



Задачи на максимум и минимум

11 класс Никольский С.М.



1. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением $I = 2t^2 - 5t$ (I – в амперах, t – в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в момент времени $t = 10$ сек.

Ответ: $v(t) = 4t - 5$ (А/с), $v(10) = 35$ (А/с)

2. Известно, что тело массой $m=5$ кг движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 + 2$ (S – путь в метрах, t – время в секундах). Найдите кинетическую энергию тела через 2 сек после начала движения.

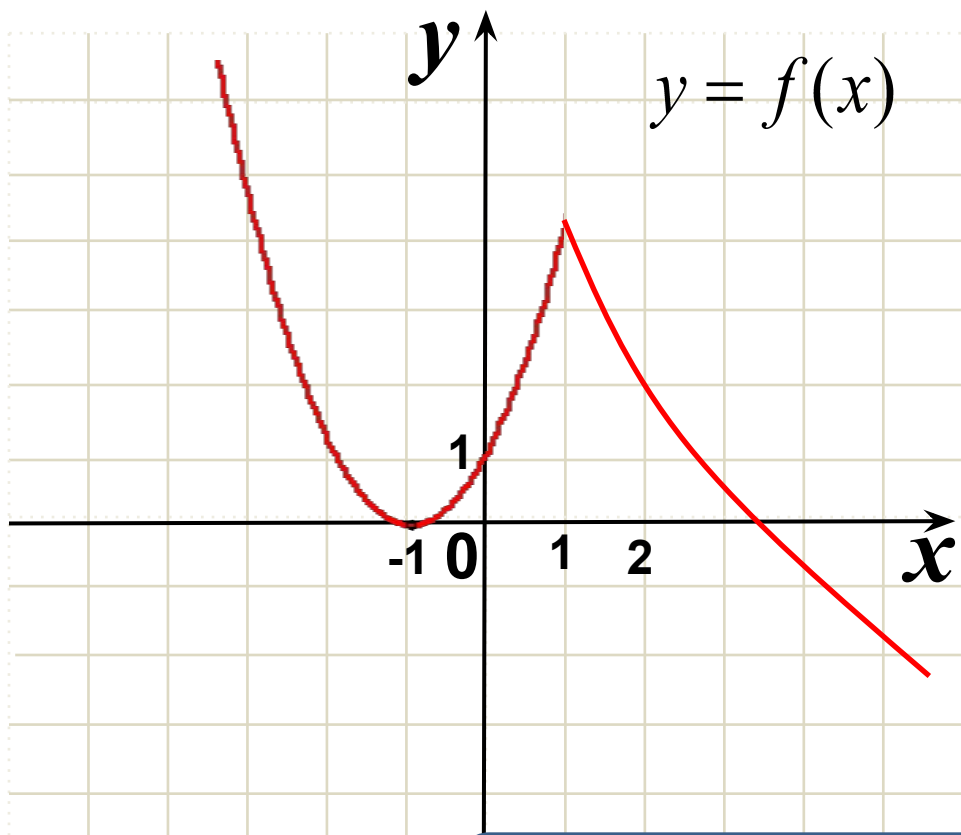
$$E = \frac{mv^2}{2}$$

$$v(t) = 2t \text{ (м/с)}$$

$$v(2) = 4 \text{ (м/с)}$$

$$E = \frac{5 \cdot 16}{2} = 40 \text{ (Дж)}$$





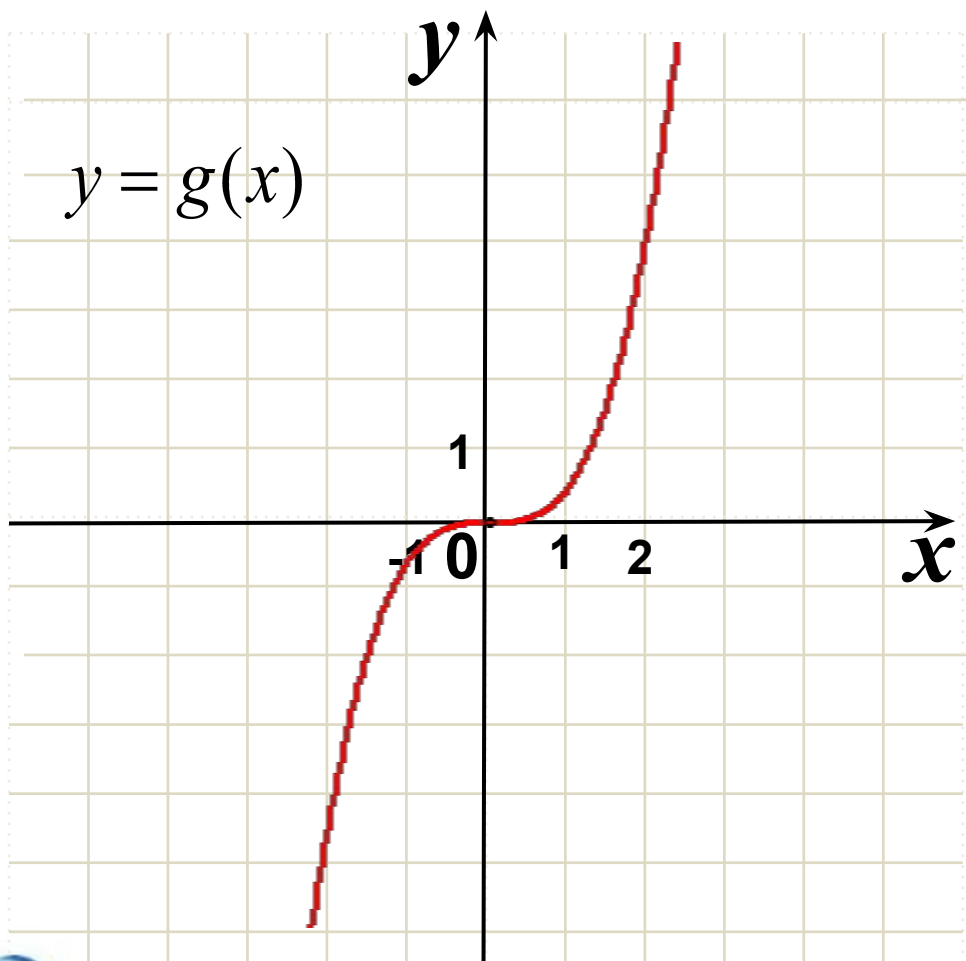
По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на \mathbb{R}

$$f'(x) > 0 \text{ на } (-1; 1)$$

$$f'(x) < 0 \text{ на } (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$



Ответ:

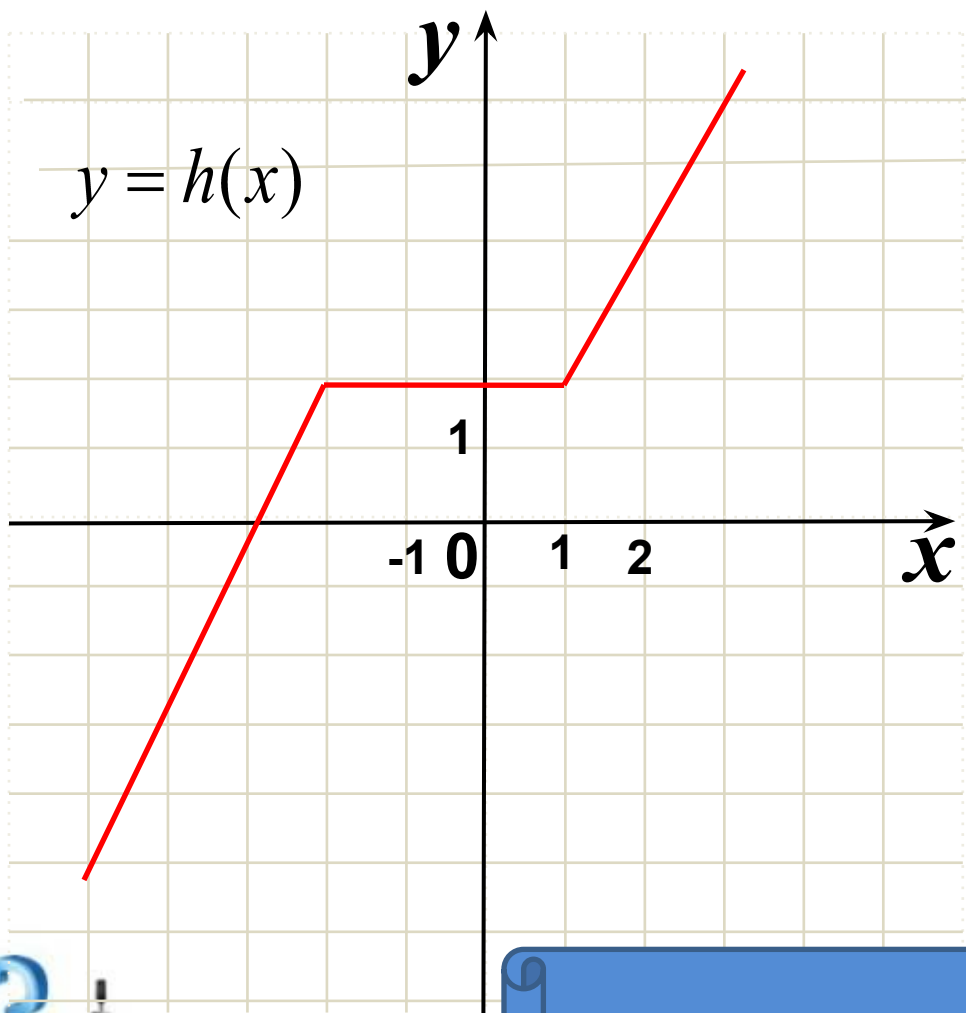


По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на \mathbb{R}



Ответ:

$$g'(x) > 0 \text{ на } (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$



По характеру изменения графика функции укажите, на каких промежутках производная положительна, на каких отрицательна. Каждая из функций определена на \mathbb{R}



Ответ:

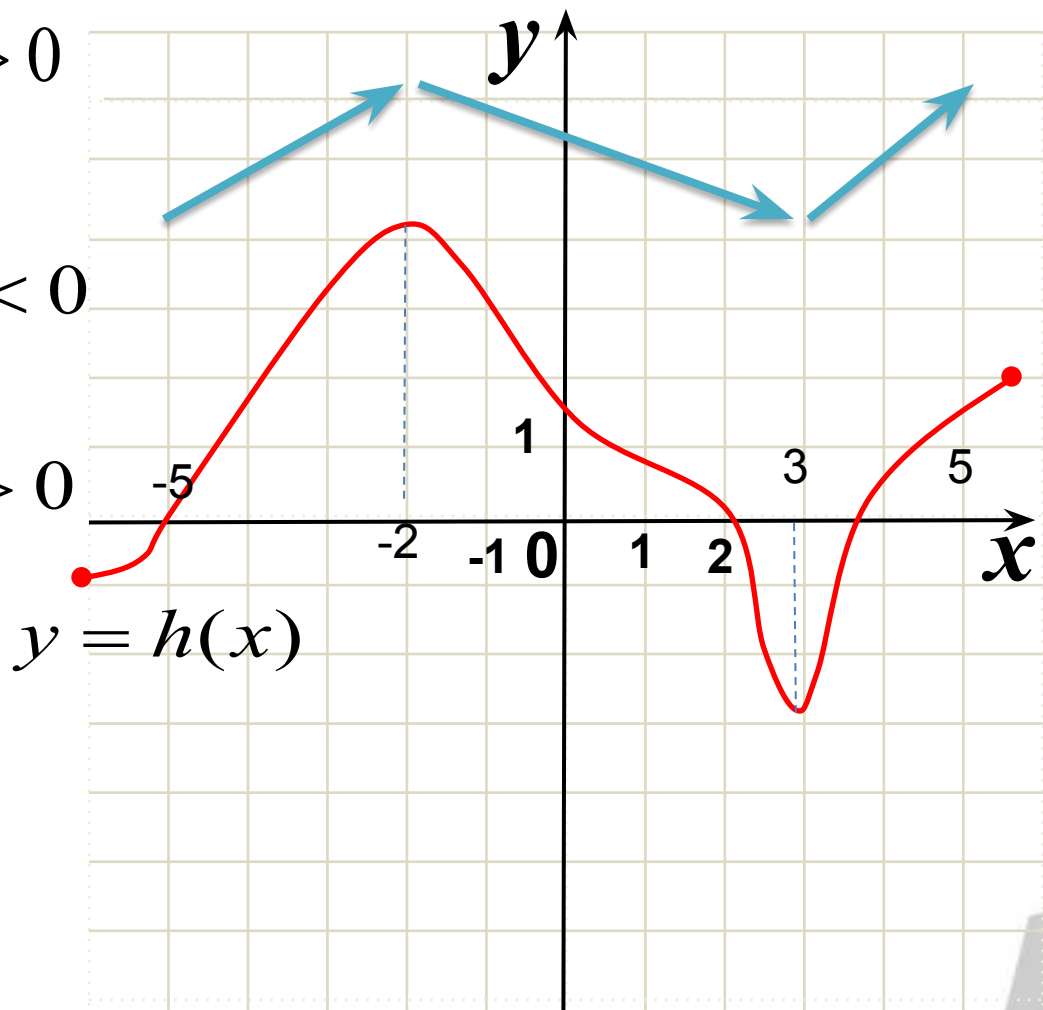
$$h'(x) > 0 \quad \text{на} \quad (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$

На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = h(x)$. Определите знак производной функции на промежутках

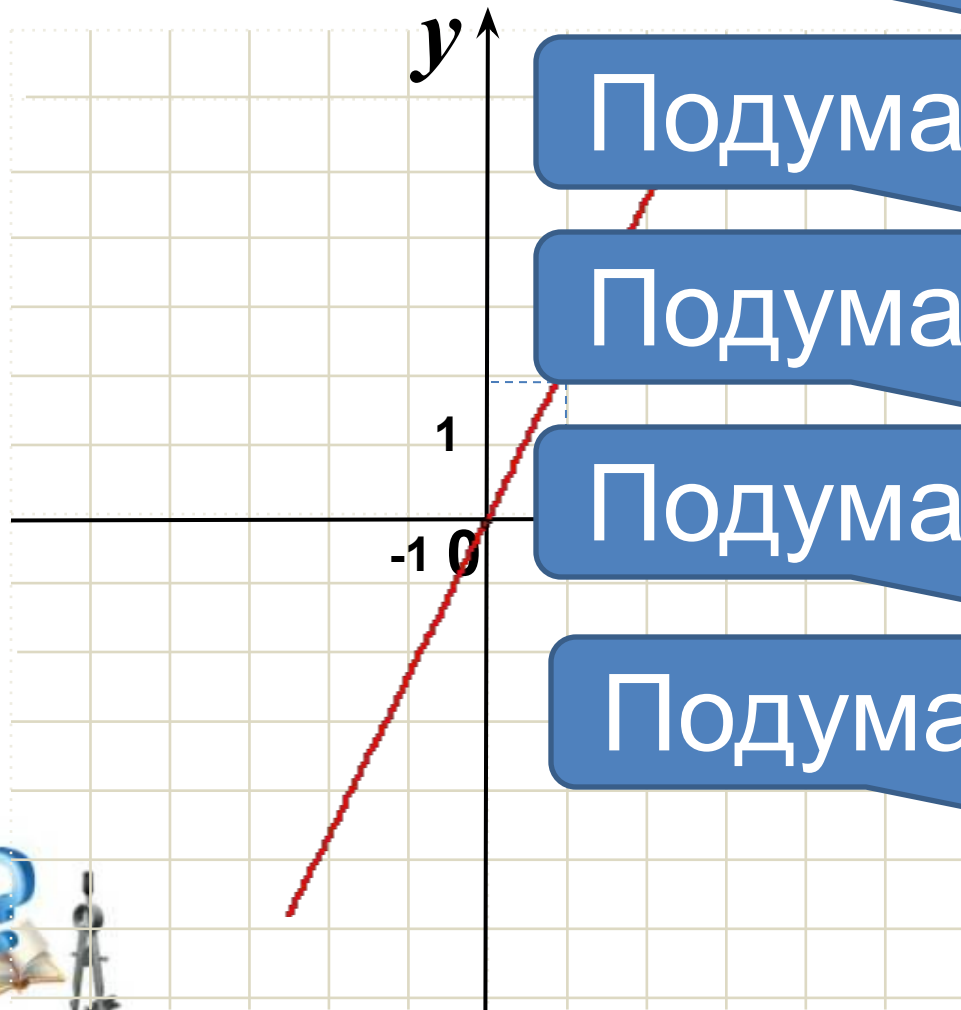
а) $[-5; -2)$ $h'(x) > 0$

б) $(-2; 3)$ $h'(x) < 0$

в) $(3; 5]$ $h'(x) > 0$



Дан график произведения двух непрерывных функций. Определите их.



Верно

Подумай

Подумай

Подумай

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

$$h(x) = \sin x$$

4

$$\varphi(x) = \cos x$$

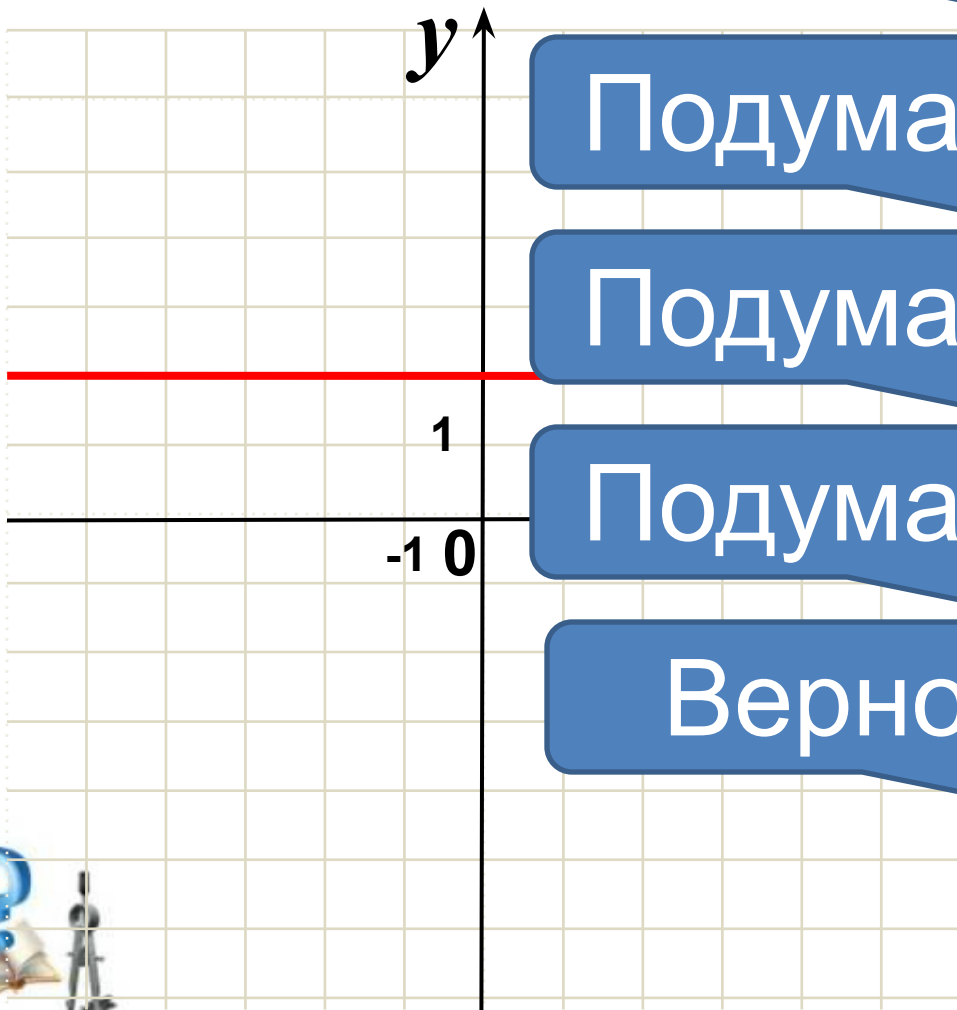
5

$$q(x) = 2x$$



Дан график произведения перечисленных функций. Определи

Подумай



Подумай

Подумай

Подумай

Верно

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

$$h(x) = \sin x$$

4

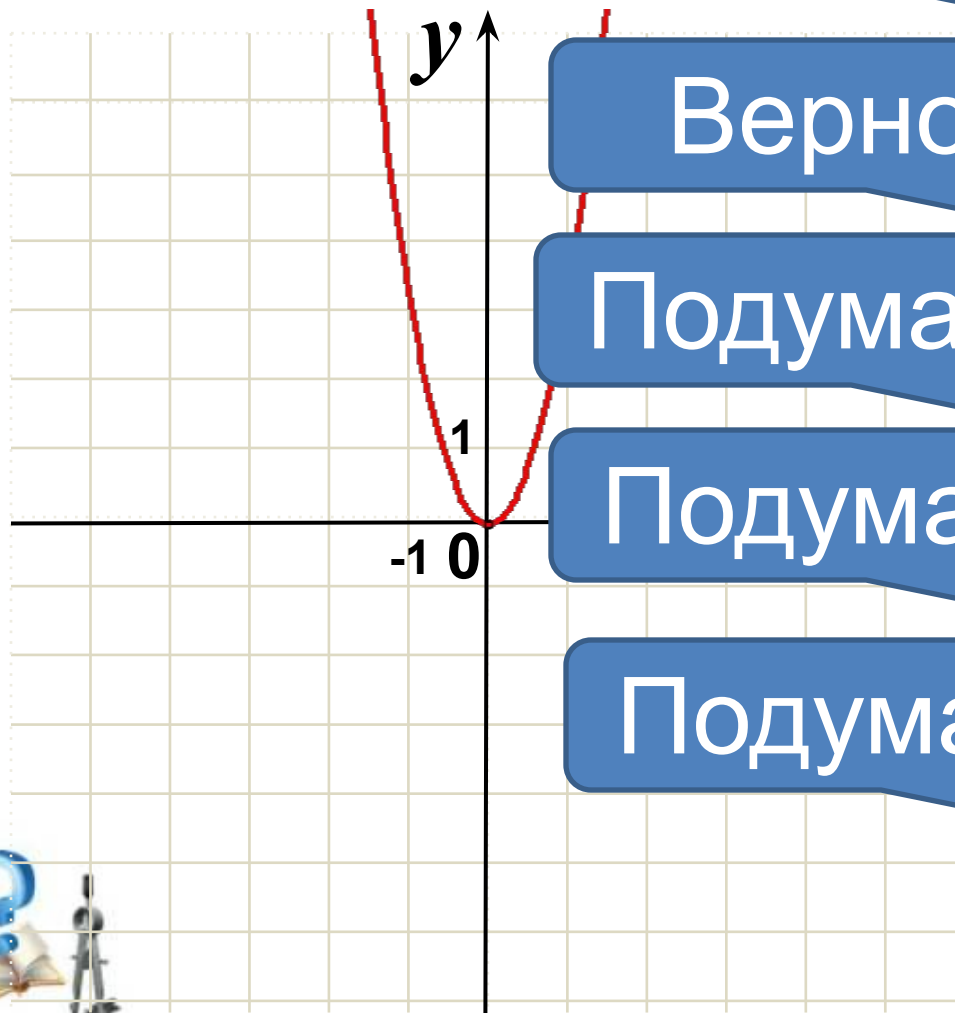
$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$



Дан график производной одной из перечисленных функций. Определите, какая из них.



Подумай

Верно

Подумай

Подумай

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

$$h(x) = \sin x$$

4

$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$



Дан график производной одной из перечисленных функций. Определите, какая из них.

Подумай

Подумай

Подумай

Верно

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

$$h(x) = \sin x$$

4

$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$



Дан график производной одной из перечисленных функций. Определите, какая из них.

Подумай

Подумай

Верно

Подумай

Подумай

1

$$f(x) = x^2$$

2

$$g(x) = x^3$$

3

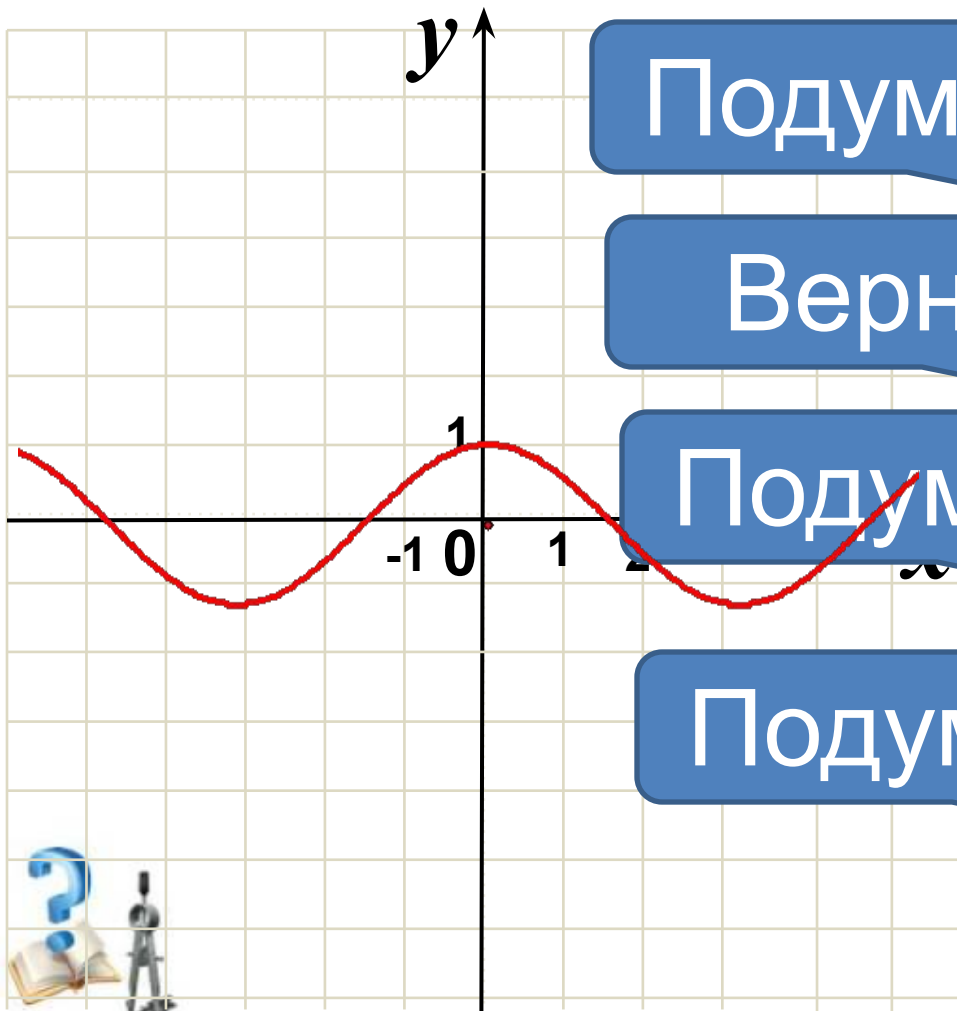
$$h(x) = \sin x$$

4

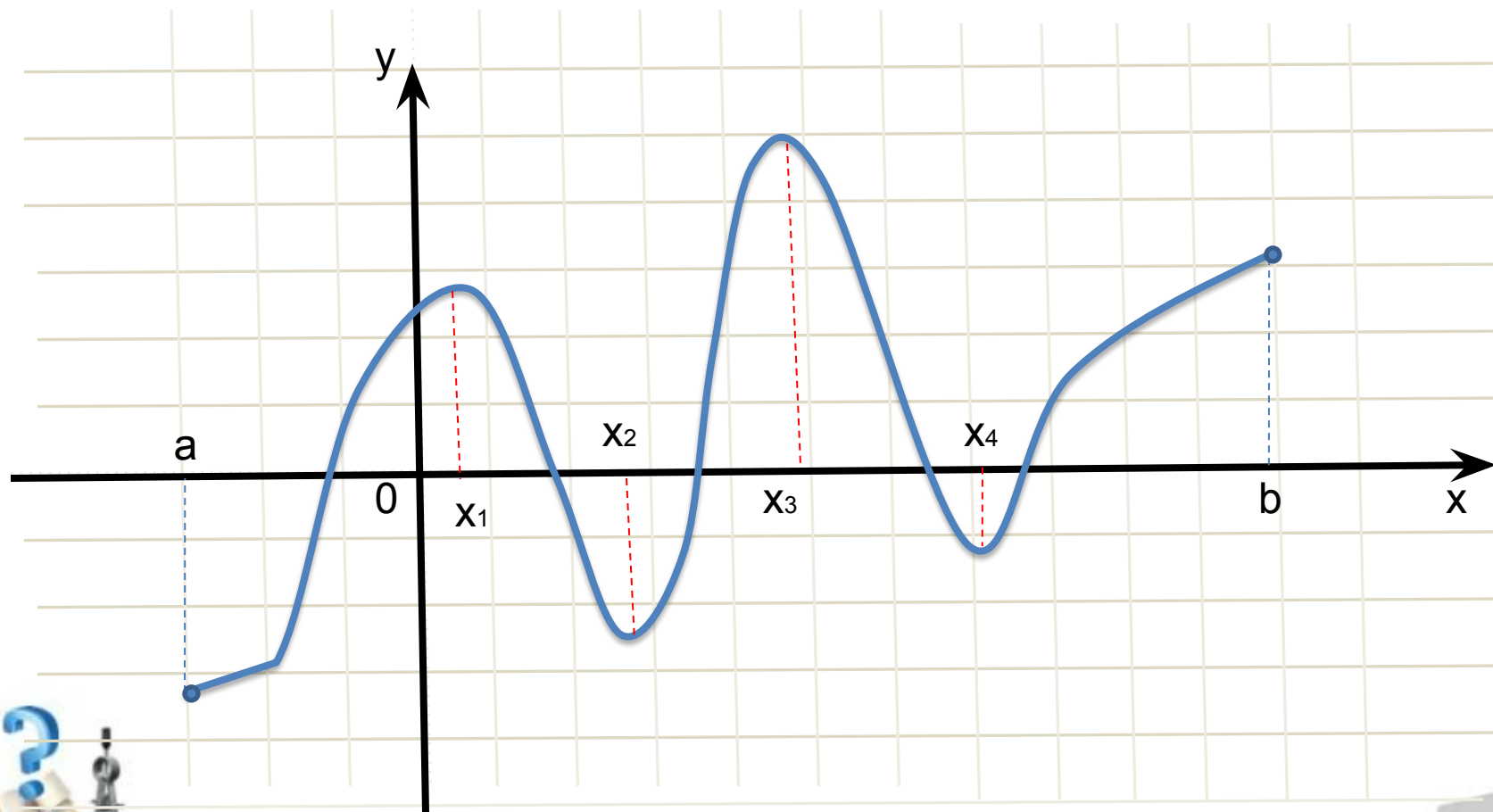
$$\varphi(x) = \cos x$$

5

$$q(x) = 2x$$

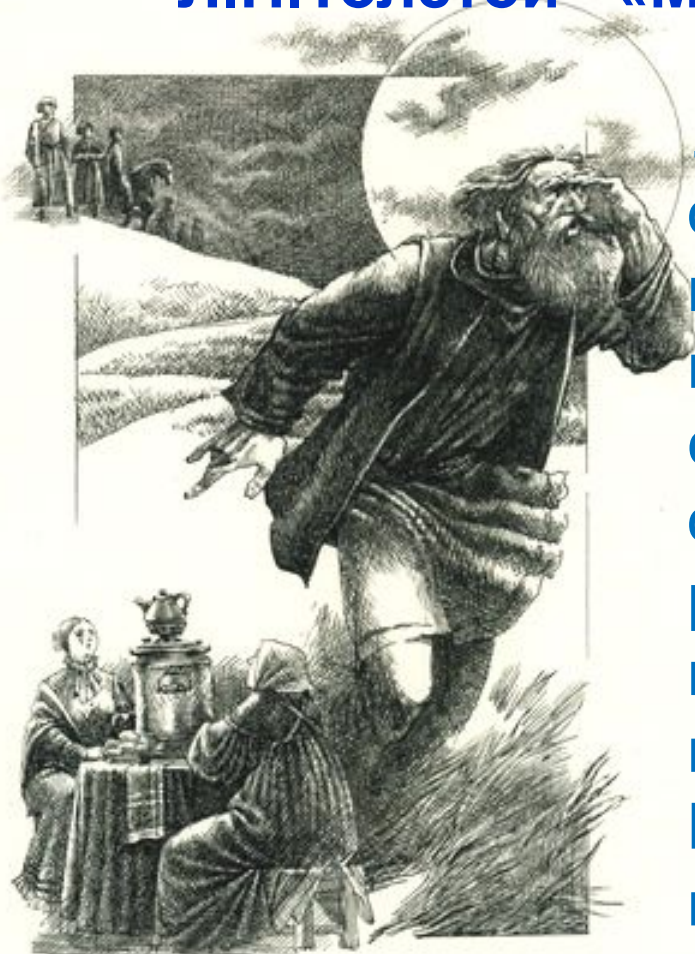


Функция $f(x)$ задана на $[a; b]$. Определите \max и \min функции, и точки локального экстремума на $[a; b]$.



Л.Н.Толстой «Много ли человеку земли надо?»

...Крестьянин Пахом очень мечтал о собственной земле и собрал он наконец, желанную сумму, предстал перед требованием старшины: «Сколько за день земли обойдешь, вся твоя будет за 1000 р. Но если к заходу солнца не возвратишься на место, с которого вышел, пропали твои деньги». Выбежал утром Пахом, прибежал на место и упал без чувств, обежав четырехугольник периметром 40 км.

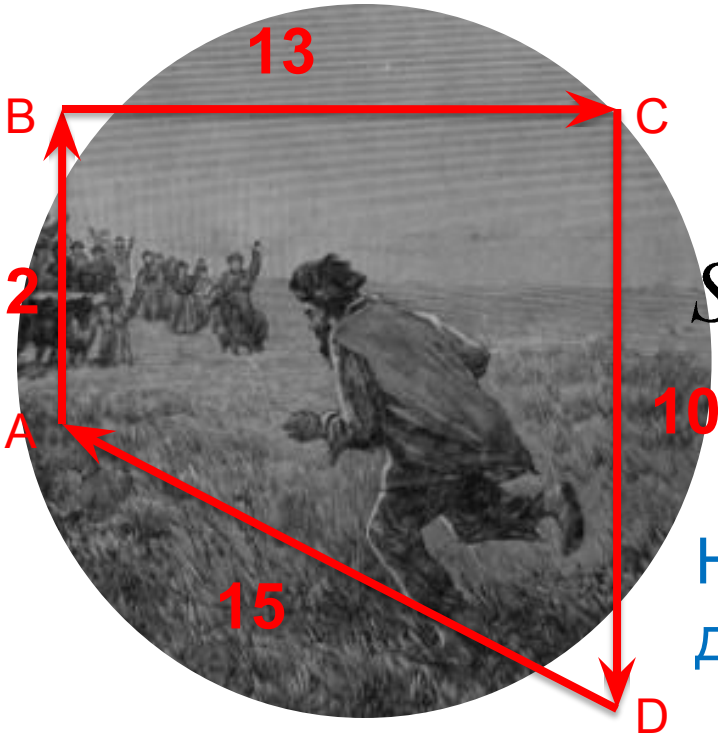


$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$P = 2 + 13 + 10 + 15 = 40 \text{ (км)}$$

$$S = \frac{2+10}{2} \cdot 13 = 6 \cdot 13 = 78 \text{ (км}^2\text{)}$$

Наибольшую ли площадь при данном периметре получил Пахом?



Начертите четырехугольник с периметром 40 км и наибольшей площадью

1 ряд

2 ряд

3 ряд



Составить таблицу для вычисления площадей прямоугольников с различными длинами

Периметр P	40	40	40	40	40	40
	1	2	5	6	8	10
Стороны a	19	18	15	14	12	10
b	19	36	75	84	96	100
Площадь S						

Вывод. Из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Пахом, например, мог бы пройти всего 36 км ($P = 9 \cdot 4 = 36$ км) и иметь участок площадью $S = 9 \cdot 9 = 81$ (кв.км)



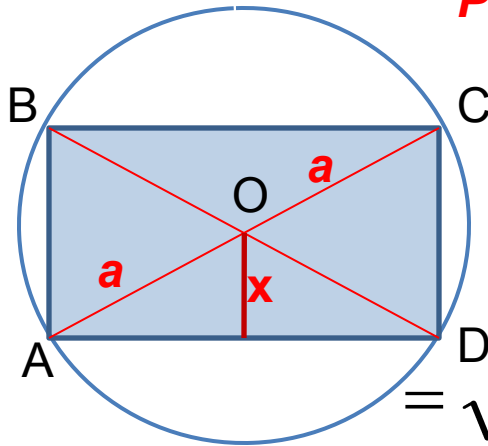
Схема исследования на наибольшее и наименьшее значения функции



1. Ввести переменную x , от значения которой зависит та величина, которая согласно условию задачи принимает наибольшее (наименьшее) значение;
2. Определить границы изменения переменной x – промежуток X ;
3. Выразить через x величину, которая согласно условию задачи принимает наибольшее (наименьшее) значение (получить функцию $f(x)$);
4. Рассмотреть функцию $f(x)$, заданную на X , найти ее критические точки, точки локального максимума (минимума);
5. Объяснить, почему в точке локального максимума (минимума) функция принимает наибольшее (наименьшее) значение;
6. Интерпретировать результаты исследования функции $f(x)$ с точки зрения решаемой задачи.



В круг радиуса a вписать прямоугольник наибольшей площади.



РЕШЕНИЕ

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$

$$1. \quad x = \frac{AB}{2}, \quad 0 < x < a$$

$$2. \quad AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} =$$

$$= \sqrt{(2a)^2 - (2x)^2} = \sqrt{4a^2 - 4x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$3. \quad S_{ABCD}(x) = AD \cdot CD = 2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 2x = 4x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$4. \quad S'(x) = (4x)' \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + 4x \cdot (\sqrt{a^2 - x^2})' =$$

$$= 4 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + 4x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

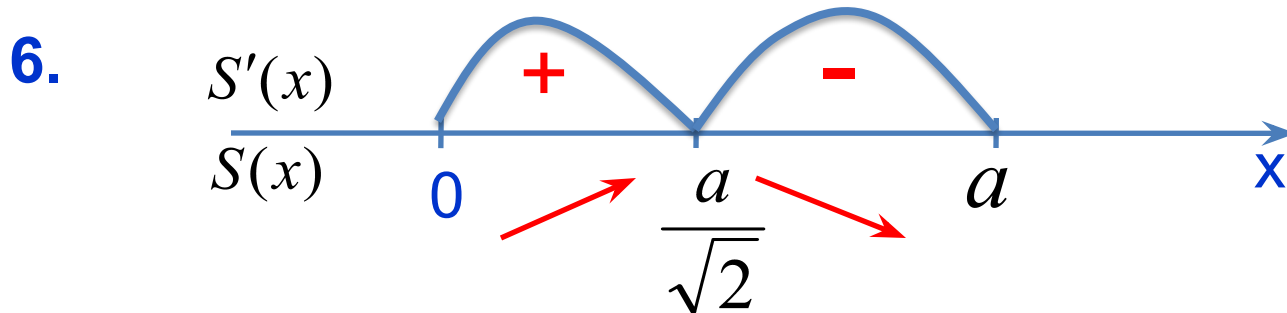
$$= \frac{4(a^2 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$



продолжение

$$S'(x) = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

5. $S'(x) = 0 \implies x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, где $\frac{a}{\sqrt{2}} \in (0; a)$

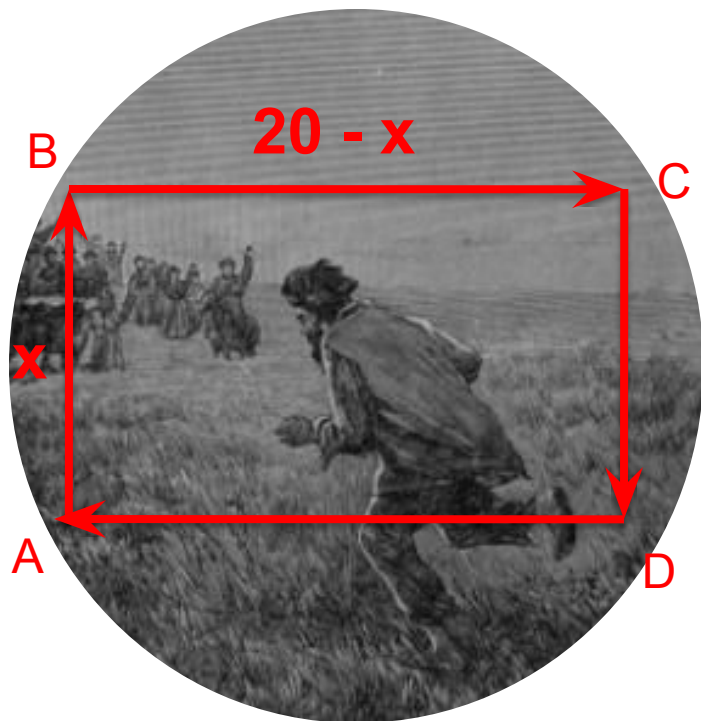


$$\max_{(0; a)} S(x) = S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2$$

Ответ: $2a^2$



Наибольшую ли площадь при данном периметре (40 км) получил Пахом?



$$\frac{P}{2} = 20 \quad 0 < x < 20$$

$$S(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$$

$$S'(x) = 20 - 2x$$

$$S'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 10$$

$$10 \in (0; 20)$$

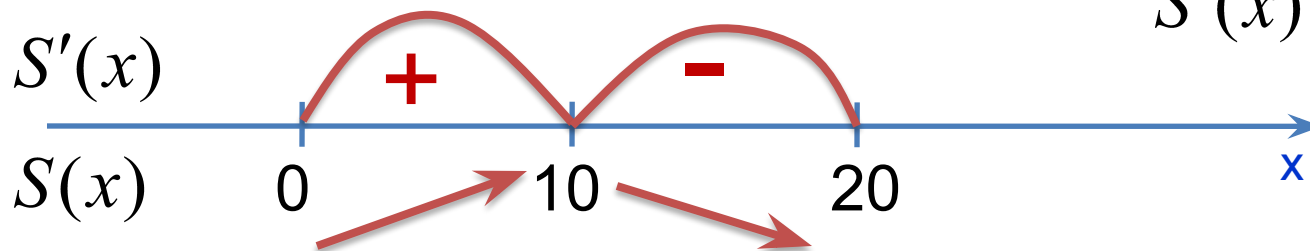


на интервале $(0; 20)$ функция имеет единственную критическую точку $x=10$

продолжение

$$S(x) = x \cdot (20 - x)$$

$$S'(x) = 20 - 2x$$



$$S'(5) = 20 - 10 > 0$$

$$S'(15) = 20 - 30 < 0$$

$$\max_{(0;20)} S(x) = S(10) = 100$$

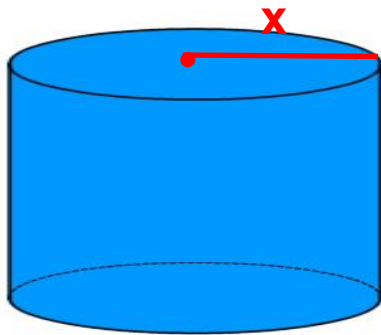


Если бы Пахом при $P=40$ км, пробежал бы по периметру квадрата, то площадь была бы больше и равна 100 кв.км

Задача 5.100

В некотором царстве, в некотором государстве подорожала жесть, идущая на изготовление консервных банок. Экономный хозяин фабрики рыбных консервов хочет выпускать свою продукцию в банках цилиндрической формы объемом V с наименьшими возможными затратами жести. Вычислите диаметр основания и высоту такой банки.

Решение



1. $x > 0, \quad S_{\text{осн}} = \pi x^2$

$$C_{\text{окр}} = 2\pi x$$

2. $V = \pi x^2 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{V}{\pi x^2}$

3. $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2}$



продолжение

$$S(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} \quad \text{на интервале } (0; +\infty)$$

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$$

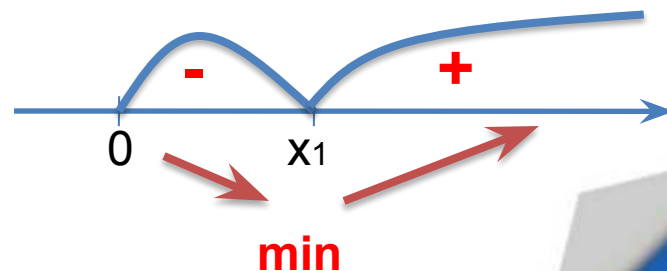
$$S'(x) = 0 \quad 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$$

$$4\pi x = \frac{2V}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

на интервале $(0; +\infty)$ функция имеет единственную критическую точку x_1



$$D = 2x = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

$$t = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Ответ: $D = t = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$



Дана прямоугольная система координат xOy . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а катеты лежат на прямых $x = -2$ и $y = 0$.

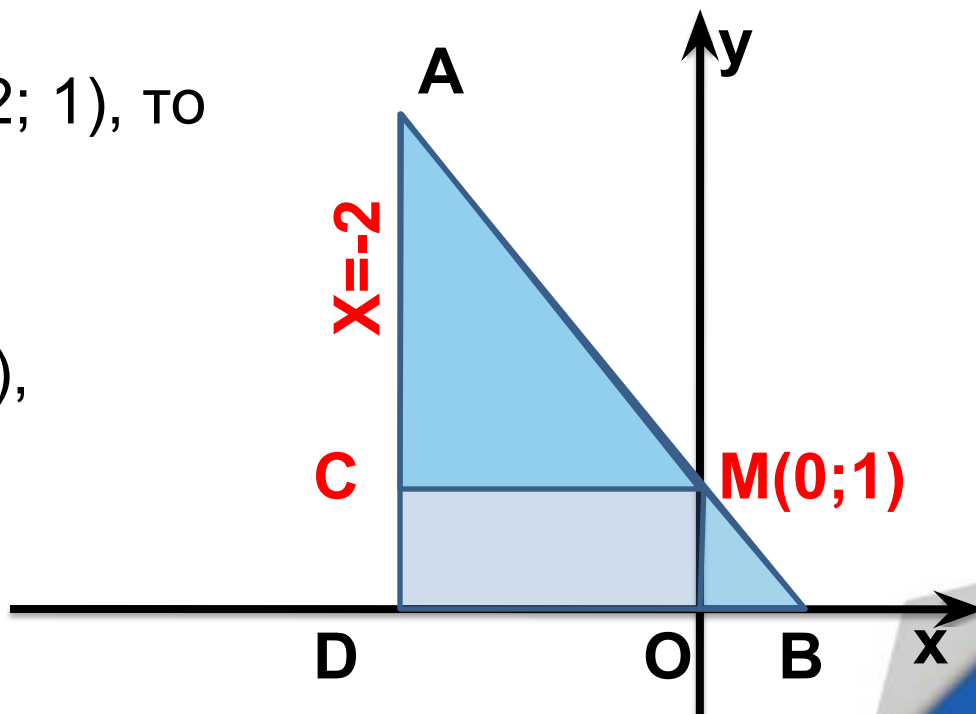
Решение

1) Изобразим один из возможных прямоугольных треугольников – треугольник ABD .

2) Так как $M(0;1)$ и $C(-2; 1)$, то $MO=1$, $OD=MC=2$.

3) Обозначим $AC=t$ ($t>0$),

тогда $\triangle ACM \sim \triangle MOB$
(по двум углам)



Дана прямоугольная система координат xOy . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а катеты лежат на прямых $x = -2$ и $y = 0$.

продолжение

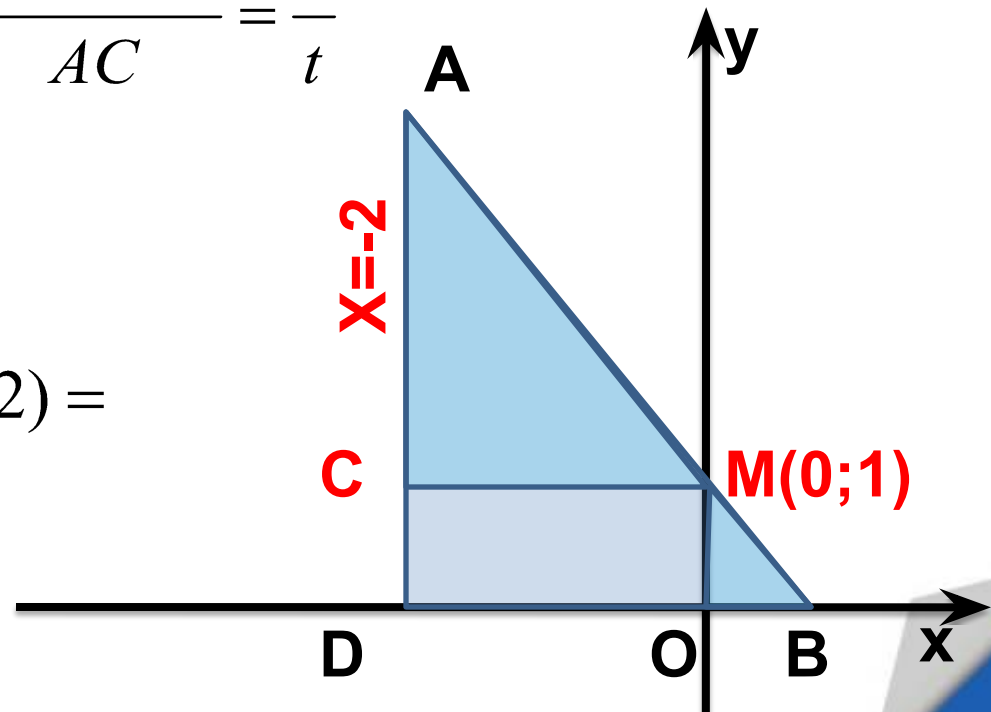
4) Из подобия треугольников ACM и MOB следует, что

$$\frac{AC}{MO} = \frac{MC}{BO} \Rightarrow BO = \frac{MC \cdot MO}{AC} = \frac{2}{t}$$

$$5) S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DB$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot (t+1) \cdot \left(\frac{2}{t} + 2\right) =$$

$$= t + \frac{1}{t} + 2$$



Дана прямоугольная система координат xOy . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а катеты лежат на прямых $x = -2$ и $y = 0$.

продолжение

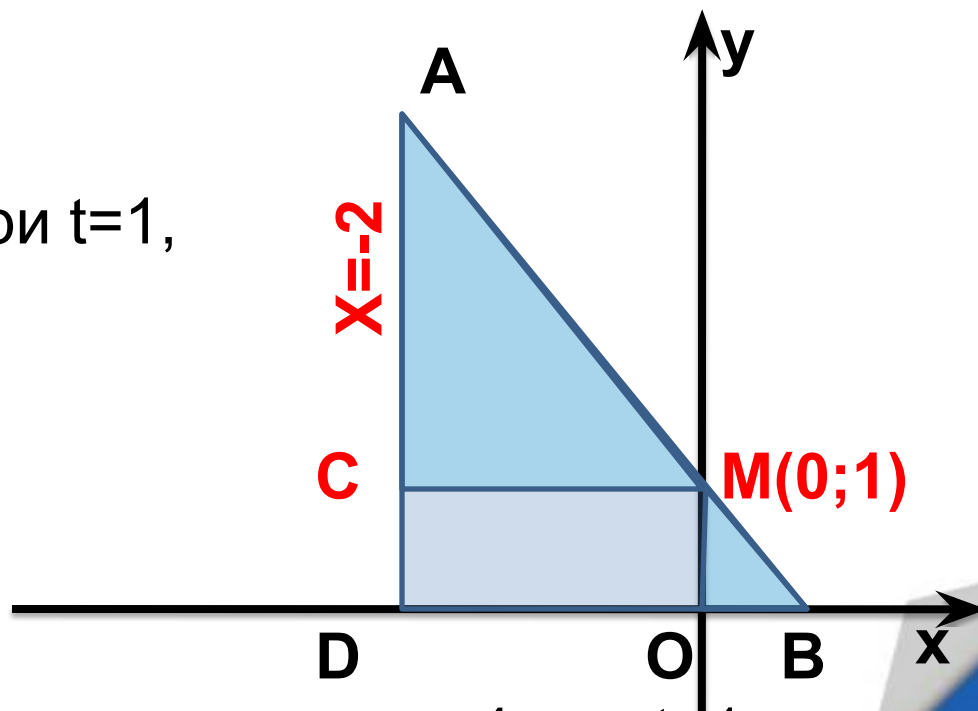
6) Так как для любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \quad \text{причем}$$

$$t + \frac{1}{t} = 2 \quad \text{только при } t=1,$$

то для $t > 0$ функция

$$t + \frac{1}{t} + 2$$



достигает наименьшего значения 4 при $t=1$.

Дана прямоугольная система координат xOy . Выяснить, какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а катеты лежат на прямых $x = -2$ и $y = 0$.

продолжение

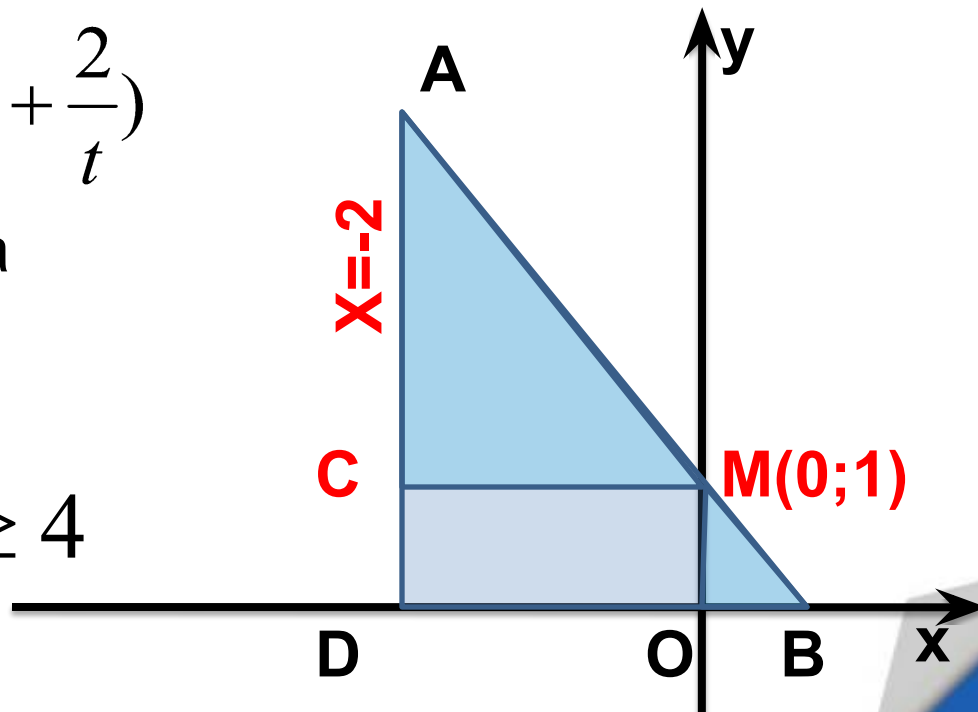
7) Заметим, что если в данной задаче обозначить $OB=t$, то аналогичными рассуждениями можно получить, что

$$S = t + \frac{4}{t} = 2\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right)$$

Тогда из неравенства

$$\frac{t}{2} + \frac{2}{t} \geq 2$$

следует, что $S \geq 4$



Ответ:4

Д/З: п.5.9 – выучить; выучить алгоритм
решить №№5.94*, 5.95 + творческое задание
(необязательное) Придумать прикладную задачу
по пройденной теме.

- Какова схема исследования на
наибольшее и наименьшее значение
функции?



Продолжите фразы:

- Сегодня на уроке я узнал...
- Сегодня на уроке я научился...
- Сегодня на уроке я познакомился...
- Сегодня на уроке я повторил...
- Сегодня на уроке я закрепил...



Список использованных ресурсов и литературы

1. Лукин Р.Д., Лукина Т.К., Янунина М.С. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. – М. Просвещение, 1989 г.
2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. – М.: Просвещение, 2008.
3. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. Дидактический материал. 11 кл.. – М.: Просвещение, 2009.
4. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. 11 кл. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2009.
5. Толстой Л.Н. Много ли человеку земли надо.

http://images.yandex.ru/search?p=3&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=hiero.ru&img_url=en.hiero.ru%2Fpict%2F766%2F2137861.jpg&rpt=simage (сколько земли 1)

http://images.yandex.ru/search?p=8&ed=1&text=%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BA%D0%BE%20%D0%B7%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B4%D0%BE%20%D1%87%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%83%20%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B9%20%D0%9B.%D0%9D.&spsite=feb-web.ru&img_url=feb-web.ru%2Ffeb%2Ftolstoy%2Fpictures%2FLEB-338.jpg&rpt=simage (сколько земли 2)

