

Лекция 19

Теплопроводность.

Вязкость

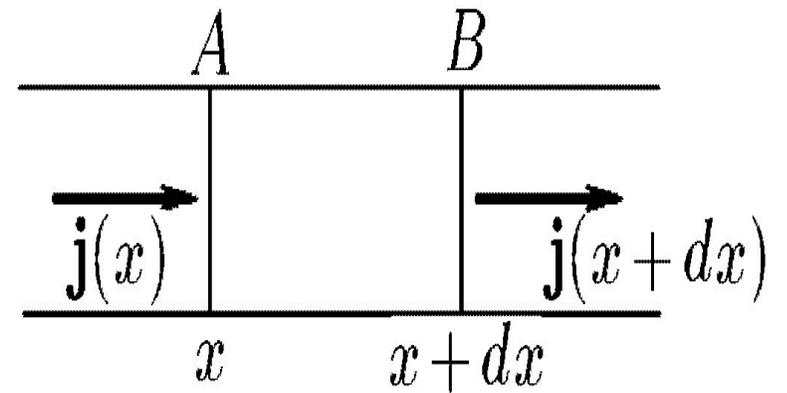
Диффузия

Уравнение теплопроводности

- Этот раздел посвящен элементам теории теплопроводности. Основы этой теории были заложены французским математиком Фурье (1768-1830) в первой четверти XIX века.
- Плотностью потока теплоты называется вектор j , совпадающий по направлению с направлением распространения теплоты и численно равный количеству теплоты, проходящему в одну секунду через площадку в один квадратный метр, перпендикулярную к направлению потока теплоты.

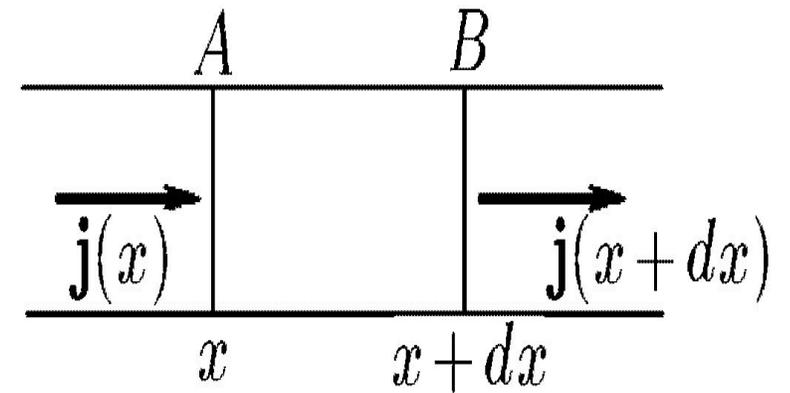
Уравнение теплопроводности

- Пусть имеется неограниченная среда, в которой возникает поток теплоты в направлении, параллельном оси X .
- Выделим мысленно в среде цилиндр с образующими, параллельными оси X , и рассмотрим бесконечно малый участок такого цилиндра AB длины dx



Уравнение теплопроводности

- Количество теплоты, поступающее в цилиндр AB за время dt через основание A с координатой x , равно $j(x)Sdt$.
- Количество теплоты, уходящее за то же время через основание B , будет $j(x + dx)Sdt$.
- Полное количество теплоты, поступающее за время dt через рассматриваемый участок цилиндра, равно



- $[j(x) - j(x + dx)]Sdt = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx dt.$

Уравнение теплопроводности

- Эту теплоту можно представить в виде

- $dM c_v dT,$

- где $dM = \rho S dx$ – элемент массы цилиндра $AB,$

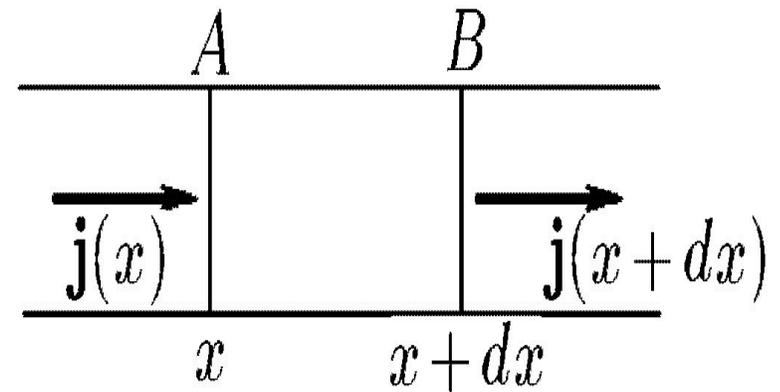
- c_v – удельная теплоемкость,

- dT – повышение температуры.

- Приравнявая оба выражения и производя сокращение, получим

-

- $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}.$



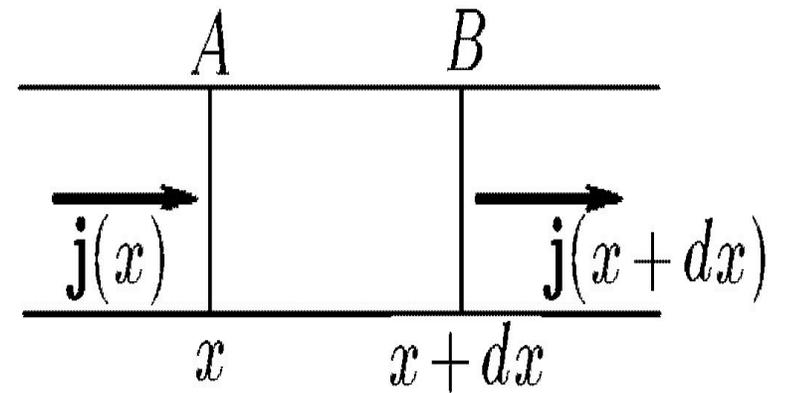
Уравнение теплопроводности

- В лекции 18 мы получили для потока тепла следующее выражение

$$j = -\frac{1}{3} \frac{nc_V}{N_A} \lambda \langle v \rangle \frac{dT}{dx}.$$

- Если это выражение подставить в предыдущую формулу

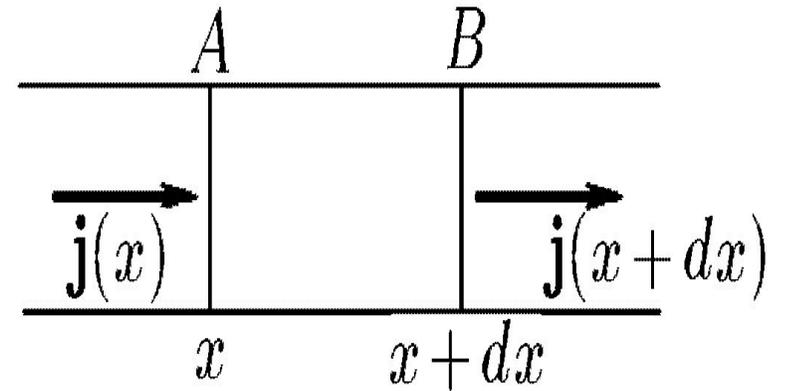
$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \frac{nc_V}{N_A} \lambda \langle v \rangle \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$



Уравнение теплопроводности

- В среде могут оказаться источники теплоты.
- Чтобы их учесть, введем величину q , равную количеству теплоты, выделяемому источниками в единице объема среды в одну секунду.
- Тогда вместо уравнения следует писать

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + q$$



Уравнение теплопроводности

- В общем случае, когда свойства и температура среды зависят от всех трех пространственных координат x , y , z , уравнение теплопроводности, выражающее баланс теплоты в теле, имеет вид

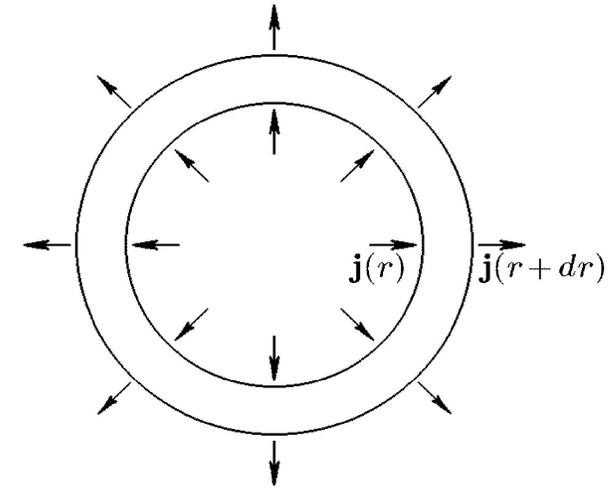
-

$$\bullet \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = - \left[\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} + \frac{\partial j}{\partial z} \right] + q.$$

- Однако решения такого уравнения аналитически можно получить только в простейших случаях.
- Наиболее важными являются случаи, когда среда и распределение температуры в ней обладают сферической или цилиндрической симметрией.

Уравнение теплопроводности

- Рассмотрим сначала случай сферической симметрии
- Опишем вокруг центра симметрии две концентрические сферы с радиусами r и $r + dr$
- Количество теплоты, поступающее за время dt в пространство между этими сферами через первую из них, равно $j(r) \cdot 4\pi r^2 dt$.
- Количество теплоты, вытекающее за то же время через вторую сферу, будет $j(r + dr) \cdot 4\pi(r + dr)^2 dt$.



Уравнение теплопроводности

- Разность между ними

-

- $4\pi \left[(jr^2)_r - 4\pi (jr^2)_{r+dr} \right] dt = -4\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j) dr dt$

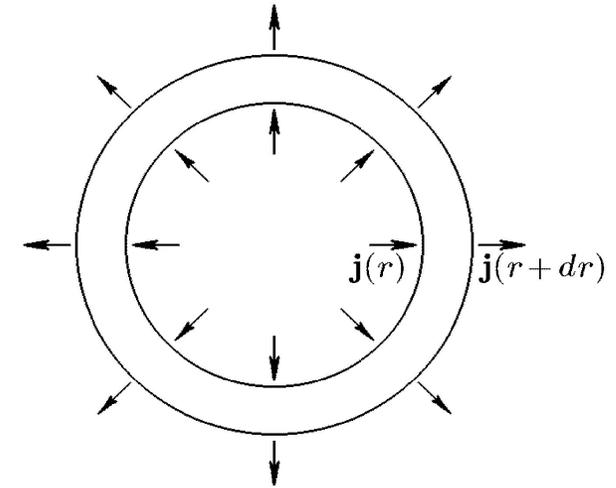
-

- дает количество теплоты, втекающее за время dt в рассматриваемый сферический слой из окружающего пространства.

- При наличии источников сюда надо добавить количество теплоты

-

- $4\pi qr^2 dr dt,$



Уравнение теплопроводности

- Изменение количества теплоты в слое можно представить в виде $\rho 4\pi r^2 dr c_V dT$.

- Поэтому уравнение баланса теплоты будет

-

$$\bullet \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j) + q.$$

- $j = -\kappa \partial T / \partial r$, так что

-

$$\bullet \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q.$$

Уравнение теплопроводности

- Аналогичные рассуждения проводятся и в случае цилиндрической симметрии.
- Понимая теперь под r расстояние до оси симметрии, получим
-

$$\bullet \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rj) + q$$

•

$$\bullet \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q.$$

Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Допустим, что имеется бесконечная пластинка толщины l , поверхности которой поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2 .
- Требуется найти распределение температуры T внутри такой пластинки. Примем за ось X прямую, перпендикулярную к пластинке. Начало координат поместим на плоскости 1 , ограничивающей пластинку.

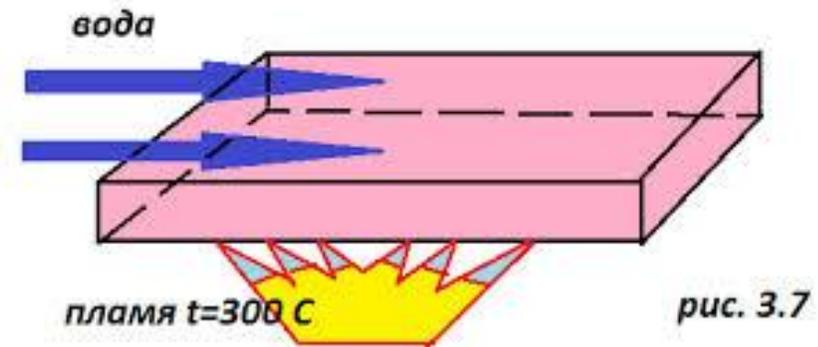
Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Теплопроводность зависит от температуры следующим образом

- $$\kappa = \frac{1}{3} \frac{nc_V}{N_A} \lambda \langle v \rangle = \frac{1}{3} \frac{nc_V}{N_A} \lambda \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = C\sqrt{T},$$

- где C – константа. Уравнение теплопроводности переходит в

- $$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0.$$



Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Заменой переменных $T' = T^{3/2}$ уравнение сводится к виду

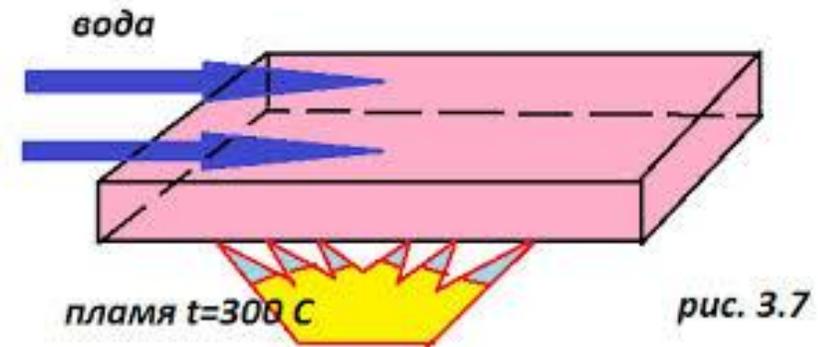
-

- $\frac{d^2 T'}{dx^2} = 0.$

- Интегрируя, получим

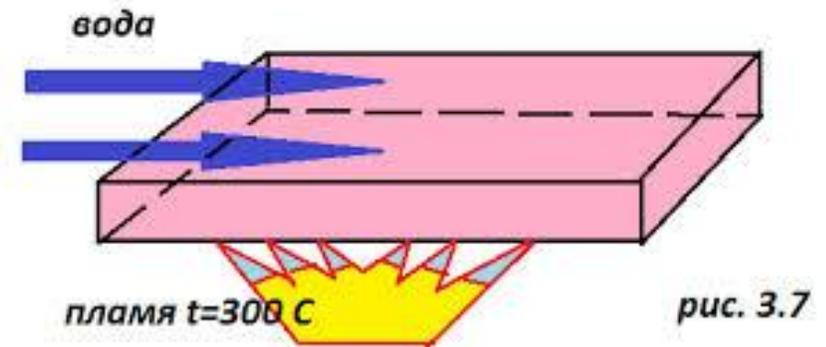
-

- $T' = Ax + B$



Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

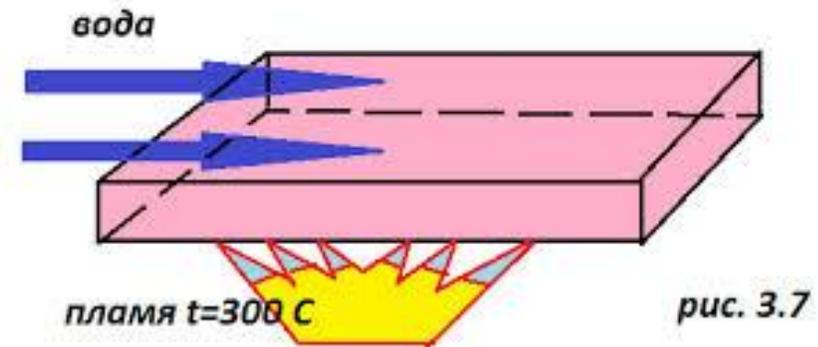
- Постоянные A и B определяются из граничных условий.
- При $x = 0$ должно быть $T' = T'_1$
- а при $x = l$ $T' = T'_2$.
- Это приводит к системе уравнений
-
- $T'_1 = B, \quad T'_2 = Al + B.$



Стационарное распределение температуры в плоскопараллельной пластинке

- Определив из нее постоянные А и В, и проведя обратную замену переменных, найдем распределение температуры:

- $$T = \left(\frac{T_2^{3/2} - T_1^{3/2}}{l} x + T_1^{3/2} \right)^{2/3}$$



Распределение температуры между двумя концентрическими сферами

- Обозначим радиус внутренней сферы через r_1 , а внешней – r_2 .

$$\bullet \frac{d}{dr} \left(r^2 \sqrt{T} \frac{dT}{dr} \right) = 0.$$

-

- Применим такую же, как в предыдущем разделе замену переменных $T' = T^{3/2}$. В итоге получаем уравнение

-

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT'}{dr} \right) = 0$$

Распределение температуры между двумя концентрическими сферами

- Его решением является выражение

$$T' = \frac{A}{r} + B.$$

- Постоянные интегрирования A и B определяются из значений, которые принимает температура T на границах сферического слоя.

- $T'_1 = \frac{A}{r_1} + B, \quad T'_2 = \frac{A}{r_2} + B.$

- Решая ее и делая обратную замену переменных, получим распределение температуры между сферами

- $T = \left(\frac{r_2 T_2^{3/2} - r_1 T_1^{3/2}}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_2 (T_1^{3/2} - T_2^{3/2})}{r(r_2 - r_1)} \right)^{2/3}.$

Стационарное распределение температуры между двумя цилиндрами.

- Радиус внутреннего цилиндра обозначим через r_1 , внешнего – r_2 . Температуры их поддерживаются при постоянных значениях T_1 и T_2 .
- Если среда между цилиндрами однородна, то получается

$$T = \left(\frac{T_1^{3/2} \ln r_2 - T_2^{3/2} \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{T_2^{3/2} - T_1^{3/2}}{\ln(r_2/r_1)} \ln r \right)^{2/3}$$

Течение вязкой жидкости

- Для потока импульса (вязкость) было получено выражение:

-

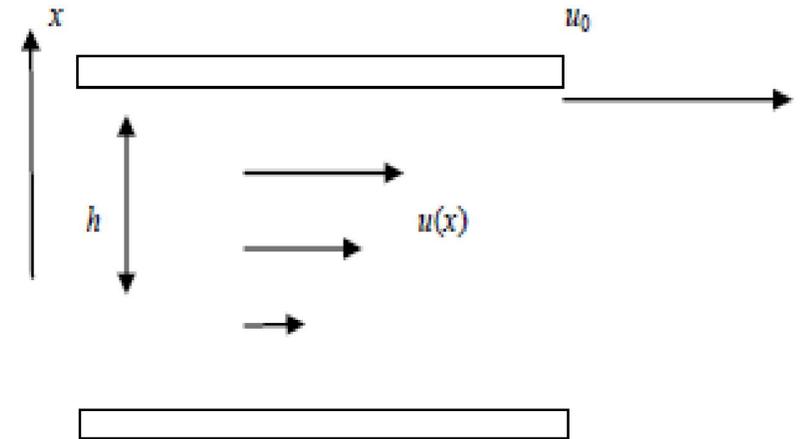
$$\bullet \Pi = -\eta \frac{du}{dx},$$

-

- где η - коэффициент вязкости.

Течение вязкой жидкости

- Пусть между двумя параллельными твердыми пластинами с расстоянием h между ними находится жидкость с вязкостью η .
- Пусть нижняя пластина покоится, а верхняя движется со скоростью u_0 .



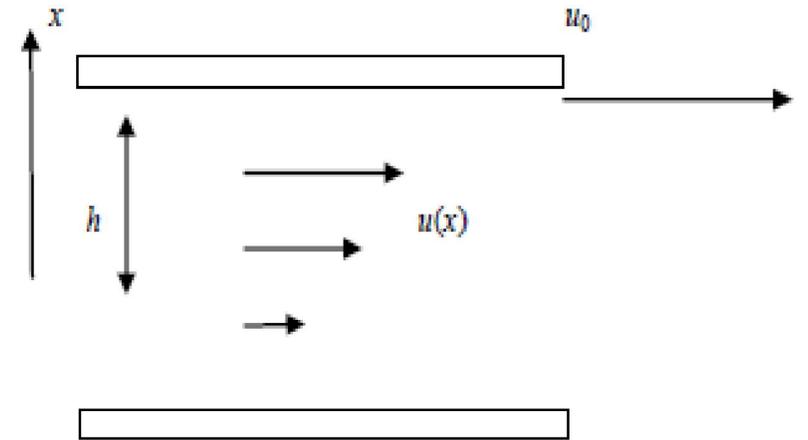
Течение вязкой жидкости

- В равновесии силы, действующие на некоторый выбранный слой сверху и снизу равны. Это означает, что для данной задачи

- $$\frac{du(x)}{dx} = \text{const.}$$

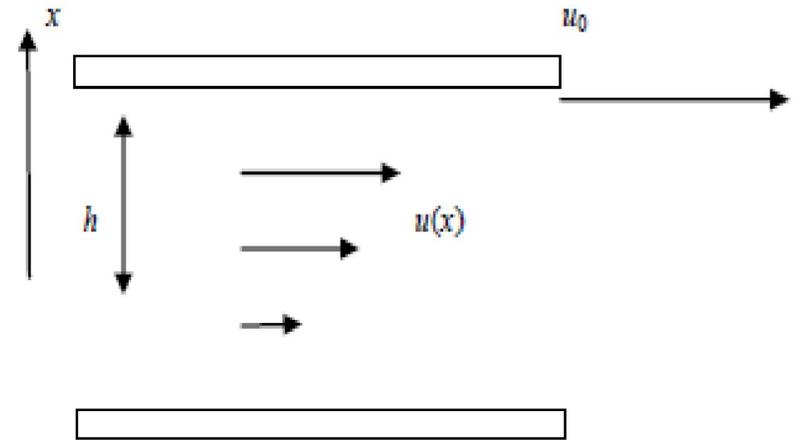
- Решением этого уравнения с указанными начальными условиями $u(0) = 0$, $u(h) = u_0$ является линейное изменение скорости u с координатой

- $$u(x) = \frac{u_0}{h} x.$$



Течение вязкой жидкости

- При этом напряжение силы трения, действующая на 1 см^2 поверхности каждой из твердых плоскостей
 - $\Pi = \frac{u_0 \eta}{h}$.
- Эта величина пропорциональна скорости верхней плоскости u_0 и обратно пропорциональна расстоянию между плоскостями.



Формула Пуазейля

- Рассмотрим течение жидкости по цилиндрической трубе радиуса R и длины L . На концах трубы поддерживаются различные давления p_1 и p_2 , за счет перепада которых и происходит движение жидкости.
- Скорость $u(r)$ течения жидкости направлена везде вдоль оси трубы и зависит от расстояния r от оси. Для напряжения силы трения справедливо выражение

- $$\Pi = -\eta \frac{du(r)}{dr}.$$

Формула Пуазейля

- Рассмотрим объем жидкости, ограниченный проведенной внутри трубы коаксиальной с ней цилиндрической поверхностью некоторого радиуса r . Сила трения, действующая на рассматриваемый объем жидкости определяется умножением напряжения Π и площади поверхности $2\pi rL$:

-

$$\bullet \quad 2\pi rL\Pi = -2\pi rL\eta \frac{du(r)}{dr}.$$

Формула Пуазейля

- Данная сила трения, действующая на рассматриваемый объем жидкости, компенсируется силой, возникающей из-за перепада давлений, действующих у оснований цилиндра, которая равна $\pi r^2 \Delta p$. Приравнивая эти силы, получим уравнение

-

$$\bullet \frac{du(r)}{dr} = -\frac{r}{2L\eta} \Delta p.$$

Формула Пуазейля

- Отсюда

- $u(r) = -\frac{r^2}{2L\eta} \Delta p + const.$

-

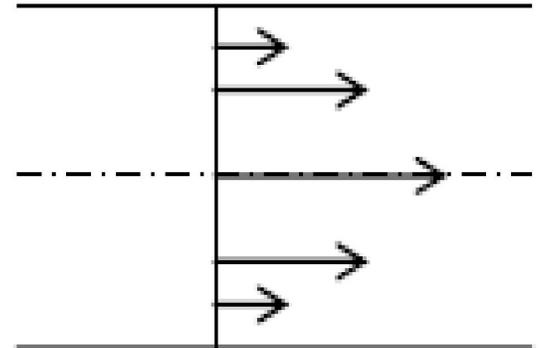
- Постоянная в этом решении определяется из условия равенства нулю скорости на поверхности трубы, т.е. при $r = R$. Отсюда

-

$$u(r) = \frac{r^2}{2L\eta} \Delta p (R^2 - r^2).$$

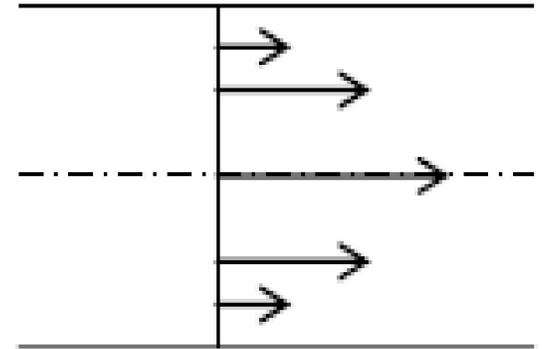
Формула Пуазейля

- Скорость меняется по квадратичному закону от нуля на стенке до максимального значения ($u_{\text{макс}} = R^2 \Delta p / 4L\eta$) на оси трубы (говорят о параболическом профиле скоростей)



Формула Пуазейля

- Определим объем жидкости, вытекающей из трубы в единицу времени.
- Выделим два коаксиальных цилиндра с радиусами r и $r + dr$.
- Тогда объем этой жидкости, вытекающий за единицу времени есть



-

$$dV(r) = u(r)2\pi r dr$$

Формула Пуазейля

- Отсюда

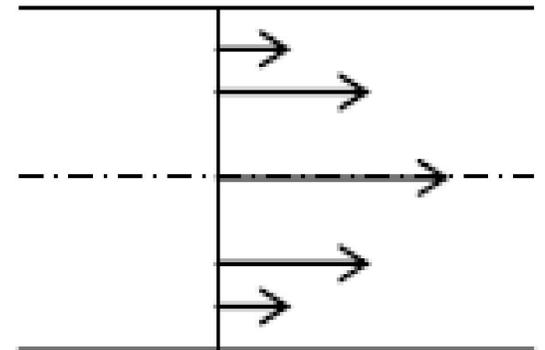
- $dV(r) = u(r)2\pi r dr = \frac{\pi\Delta p}{2L\eta} (R^2 - r^2)r dr =$
 $\frac{\pi\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2)d(r^2).$

-

- После интегрирования получаем:

-

$$V(r) = \frac{\pi\Delta p}{4L\eta} \left(R^2 r^2 - \frac{r^4}{2} \right).$$



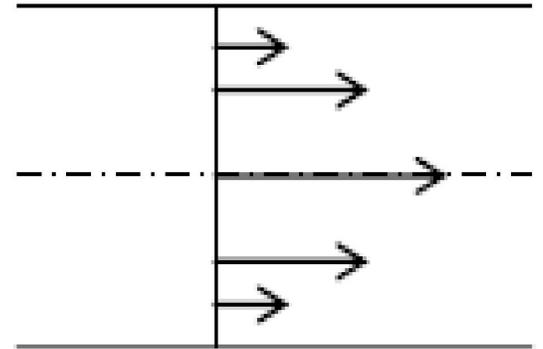
Формула Пуазейля

- . Полный объем жидкости, вытекающей из трубы за 1 сек, есть значение при $r = R$

-

- $$V(R) = \frac{\pi \Delta p}{8L\eta} R^4$$

- Эта формула называется формулой Пуазейля. Согласно этой формуле, объем вытекающей из трубы жидкости пропорционален разности давлений, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален вязкости.



Уравнение диффузии и его применение

- В лекции 18 для потока молекул (диффузия) было получено следующее выражение:

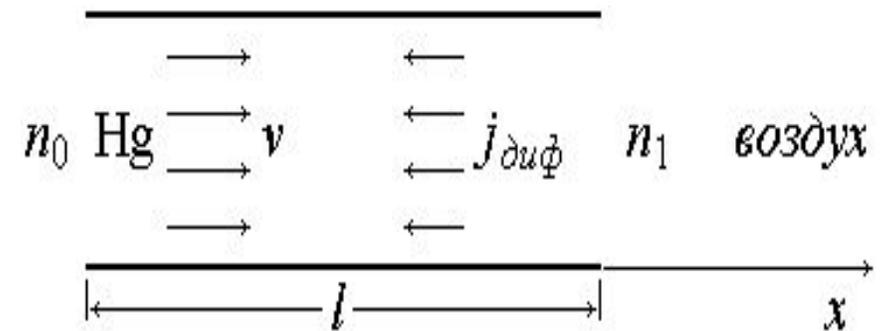
-

$$j = -D \frac{dn}{dx}.$$

-

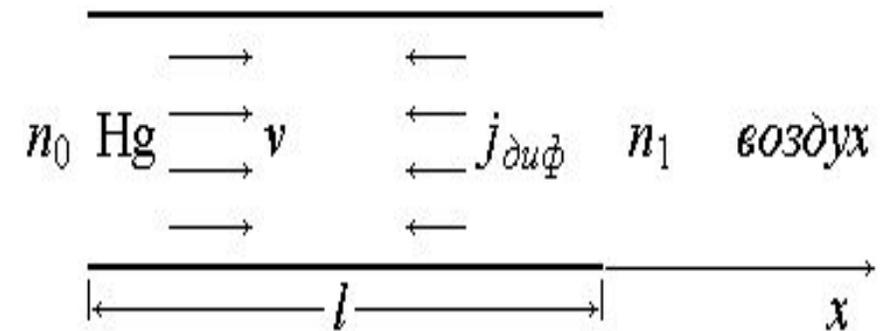
Уравнение диффузии и его применение

- В качестве примера применения этого уравнения, рассмотрим следующую задачу.
- По трубке длиной l слева направо текут пары ртути, а навстречу им идет диффузионный поток откачиваемого газа (воздуха)



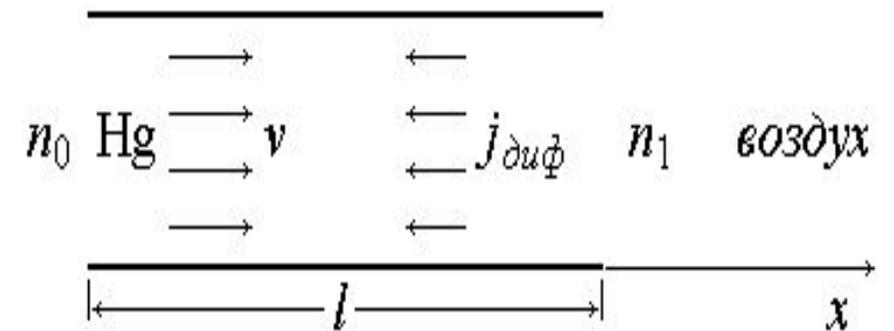
Уравнение диффузии и его применение

- Найдем скорость прокачки ртути, при которой концентрация молекул воздуха будет меняться на длине трубки от n_1 до n_0



Уравнение диффузии и его применение

- Молярный вес воздуха равен 29 г/моль, для ртути он составляет 200 г/моль, т.е. на порядок больше. Поэтому в струе паров ртути происходит передача импульса диффундирующим молекулам воздуха.



Уравнение диффузии и его применение

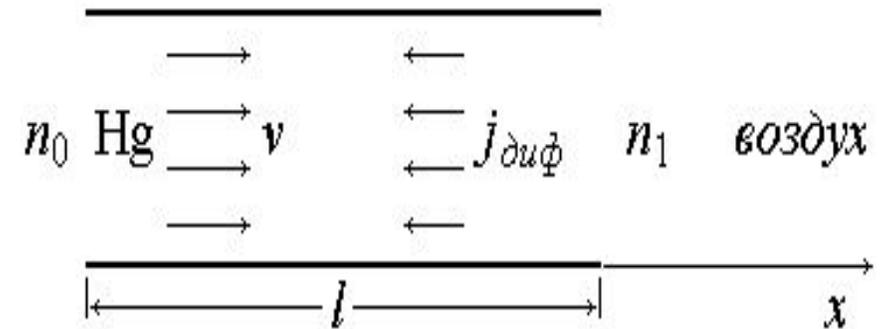
- В результате имеем конвективный поток воздуха j_k со скоростью v паров ртути

- $j_k = nvS.$

- и встречный диффузионный поток j_D молекул воздуха

- $j_D = -D \frac{dn}{dx} S,$

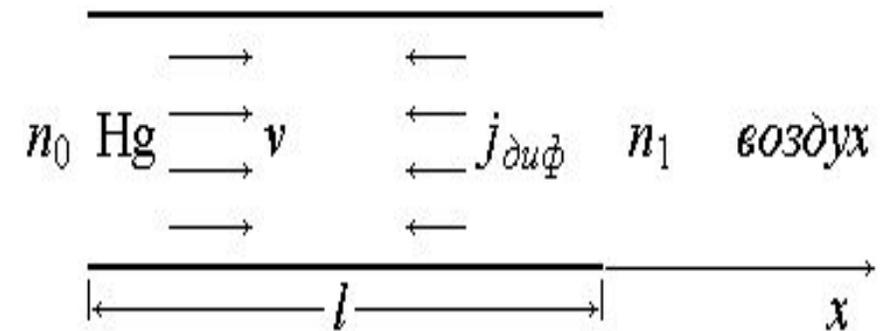
- где n – концентрация молекул воздуха, D – коэффициент диффузии воздуха, S – площадь поперечного сечения трубки.



Уравнение диффузии и его применение

- Воздух не доходит до левого конца трубки. Следовательно, его суммарный поток равен нулю:

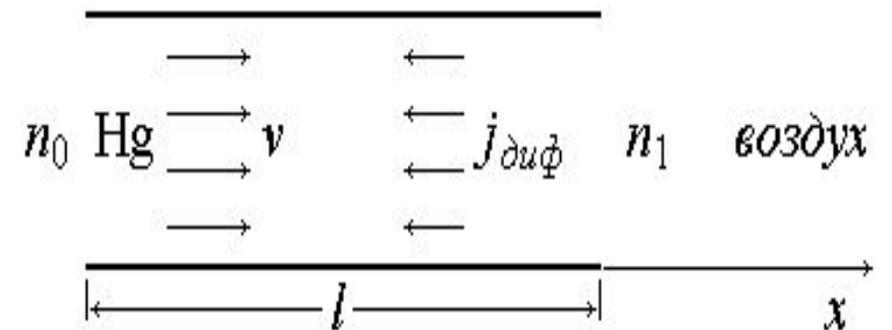
-
- $j_k + j_D = n v S - D \frac{dn}{dx} S = 0.$
-



Уравнение диффузии и его применение

- Для решения дифференциального уравнения имеются два условия
- $x = 0 \rightarrow n = n_0$,
- $x = l \rightarrow n = n_1$.
- В итоге получаем выражение
-

$$v = \frac{D}{l} \ln \frac{n_1}{n_0}$$



Уравнение диффузии и его применение

- Этот процесс имеет практическое применение в технике высокого вакуума.
- В 1901 г. русский физик П.Н. Лебедев проводил эксперименты с использованием вакуумных установок. В его установках для достижения высокого вакуума использовался модифицированный ртутный поршневой насос, где остаточные молекулы газа захватывались парами ртути и откачивались вместе с ними. Идея использовать пары ртути для удаления остаточного газа привлекла внимание многих ученых.

Успеха на экзаменах!

