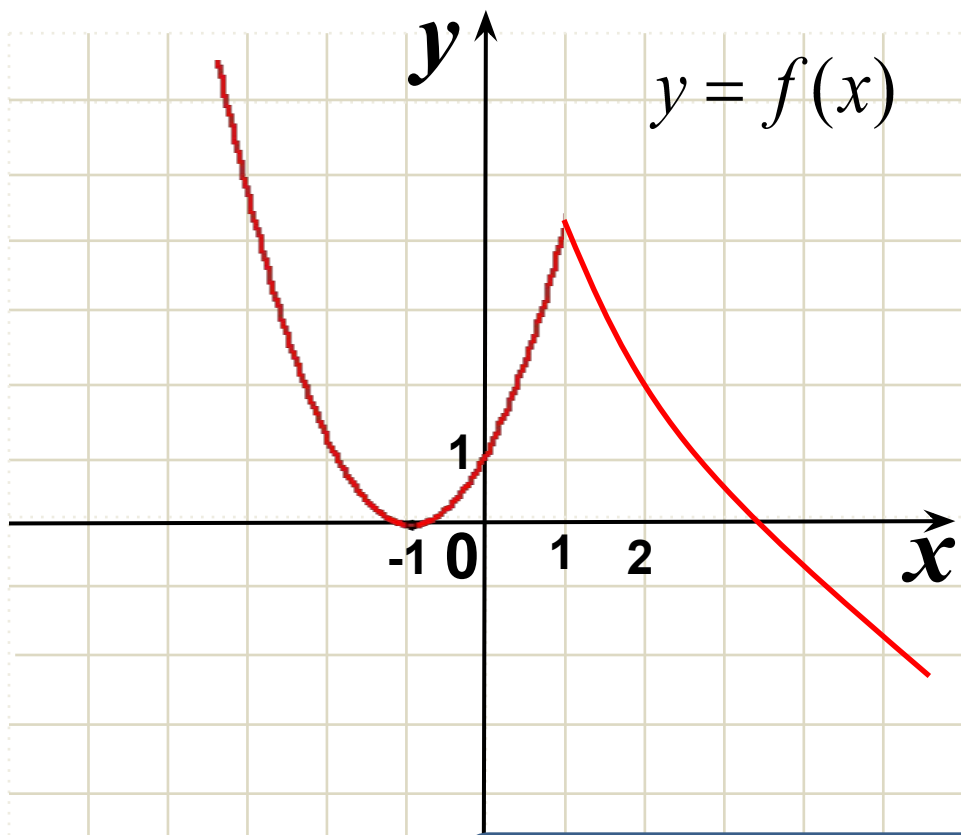
$$E = \frac{mv^2}{2}$$

$$v(t) = 2t \text{ (м/с)}$$

$$v(2) = 4 \text{ (м/с)}$$

$$E = \frac{5 \cdot 16}{2} = 40 \text{ (Дж)}$$





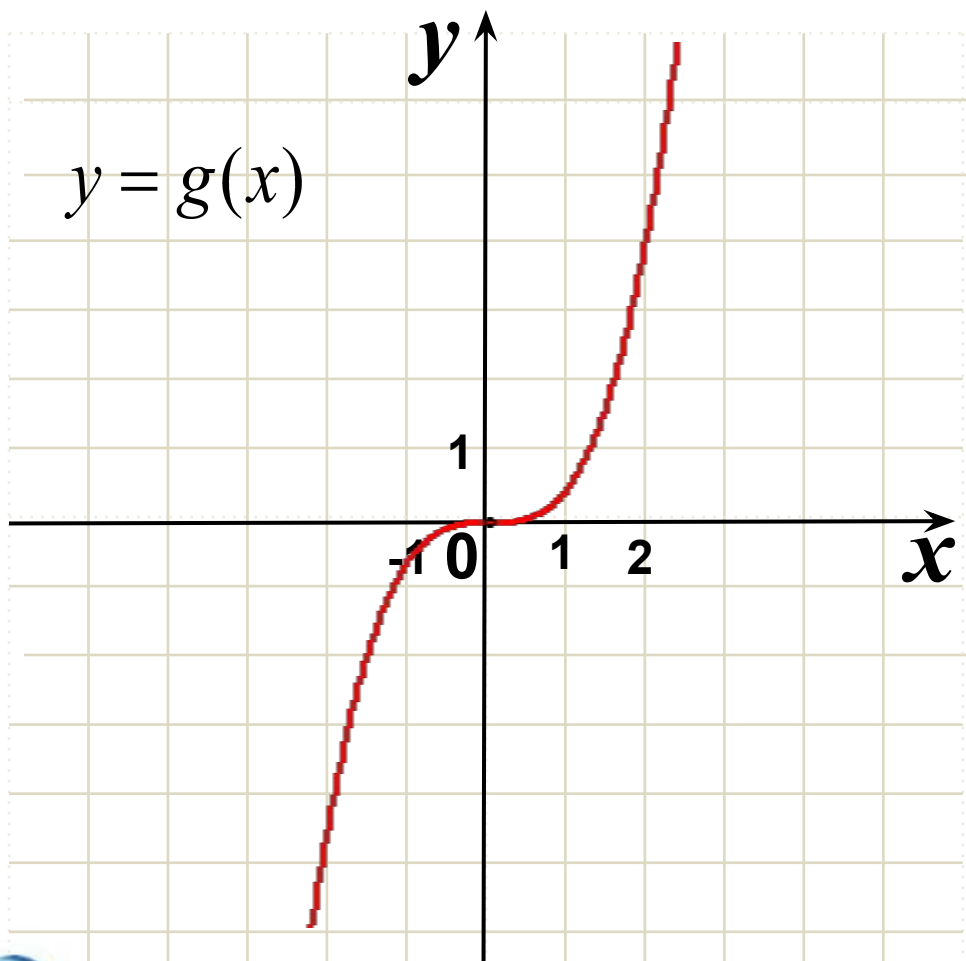
По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на  $\mathbb{R}$

$$f'(x) > 0 \text{ на } (-1; 1)$$

$$f'(x) < 0 \text{ на } (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$



**Ответ:**

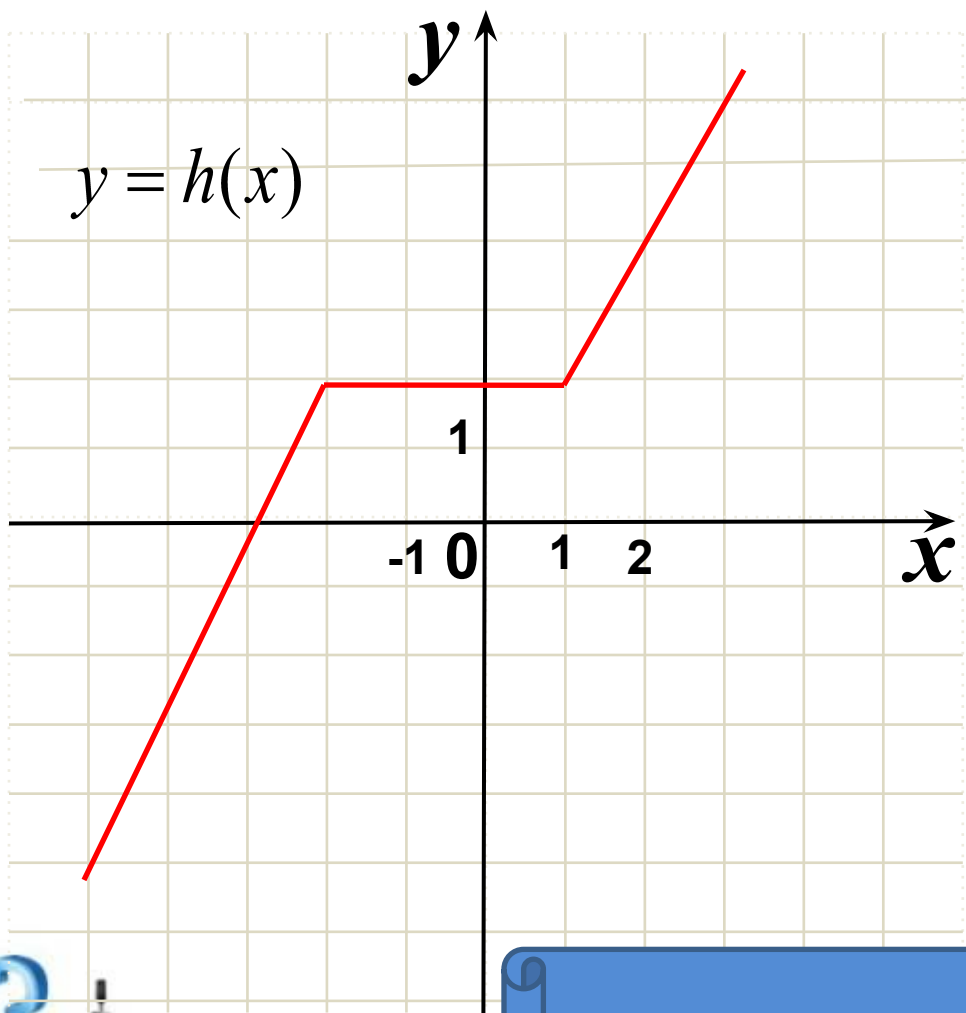


По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на  $\mathbb{R}$



**Ответ:**

$$g'(x) > 0 \text{ на } (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$



По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на  $\mathbb{R}$



**Ответ:**

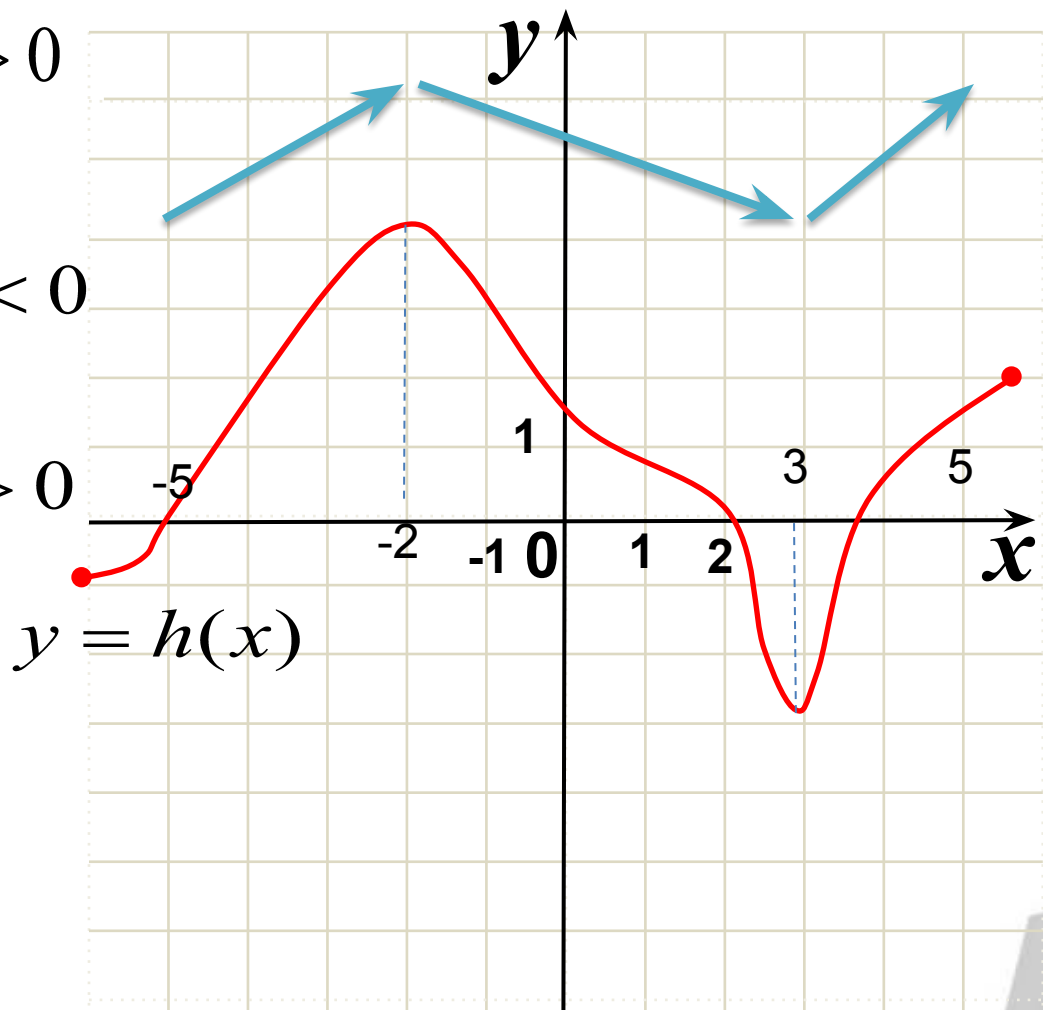
$$h'(x) > 0 \quad \text{на} \quad (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$

На рисунке изображен график дифференцируемой функции  $y = h(x)$ . Определите знак производной функции на промежутках

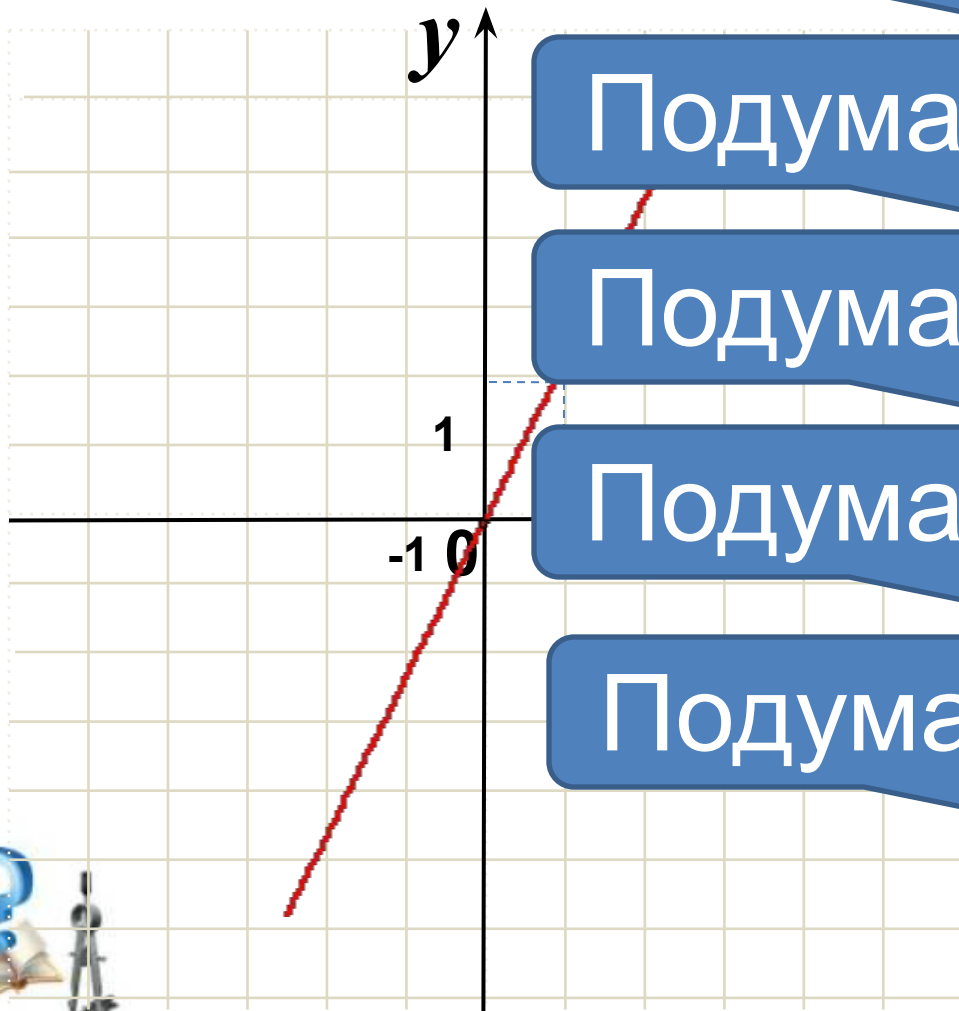
а)  $[-5; -2)$   $h'(x) > 0$

б)  $(-2; 3)$   $h'(x) < 0$

в)  $(3; 5]$   $h'(x) > 0$



Дан график произведения двух непрерывных функций. Определите их.



Верно

Подумай

Подумай

Подумай

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

$$h(x) = \sin x$$

4

$$\varphi(x) = \cos x$$

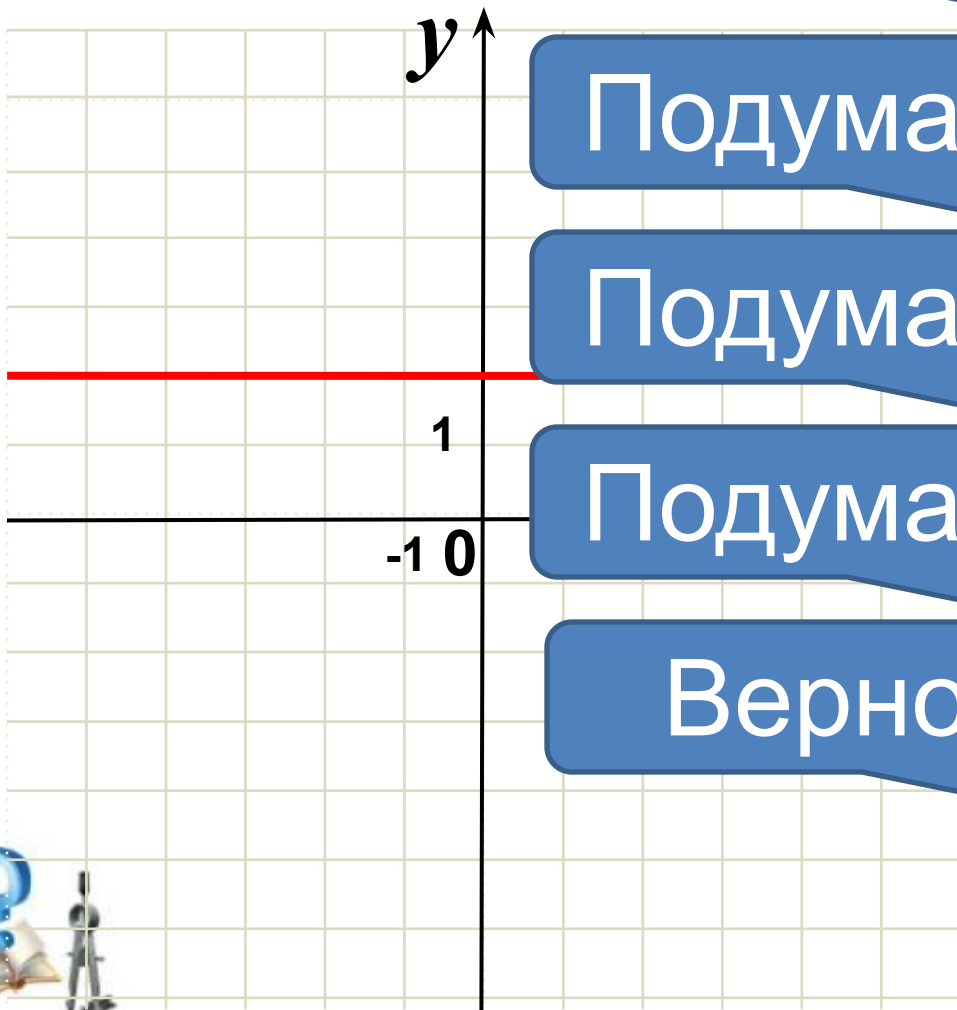
5

$$q(x) = 2x$$



Дан график произведения перечисленных функций. Определи

Подумай



Подумай

Подумай

Подумай

Верно

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

$$h(x) = \sin x$$

4

$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$





Дан график производной одной из перечисленных функций. Определите, какая из них.



Подумай

Верно

Подумай

Подумай

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

$$h(x) = \sin x$$

4

$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$



Дан график производной одной из перечисленных функций. Определ

Подумай

Подумай

Подумай

Верно

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

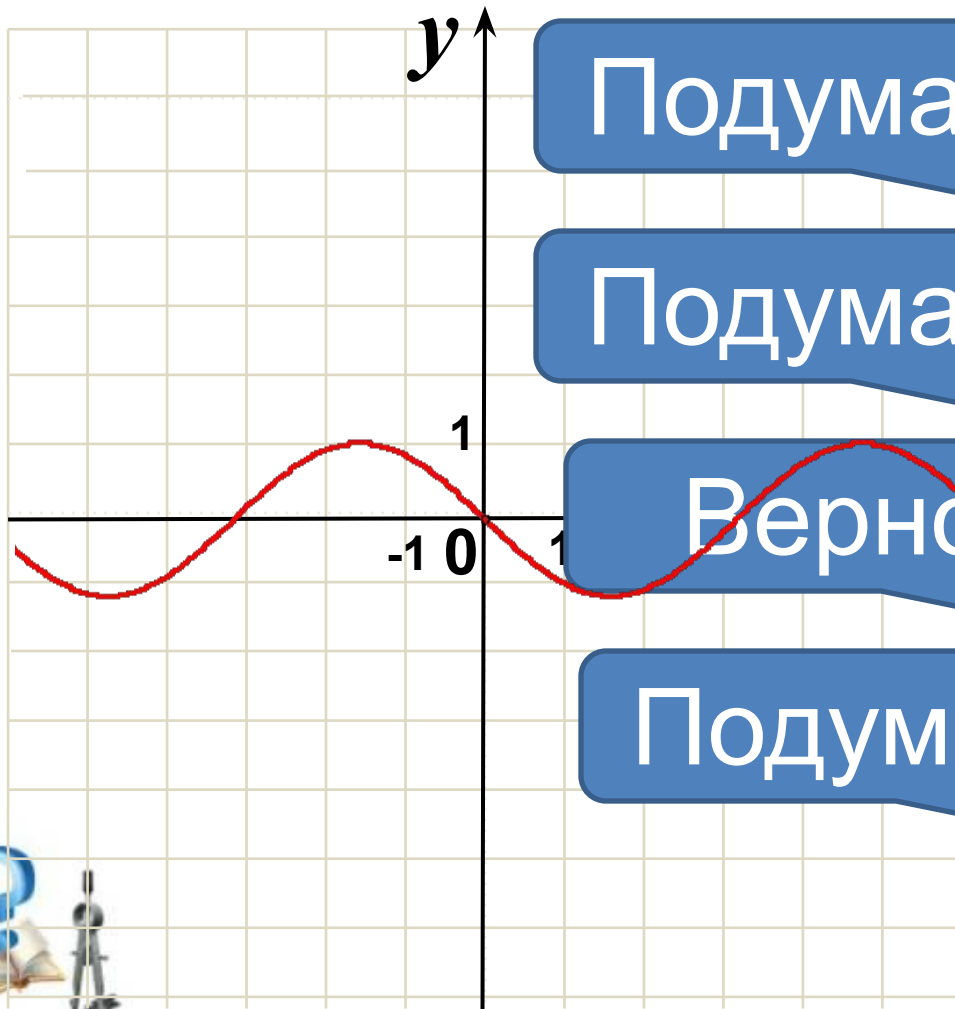
$$h(x) = \sin x$$

4

$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$



Дан график производной одной из перечисленных функций. Определите, какая из них.

Подумай

Подумай

Верно

Подумай

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

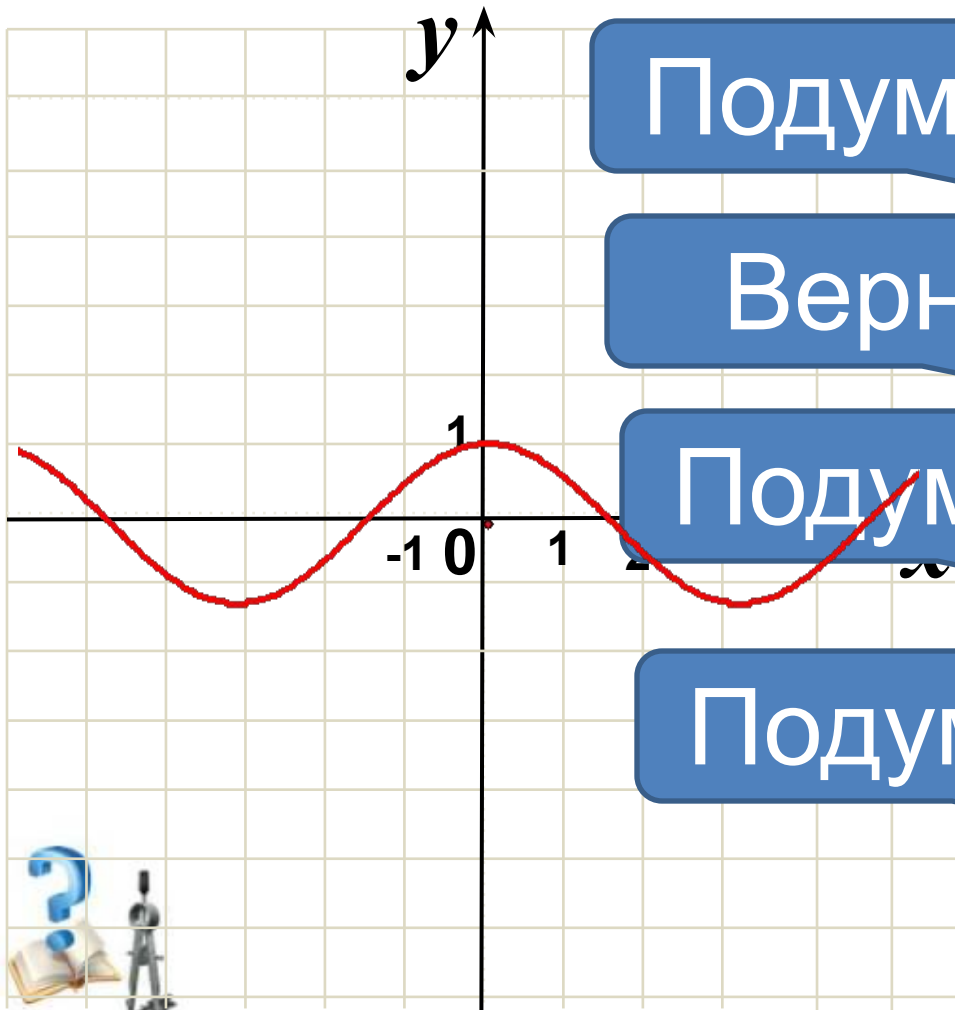
$$h(x) = \sin x$$

4

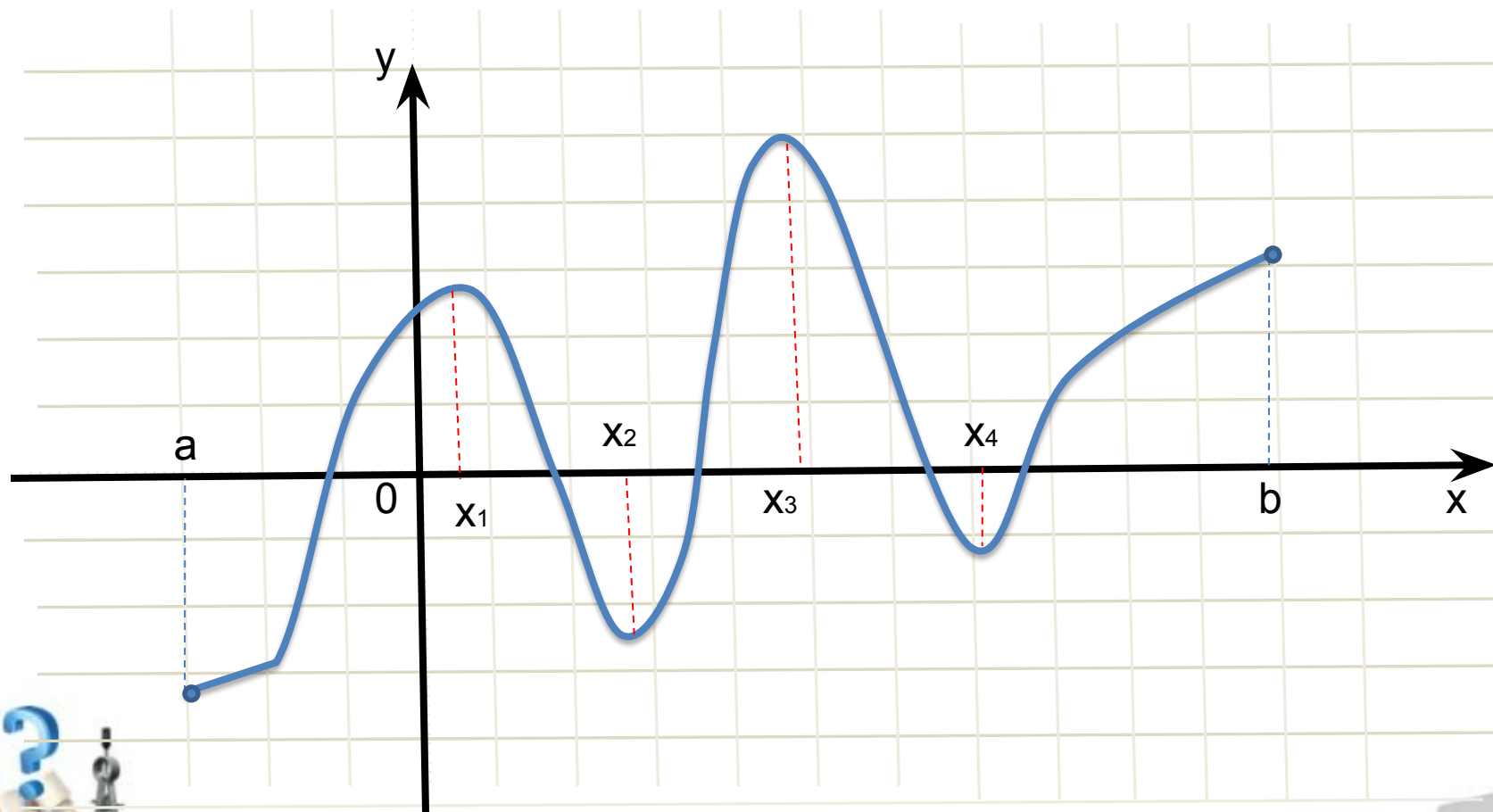
$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$

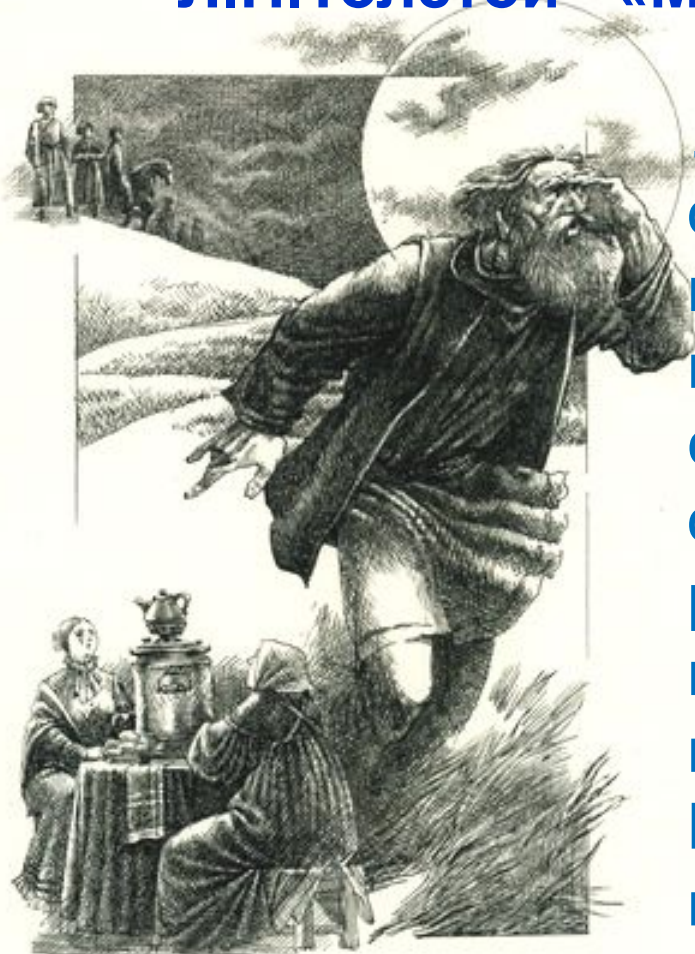


Функция  $f(x)$  задана на  $[a; b]$ . Определите  $\max$  и  $\min$  функции, и точки локального экстремума на  $[a; b]$ .



## Л.Н.Толстой «Много ли человеку земли надо?»

...Крестьянин Пахом очень мечтал о собственной земле и собрал он наконец, желанную сумму, предстал перед требованием старшины: «Сколько за день земли обойдешь, вся твоя будет за 1000 р. Но если к заходу солнца не возвратишься на место, с которого вышел, пропали твои деньги». Выбежал утром Пахом, прибежал на место и упал без чувств, обежав четырехугольник периметром 40 км.

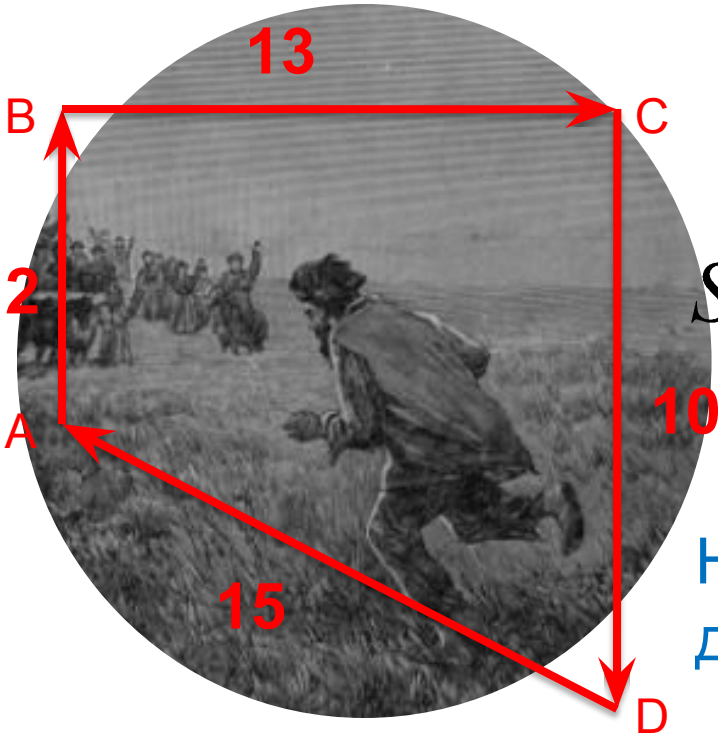


$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$P = 2 + 13 + 10 + 15 = 40 \text{ (км)}$$

$$S = \frac{2+10}{2} \cdot 13 = 6 \cdot 13 = 78 \text{ (км}^2\text{)}$$

Наибольшую ли площадь при данном периметре получил Пахом?



# Начертите четырехугольник с периметром 40 км и наибольшей площадью

1 ряд

2 ряд

3 ряд



## Составить таблицу для вычисления площадей прямоугольников с различными длинами

Периметр P	40	40	40	40	40	40
	1	2	5	6	8	10
Стороны a	19	18	15	14	12	10
b	19	36	75	84	96	100
Площадь S						

**Вывод.** Из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Пахом, например, мог бы пройти всего 36 км ( $P = 9 \cdot 4 = 36$  км) и иметь участок площадью  $S = 9 \cdot 9 = 81$  (кв.км)





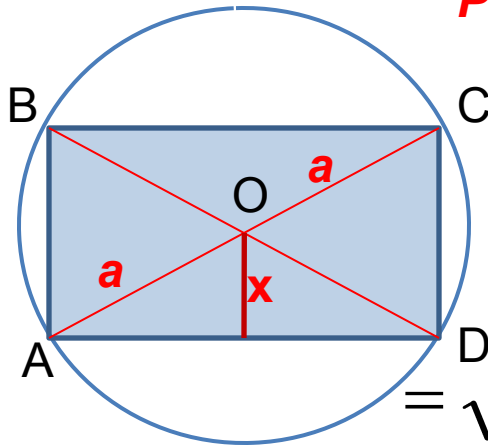
# Схема исследования на наибольшее и наименьшее значения функции



1. Ввести переменную  $x$ , от значения которой зависит та величина, которая согласно условию задачи принимает наибольшее (наименьшее) значение;
2. Определить границы изменения переменной  $x$  – промежуток  $X$ ;
3. Выразить через  $x$  величину, которая согласно условию задачи принимает наибольшее (наименьшее) значение (получить функцию  $f(x)$ );
4. Рассмотреть функцию  $f(x)$ , заданную на  $X$ , найти ее критические точки, точки локального максимума (минимума);
5. Объяснить, почему в точке локального максимума (минимума) функция принимает наибольшее (наименьшее) значение;
6. Интерпретировать результаты исследования функции  $f(x)$  с точки зрения решаемой задачи.



В круг радиуса  $a$  вписать прямоугольник наибольшей площади.



**РЕШЕНИЕ**

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$

$$1. \quad x = \frac{AB}{2}, \quad 0 < x < a$$

$$2. \quad AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} =$$

$$= \sqrt{(2a)^2 - (2x)^2} = \sqrt{4a^2 - 4x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$3. \quad S_{ABCD}(x) = AD \cdot CD = 2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 2x = 4x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$4. \quad S'(x) = (4x)' \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + 4x \cdot (\sqrt{a^2 - x^2})' =$$

$$= 4 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + 4x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

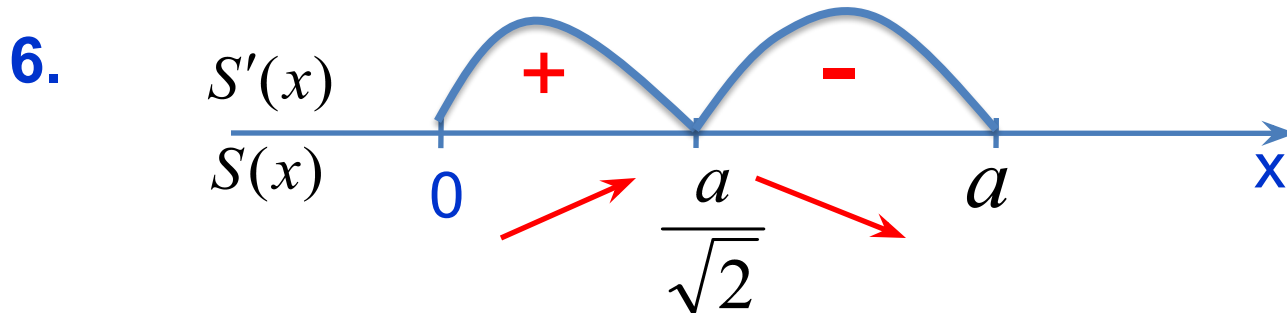
$$= \frac{4(a^2 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$



## продолжение

$$S'(x) = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

5.  $S'(x) = 0 \implies x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , где  $\frac{a}{\sqrt{2}} \in (0; a)$

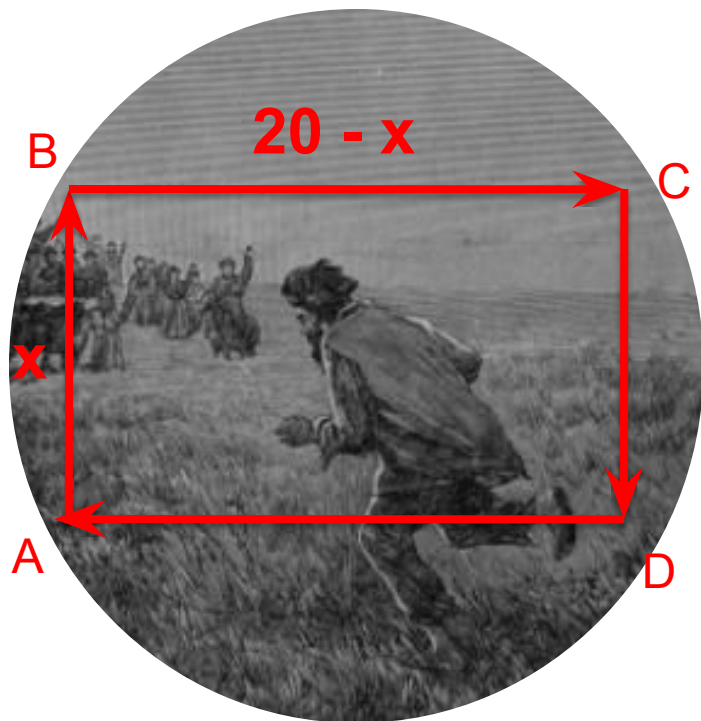


$$\max_{(0; a)} S(x) = S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2$$

**Ответ:**  $2a^2$



Наибольшую ли площадь при данном периметре (40 км) получил Пахом?



$$\frac{P}{2} = 20 \quad 0 < x < 20$$

$$S(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$$

$$S'(x) = 20 - 2x$$

$$S'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 10$$

$$10 \in (0; 20)$$

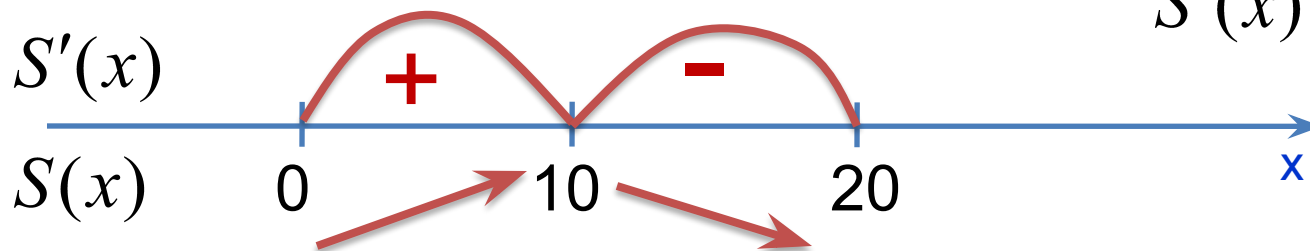


на интервале  $(0; 20)$  функция имеет единственную критическую точку  $x=10$

## продолжение

$$S(x) = x \cdot (20 - x)$$

$$S'(x) = 20 - 2x$$



$$S'(5) = 20 - 10 > 0$$

$$S'(15) = 20 - 30 < 0$$

$$\max_{(0;20)} S(x) = S(10) = 100$$

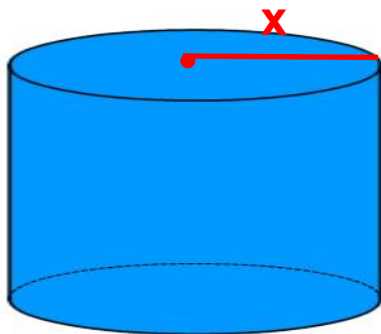


Если бы Пахом при  $P=40$  км, пробежал бы по периметру квадрата, то площадь была бы больше и равна 100 кв.км

## Задача 5.100

В некотором царстве, в некотором государстве подорожала жесть, идущая на изготовление консервных банок. Экономный хозяин фабрики рыбных консервов хочет выпускать свою продукцию в банках цилиндрической формы объемом  $V$  с наименьшими возможными затратами жести. Вычислите диаметр основания и высоту такой банки.

### Решение



1.  $x > 0, \quad S_{\text{осн}} = \pi x^2$

$$C_{\text{окр}} = 2\pi x$$

2.  $V = \pi x^2 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{V}{\pi x^2}$

3.  $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2}$



## продолжение

$$S(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} \quad \text{на интервале } (0; +\infty)$$

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$$

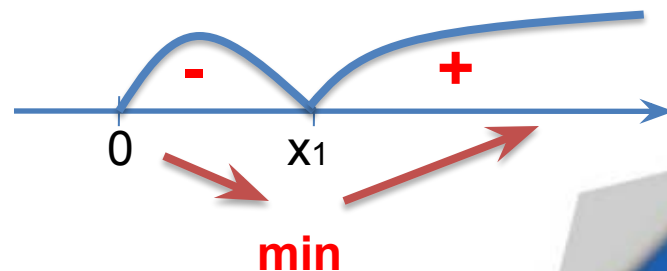
$$S'(x) = 0 \quad 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$$

$$4\pi x = \frac{2V}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

на интервале  $(0; +\infty)$  функция имеет единственную критическую точку  $x_1$



$$D = 2x = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

$$t = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

**Ответ:**  $D = t = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$





Дана прямоугольная система координат  $xOy$ . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка  $M(0;1)$ , а катеты лежат на прямых  $x = -2$  и  $y = 0$ .

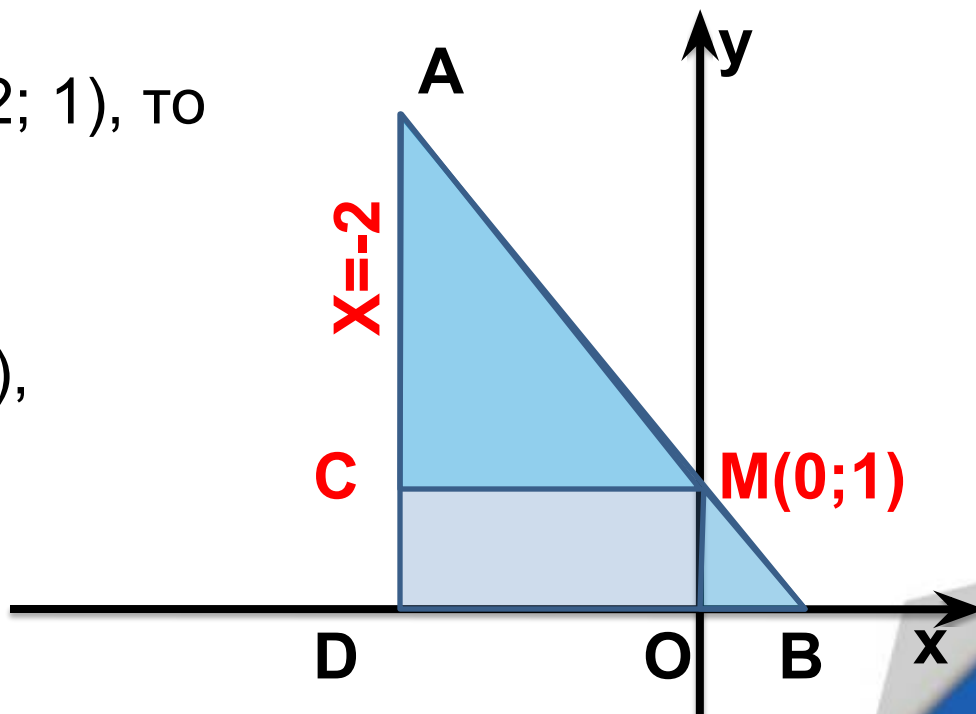
### Решение

1) Изобразим один из возможных прямоугольных треугольников – треугольник  $ABD$ .

2) Так как  $M(0;1)$  и  $C(-2; 1)$ , то  $MO=1$ ,  $OD=MC=2$ .

3) Обозначим  $AC=t$  ( $t>0$ ),

тогда  $\triangle ACM \sim \triangle MOB$   
(по двум углам)



Дана прямоугольная система координат  $xOy$ . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка  $M(0;1)$ , а катеты лежат на прямых  $x = -2$  и  $y = 0$ .

продолжение

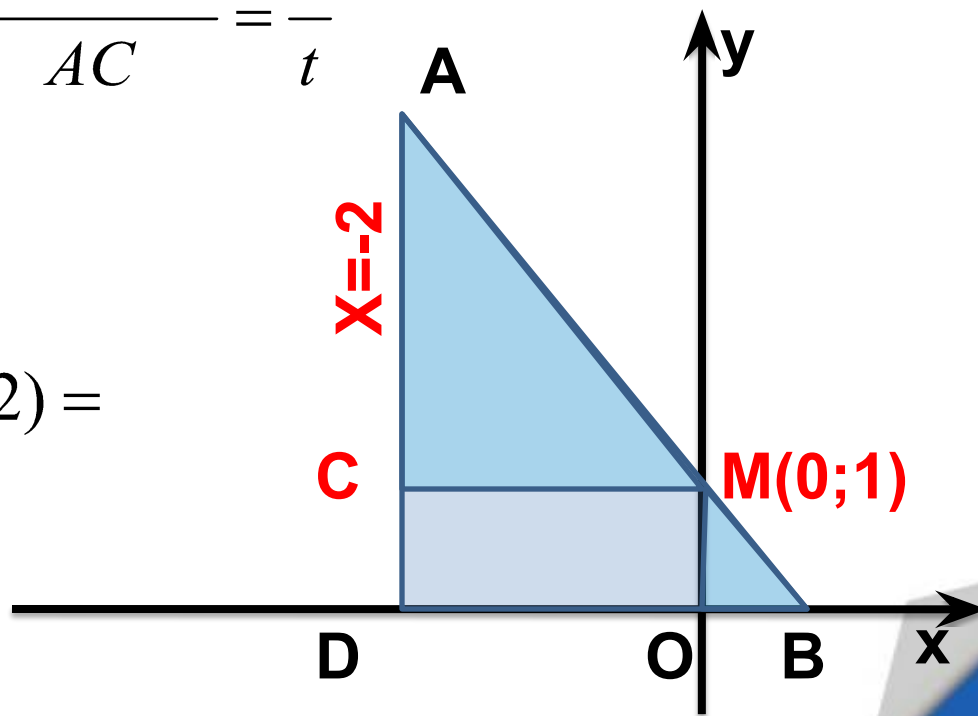
4) Из подобия треугольников  $ACM$  и  $MOB$  следует, что

$$\frac{AC}{MO} = \frac{MC}{BO} \Rightarrow BO = \frac{MC \cdot MO}{AC} = \frac{2}{t}$$

$$5) S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DB$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot (t+1) \cdot \left(\frac{2}{t} + 2\right) =$$

$$= t + \frac{1}{t} + 2$$



Дана прямоугольная система координат  $xOy$ . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка  $M(0;1)$ , а катеты лежат на прямых  $x = -2$  и  $y = 0$ .

продолжение

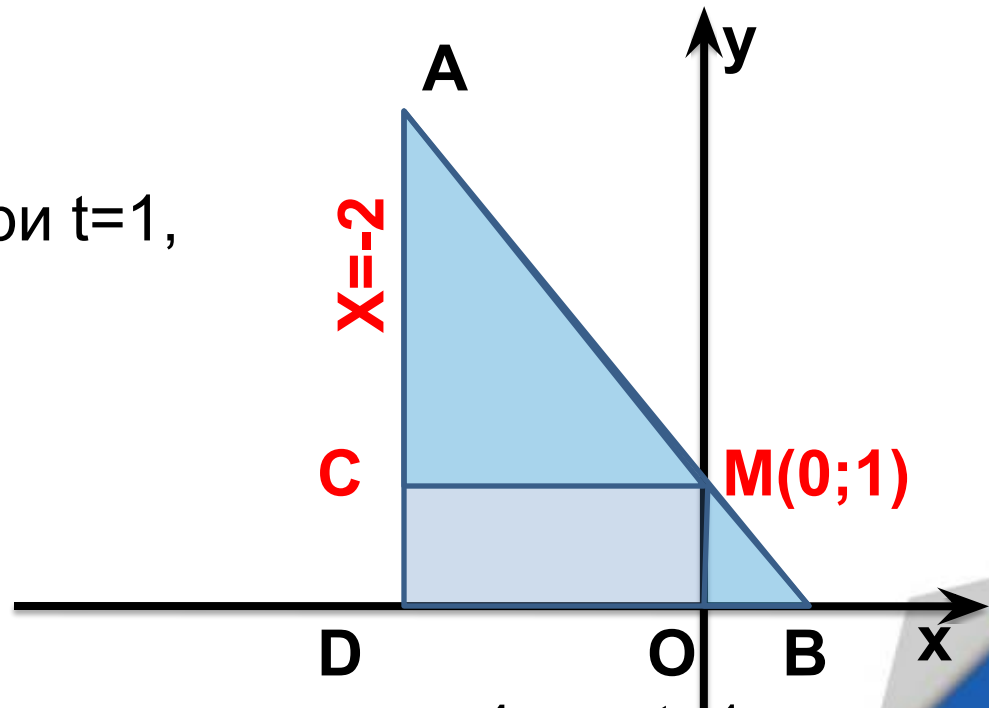
6) Так как для любого  $t > 0$  справедливо неравенство

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \quad \text{причем}$$

$$t + \frac{1}{t} = 2 \quad \text{только при } t=1,$$

то для  $t > 0$  функция

$$t + \frac{1}{t} + 2$$



24.11.2017 достигает наименьшего значения 4 при  $t=1$ .

Дана прямоугольная система координат  $xOy$ . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка  $M(0;1)$ , а катеты лежат на прямых  $x = -2$  и  $y = 0$ .

продолжение

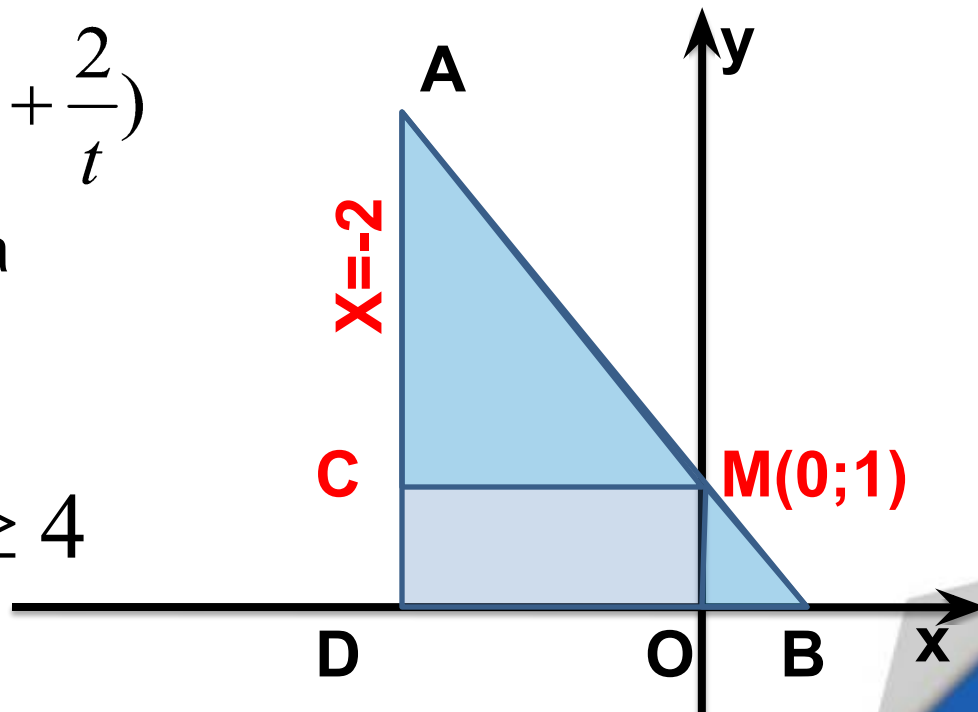
7) Заметим, что если в данной задаче обозначить  $OB=t$ , то аналогичными рассуждениями можно получить, что

$$S = t + \frac{4}{t} = 2\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right)$$

Тогда из неравенства

$$\frac{t}{2} + \frac{2}{t} \geq 2$$

следует, что  $S \geq 4$



Ответ:4

**Д/З:** п.5.9 – выучить; выучить алгоритм  
решить №№5.94\*, 5.95 + творческое задание  
(необязательное) Придумать прикладную задачу  
по пройденной теме.

- Какова схема исследования на  
наибольшее и наименьшее значение  
функции?



# Продолжите фразы:

- Сегодня на уроке я узнал...
- Сегодня на уроке я научился...
- Сегодня на уроке я познакомился...
- Сегодня на уроке я повторил...
- Сегодня на уроке я закрепил...



## ***Список использованных ресурсов и литературы***

1. Лукин Р.Д., Лукина Т.К., Янунина М.С. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. – М. Просвещение, 1989 г.
2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. – М.: Просвещение, 2008.
3. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. Дидактический материал. 11 кл.. – М.: Просвещение, 2009.
4. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. 11 кл. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2009.
5. Толстой Л.Н. Много ли человеку земли надо.

[http://images.yandex.ru/search?p=3&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=hiero.ru&img\\_url=en.hiero.ru%2Fpict%2F766%2F2137861.jpg&rpt=simage](http://images.yandex.ru/search?p=3&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=hiero.ru&img_url=en.hiero.ru%2Fpict%2F766%2F2137861.jpg&rpt=simage) (сколько земли 1)

[http://images.yandex.ru/search?p=8&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=feb-web.ru&img\\_url=feb-web.ru%2Ffeb%2Ftolstoy%2Fpictures%2FLEB-338.jpg&rpt=simage](http://images.yandex.ru/search?p=8&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=feb-web.ru&img_url=feb-web.ru%2Ffeb%2Ftolstoy%2Fpictures%2FLEB-338.jpg&rpt=simage) (сколько земли 2)

