Лекция 19

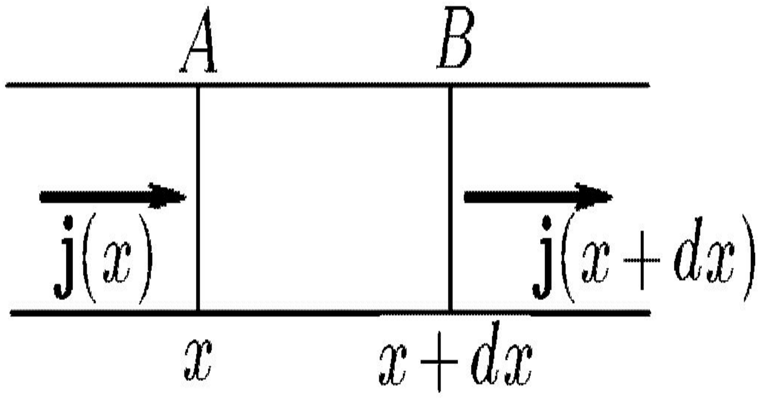
Теплопроводность.
Вязкость
Диффузия

Уравнение теплопроводности

- Этот раздел посвящен элементам теории теплопроводности. Основы этой теории были заложены французским математиком Фурье (1768-1830) в первой четверти XIX века.
- Плотностью потока теплоты называется вектор *j*, совпадающий по направлению с направлением распространения теплоты и численно равный количеству теплоты, проходящему в одну секунду через площадку в один квадратный метр, перпендикулярную к направлению потока теплоты.

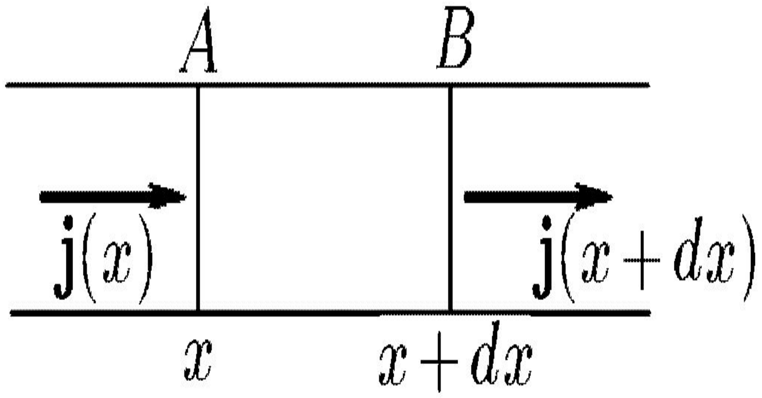
Уравнение теплопроводности

- Пусть имеется неограниченная среда, в которой возникает поток теплоты в направлении, параллельном оси *X*.
- Выделим мысленно в среде цилиндр с образующими, параллельными оси *X*, и рассмотрим бесконечно малый участок такого цилиндра *AB* длины *dx*



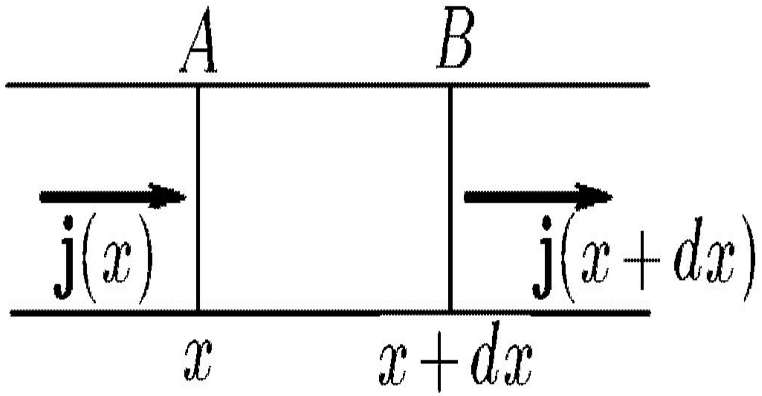
Уравнение теплопроводности

- Количество теплоты, поступающее в цилиндр *AB* за время *dt* через основание *A* с координатой *x*, равно *j(x)Sdt*.
- Количество теплоты, уходящее за то же время через основание *B*, будет *j(x + dx)Sdt*.
- Полное количество теплоты, поступающее за время *dt* через рассматриваемый участок цилиндра, равно
-
    - $[j(x) - j(x + dx)]Sdt = -\frac{\partial j}{\partial x}Sdxdt.$
-



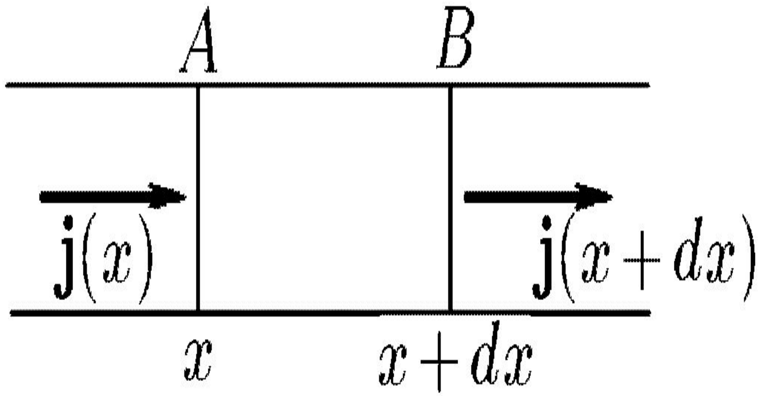
Уравнение теплопроводности

- Эту теплоту можно представить в виде
    - $dM\ cv\ dT$,
- где $dM = \rho S\ dx$ – элемент массы цилиндра AB,
- c_v – удельная теплоемкость,
- dT – повышение температуры.
- Приравнивая оба выражения и производя сокращение, получим
-
    - $\rho c_V \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}.$



Уравнение теплопроводности

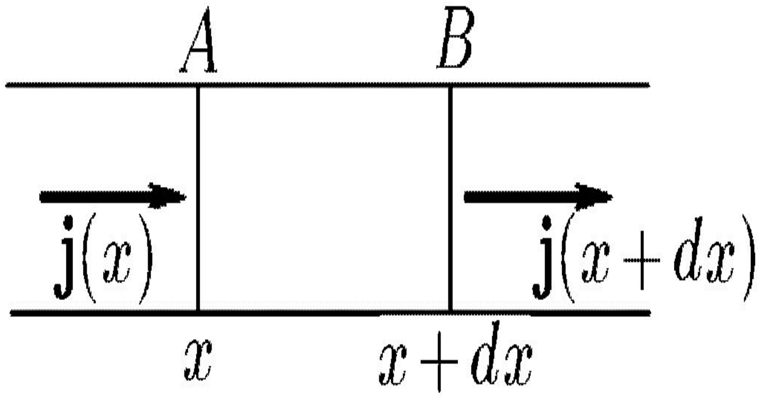
- В лекции 18 мы получили для потока тепла следующее выражение
-
- $j = -\frac{1}{3}\frac{nc_V}{N_A}\lambda\langle v\rangle\frac{dT}{dx}.$
- Если это выражение подставить в предыдущую формулу
-
- $\rho c_V\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}\frac{nc_V}{N_A}\lambda\langle v\rangle\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)$



Уравнение теплопроводности

- В среде могут оказаться источники теплоты.
- Чтобы их учесть, введем величину q, равную количеству теплоты, выделяемому источниками в единице объема среды в одну секунду.
- Тогда вместо уравнения следует писать
-

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + q$$

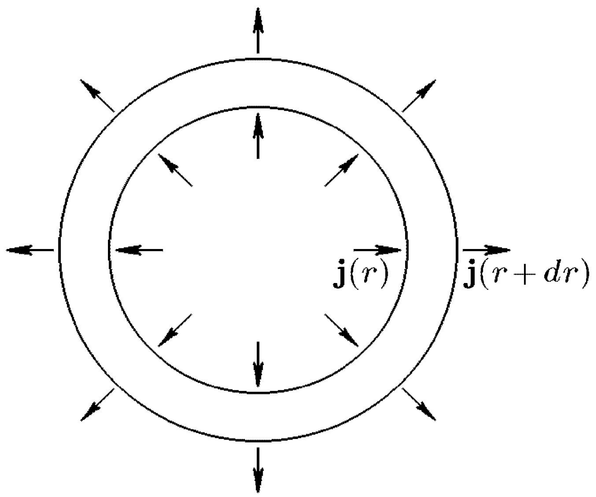


Уравнение теплопроводности

- В общем случае, когда свойства и температура среды зависят от всех трех пространственных координат *x, y, z*, уравнение теплопроводности, выражающее баланс теплоты в теле, имеет вид
-
- $$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\left[\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} + \frac{\partial j}{\partial z}\right] + q.$$
- Однако решения такого уравнения аналитически можно получить только в простейших случаях.
- Наиболее важными являются случаи, когда среда и распределение температуры в ней обладают сферической или цилиндрической симметрией.

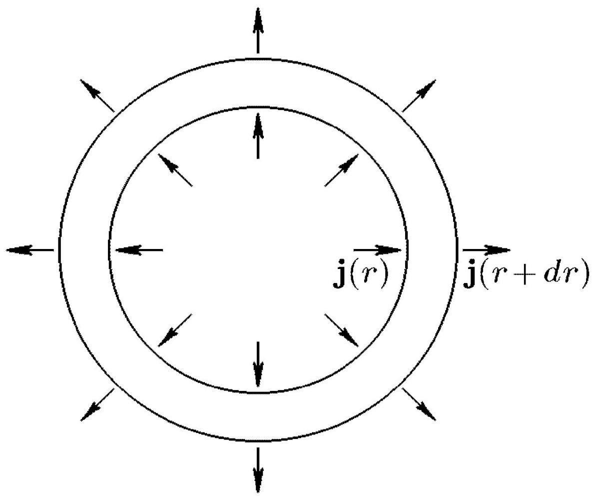
Уравнение теплопроводности

- Рассмотрим сначала случай сферической симметрии
- Опишем вокруг центра симметрии две концентрические сферы с радиусами r и $r + dr$
- Количество теплоты, поступающее за время dt в пространство между этими сферами через первую из них, равно $j(r)\cdot 4\pi r^2 dt$.
- Количество теплоты, вытекающее за то же время через вторую сферу, будет. $j(r + dr) \cdot 4\pi(r + dr)^2 dt$.



Уравнение теплопроводности

- Разность между ними
-
- $4\pi\left[\left(jr^2\right)_r - 4\pi\left(jr^2\right)_{r+dr}\right]dt = -4\pi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j\right)drdt$
-
- дает количество теплоты, втекающее за время *dt* в рассматриваемый сферический слой из окружающего пространства.
- При наличии источников сюда надо добавить количество теплоты
-
  - $4\pi q r^2 drdt,$



Уравнение теплопроводности

- Изменение количества теплоты в слое можно представить в виде $\rho 4\pi r^2 dr c_V dT$.
- Поэтому уравнение баланса теплоты будет
- $$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j\right) + q.$$
- $j = -\kappa\, \partial T/\partial r$, так что
- $$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + q.$$

Уравнение теплопроводности

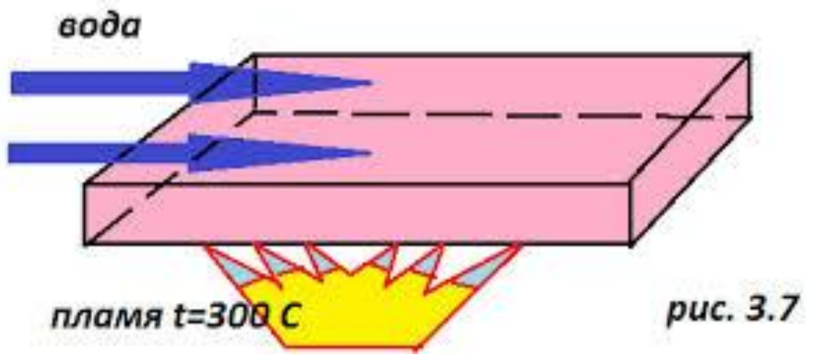
- Аналогичные рассуждения проводятся и в случае цилиндрической симметрии.
- Понимая теперь под *r* расстояние до оси симметрии, получим
- $$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rj) + q$$
- $$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + q.$$

Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Допустим, что имеется бесконечная пластинка толщины *l*, поверхности которой поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2-
- Требуется найти распределение температуры *T* внутри такой пластинки. Примем за ось *X* прямую, перпендикулярную к пластинке. Начало координат поместим на плоскости *1*, ограничивающей пластинку.

Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Теплопроводность зависит от температуры следующим образом
-
- $\kappa = \frac{1}{3}\frac{nc_V}{N_A}\lambda\langle v\rangle = \frac{1}{3}\frac{nc_V}{N_A}\lambda\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = C\sqrt{T},$
-
- где C – константа. Уравнение теплопроводности переходит в
-
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0.$



Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Заменой переменных $T' = T^{3/2}$ уравнение сводится к виду
- $$\frac{d^2T'}{dx^2} = 0.$$
- Интегрируя, получим
- $$T' = Ax + B$$

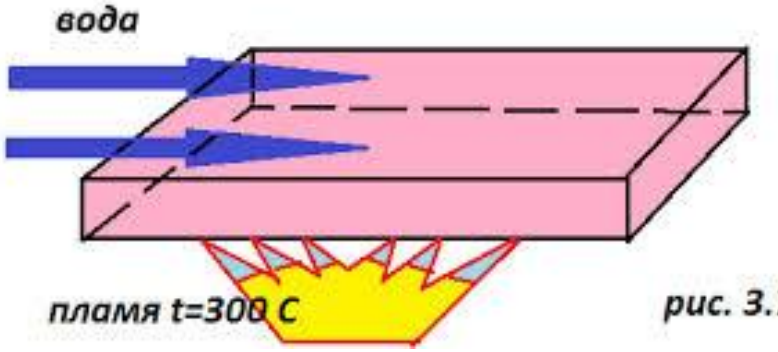
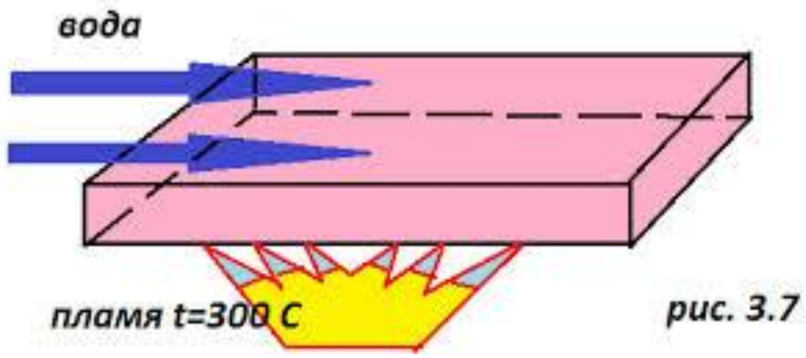


рис. 3.7

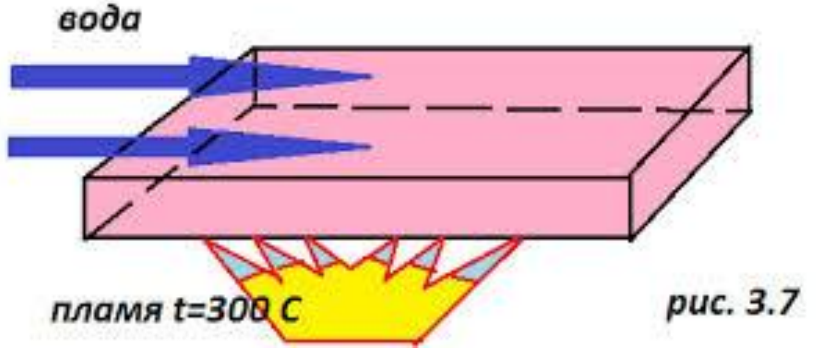
Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Постоянные *A* и *B* определяются из граничных условий.
- При *x = 0* должно быть $T' = T'_1$
- а при *x = l* $T' = T'_2$.
- Это приводит к системе уравнений
-
- $T'_1 = B,\ \ T'_2 = Al + B.$



Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Определив из нее постоянные A и B, и проведя обратную замену переменных, найдем распределение температуры:
- $$T = \left(\frac{T_2^{3/2} - T_1^{3/2}}{l} x + T_1^{3/2} \right)^{2/3}$$



Распределение температуры между двумя концентрическими сферами

- Обозначим радиус внутренней сферы через r_1, а внешней – r_2.
- $\frac{d}{dr}\left(r^2\sqrt{T}\frac{dT}{dr}\right) = 0.$
-
- Применим такую же, как в предыдущем разделе замену переменных $T^{'} = T^{3/2}$. В итоге получаем уравнение
-

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT^{'}}{dr}\right) = 0$$

Распределение температуры между двумя концентрическими сферами

- Его решением является выражение

$$T' = \frac{A}{r} + B.$$

- Постоянные интегрирования A и B определятся из значений, которые принимает температура T на границах сферического слоя.
  - $T'_1 = \frac{A}{r_1} + B, \quad T'_2 = \frac{A}{r_2} + B.$
- Решая ее и делая обратную замену переменных, получим распределение температуры между сферами
  - $T = \left(\frac{r_2 T_2^{3/2} - r_1 T_1^{3/2}}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_2 \left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2} \right)}{r(r_2 - r_1)} \right)^{2/3}.$

Стационарное распределение температуры между двумя цилиндрами.

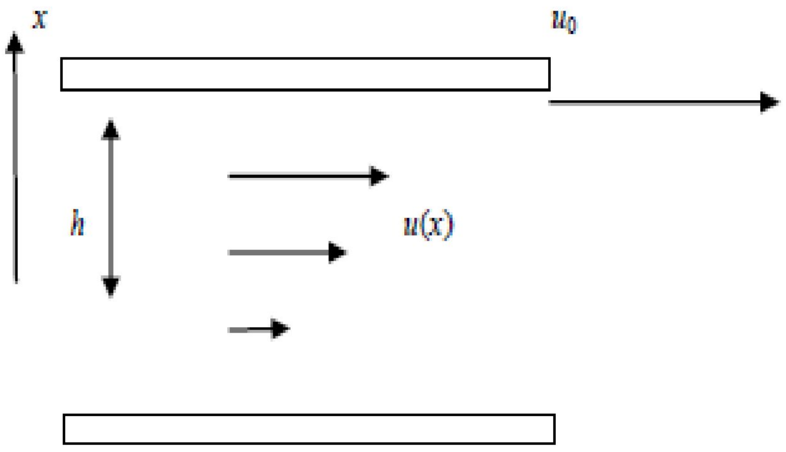
- Радиус внутреннего цилиндра обозначим через r_1, внешнего – r_2. Температуры их поддерживаются при постоянных значениях T_1 и T_2.
- Если среда между цилиндрами однородна, то получается
- $$T = \left(\frac{T_1^{3/2} \ln r_2 - T_2^{3/2} \ln r_1}{\ln\left({}^{r_2}/_{r_1}\right)} + \frac{T_2^{3/2} - T_1^{3/2}}{\ln\left({}^{r_2}/_{r_1}\right)} \ln r \right)^{2/3}$$

Течение вязкой жидкости

- Для потока импульса (вязкость) было получено выражение:
-
- $$\Pi = -\eta \frac{du}{dx},$$
-
- где η - коэффициент вязкости.

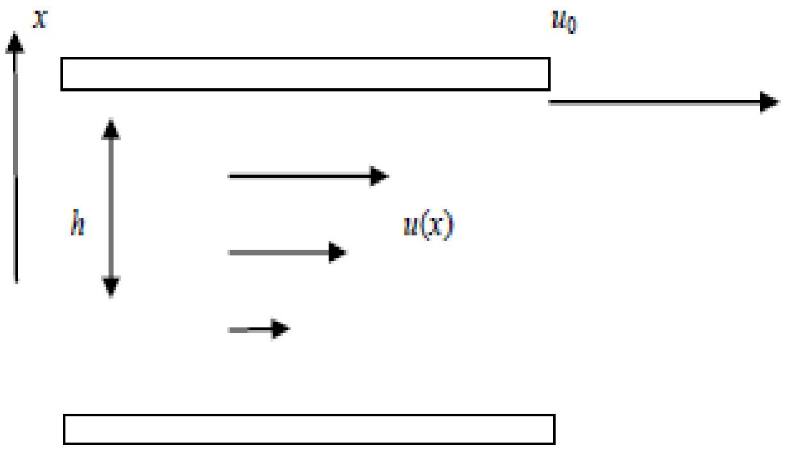
Течение вязкой жидкости

- Пусть между двумя параллельными твердыми пластинами с расстоянием h между ними находится жидкость с вязкостью η.
- Пусть нижняя пластина покоится, а верхняя движется со скоростью u_0.



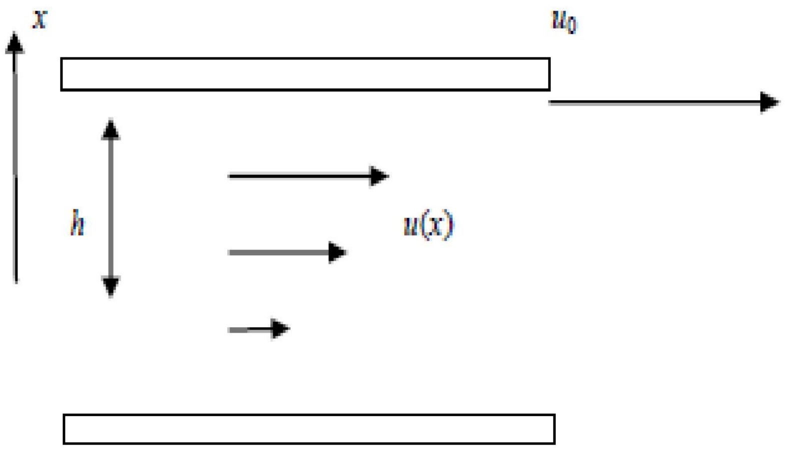
Течение вязкой жидкости

- В равновесии силы, действующие на некоторый выбранный слой сверху и снизу равны. Это означает, что для данной задачи
-
  - $$\frac{du(x)}{dx} = const.$$
-
- Решением этого уравнения с указанными начальными условиями $u(0) = 0, (u(h) = u_0$ является линейное изменение скорости *u* с координатой
-
  - $$u(x) = \frac{u_0}{h}x.$$



Течение вязкой жидкости

- При этом напряжение силы трения, действующая на 1 см^2 поверхности каждой из твердых плоскостей
  - $\Pi = \frac{u_0 \eta}{h}$.
- Эта величина пропорциональна скорости верхней плоскости u_0 и обратно пропорциональна расстоянию между плоскостями.



Формула Пуазейля

- Рассмотрим течение жидкости по цилиндрической трубе радиуса R и длины L. На концах трубы поддерживаются различные давления p_1 и p_2, за счет перепада которых и происходит движение жидкости.
- Скорость $u(r)$ течения жидкости направлена везде вдоль оси трубы и зависит от расстояния r от оси. Для напряжения силы трения справедливо выражение
-
- $\Pi = -\eta \frac{du(r)}{dr}.$

Формула Пуазейля

- Рассмотрим объем жидкости, ограниченный проведенной внутри трубы коаксиальной с ней цилиндрической поверхностью некоторого радиуса *r*. Сила трения, действующая на рассматриваемый объем жидкости определяется умножением напряжения *П* и площади поверхности $2\pi rL$:
-

- $2\pi rL\Pi = -2\pi rL\eta \frac{du(r)}{dr}.$

Формула Пуазейля

- Данная сила трения, действующая на рассматриваемый объем жидкости, компенсируется силой, возникающей из-за перепада давлений, действующих у оснований цилиндра, которая равна $\pi r^2 \Delta p$. Приравнивая эти силы, получим уравнение
- $$\frac{du(r)}{dr} = -\frac{r}{2L\eta}\Delta p.$$

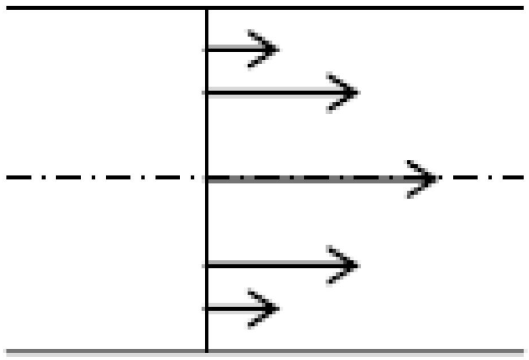
Формула Пуазейля

- Отсюда
- $u(r) = -\frac{r^2}{2L\eta}\Delta p + const.$
-
- Постоянная в этом решении определяется из условия равенства нулю скорости на поверхности трубы, т.е. при *r* = *R*. Отсюда
-

$$u(r) = \frac{r^2}{2L\eta}\Delta p(R^2 - r^2).$$

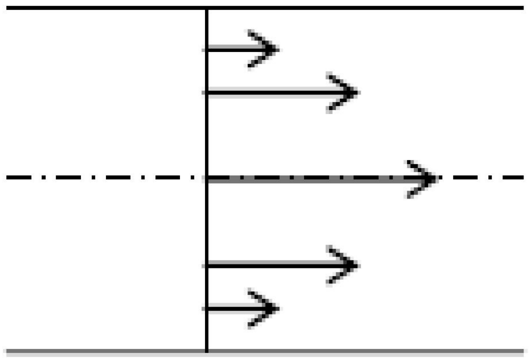
Формула Пуазейля

- Скорость меняется по квадратичному закону от нуля на стенке до максимального значения ($u_{\text{макс}} = R^2 \Delta p / 4L\eta$) на оси трубы (говорят о параболическом профиле скоростей)



Формула Пуазейля

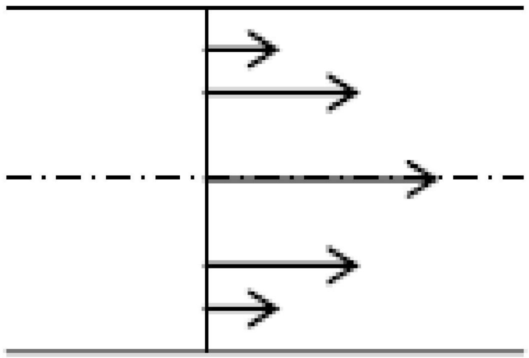
- Определим объем жидкости, вытекающей из трубы в единицу времени.
- Выделим два коаксиальных цилиндра с радиусами *r* и *r* + *dr*.
- Тогда объем этой жидкости, вытекающий за единицу времени есть
- $$dV(r) = u(r)2\pi r dr$$



Формула Пуазейля

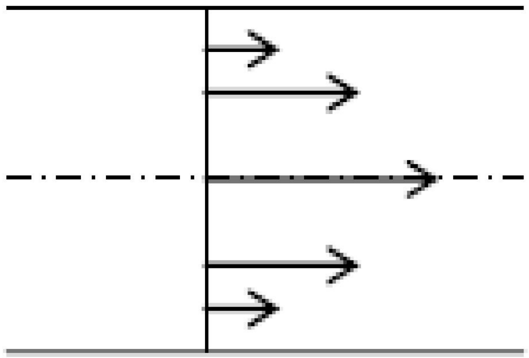
- Отсюда
- $dV(r) = u(r)2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p}{2L\eta}(R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi \Delta p}{4L\eta}(R^2 - r^2) d(r^2).$
-
- После интегрирования получаем:
-

$$V(r) = \frac{\pi \Delta p}{4L\eta}\left(R^2 r^2 - \frac{r^4}{2}\right).$$



Формула Пуазейля

- . Полный объем жидкости, вытекающей из трубы за 1 сек, есть значение при $r = R$
-
- $$V(R) = \frac{\pi \Delta p}{8L\eta} R^4$$
- Эта формула называется формулой Пуазейля. Согласно этой формуле, объем вытекающей из трубы жидкости пропорционален разности давлений, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален вязкости.

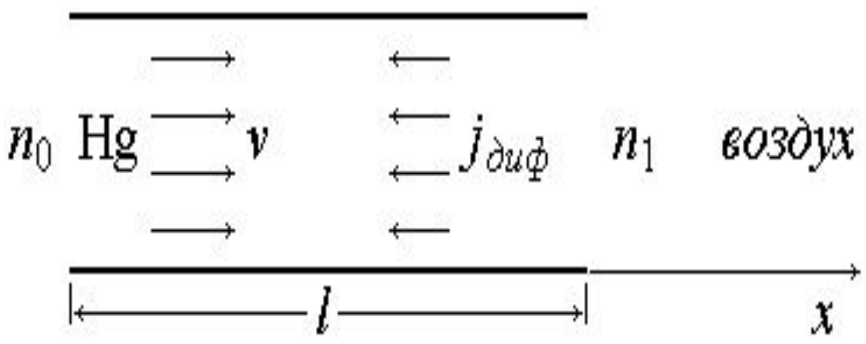


Уравнение диффузии и его применение

- В лекции 18 для потока молекул (диффузия) было получено следующее выражение:
- $$j = -D\frac{dn}{dx}.$$
-

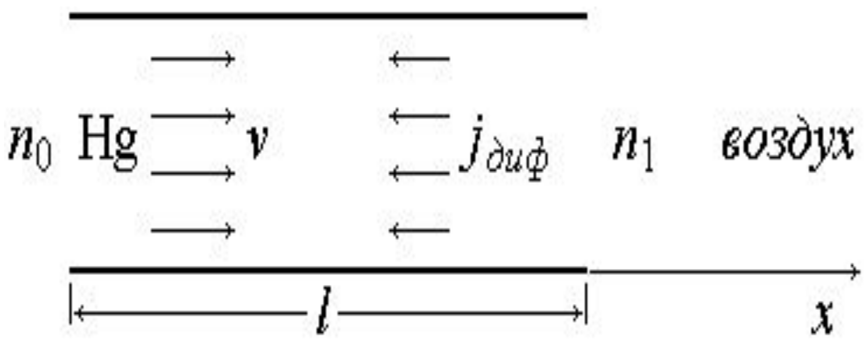
Уравнение диффузии и его применение

- В качестве примера применения этого уравнения, рассмотрим следующую задачу.
- По трубке длиной *l* слева направо текут пары ртути, а навстречу им идет диффузионный поток откачиваемого газа (воздуха)



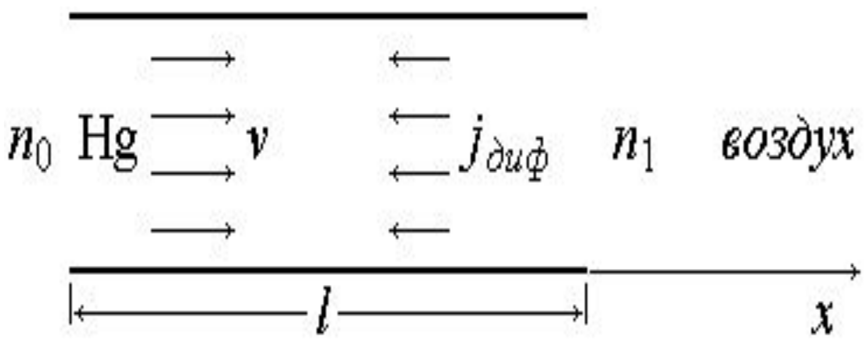
Уравнение диффузии и его применение

- Найдем скорость прокачки ртути, при которой концентрация молекул воздуха будет меняться на длине трубки от n_1 до n_0



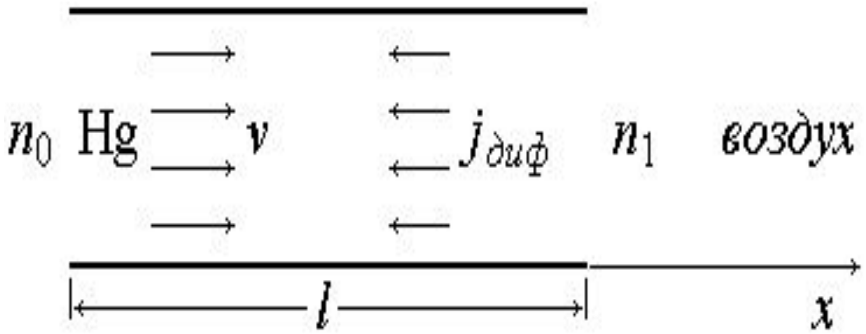
Уравнение диффузии и его применение

- Молярный вес воздуха равен 29 г/моль, для ртути он составляет 200 г/моль, т.е. на порядок больше. Поэтому в струе паров ртути происходит передача импульса диффундирующим молекулам воздуха.



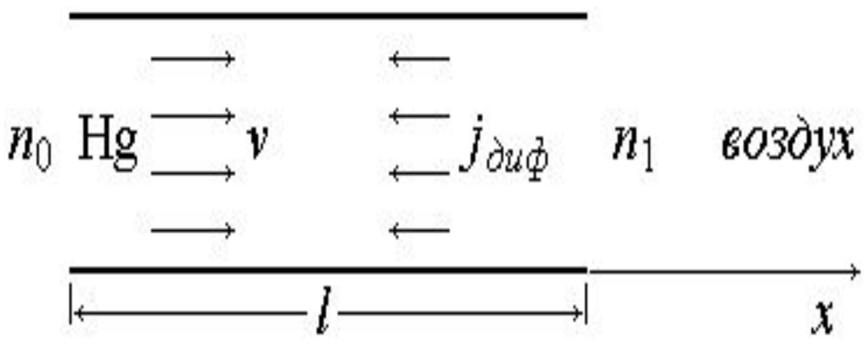
Уравнение диффузии и его применение

- В результате имеем конвективный поток воздуха j_k со скоростью *v* паров ртути
  - $j_k = nvS.$
- и встречный диффузионный поток j_D молекул воздуха
  - $j_D = -D\frac{dn}{dx}S,$
- где *n* – концентрация молекул воздуха, *D* – коэффициент диффузии воздуха, *S* – площадь поперечного сечения трубки.



Уравнение диффузии и его применение

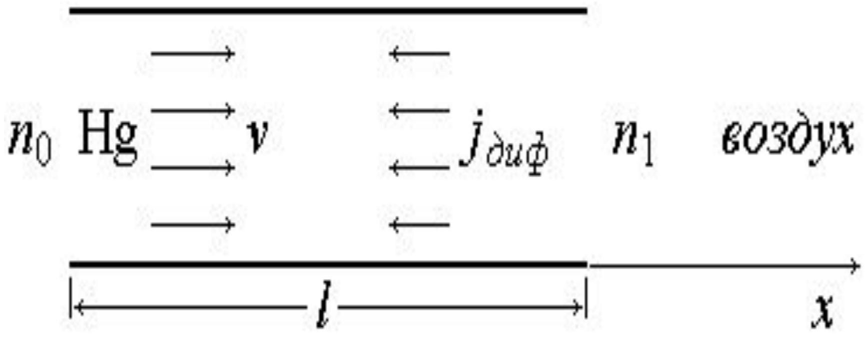
- Воздух не доходит до левого конца трубки. Следовательно, его суммарный поток равен нулю:
-
- $j_k + j_D = nvS - D\dfrac{dn}{dx}S = 0.$
-



Уравнение диффузии и его применение

- Для решения дифференциального уравнения имеются два условия
- $x = 0 \ \rightarrow n = n_0,$
- $x = l \rightarrow n = n_1.$
- В итоге получаем выражение
-

$$v = \frac{D}{l} ln \frac{n_1}{n_0}$$



Уравнение диффузии и его применение

- Этот процесс имеет практическое применение в технике высокого вакуума.
- В 1901 г. русский физик П.Н. Лебедев проводил эксперименты с использованием вакуумных установок. В его установках для достижения высокого вакуума использовался модифицированный ртутный поршневой насос, где остаточные молекулы газа захватывались парами ртути и откачивались вместе с ними. Идея использовать пары ртути для удаления остаточного газа привлекла внимание многих ученых.

Успеха на экзаменах!