Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Электронный курс лекций «Математический анализ»,
часть 12

Оренбург 2017

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: определение

В предыдущих параграфах мы ввели и рассмотрели понятие определённого интеграла на $[a;b]$. Возникает вопрос: а нельзя ли ввести подобное понятие на промежутках $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;+\infty)$?

Определение 1. Если функция $f(x)$:

1) определена на $[a,+\infty)$,
2) для $\forall\,[a,b]\subset[a;+\infty)$ интегрируема на $[a;b]$;
3) существует конечный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$,

то он называется *несобственным интегралом от функции $f(x)$ на $[a,+\infty)$*.

Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Когда существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*. В противном случае, говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не существует или *расходится*.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ определена и непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[0;b] \subset [0;+\infty)$.

$$\int\limits_0^b \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^b \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}arctgx^2\Big|_0^b = \frac{1}{2}arctgb^2 - \frac{1}{2}arctg0 = \frac{1}{2}arctgb^2.$$

$$\boxed{\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{x}{1+x^4}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}arctgb^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.}$$

Следовательно, интеграл сходится и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{4}$.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ определена и непрерывна на промежутке $[e;+\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[e;b] \subset [e;+\infty)$.

$$\int_e^b \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^b = \ln|\ln b| - \ln|\ln e| = \ln|\ln b|.$$

$$\boxed{\lim_{b \to +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \ln|\ln b| = +\infty.}$$

Следовательно, интеграл расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$.

Решение.

Функция $f(x) = \sin x$ определена и непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[0;b] \subset [0;+\infty)$.

,

$$\int\limits_0^b \sin x dx = -\cos x \Big|_0^b = 1 - \cos b.$$

$\lim\limits_{b \to +\infty} (1 - \cos b)$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Теорема 1. Для любого $a \in R_+$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Доказательство.

Нетрудно заметить, что при любом $a \in R_+$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[a;b] \subset [a;+\infty)$.

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} ln|x|\Big|_a^b = ln\left|\frac{b}{a}\right|, & p = 1; \\ \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^b = \frac{b^{-p+1}}{1-p} - \frac{a^{-p+1}}{1-p}, & p \ne 1. \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty, & p = 1; \\ -\frac{a^{-p+1}}{1-p}, & p > 1; \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}}$$

Откуда и следует, что интеграл сходится при $p > 1$, и расходится при $p \le 1$.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Теорема 2. Если $f(x) \geq g(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, +\infty)$ и $f(x), g(x) \in C([a, +\infty))$, тогда:

1) если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится;

2) если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Доказательство. С доказательством данной теоремы можно ознакомиться в учебнике Л.Д. Кудрявцев Курс математического анализа. В 2-х томах. – М.: Высшая школа, 1981.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$.

Решение.

$$g(x) = \frac{1}{x+x^3} \le \frac{1}{x^3} = f(x), \ \forall x \in [1;+\infty).$$

Так как $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ сходится, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$ сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} \le \frac{3}{\sqrt{x}}, \ \forall x \in [1;+\infty),$$

Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, то $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$ расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: определение

Понятие несобственного интеграла для функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$ вводится аналогично.

Определение 2. Если функция $f(x)$:

1) определена на $(-\infty;b]$,

2) для $\forall[a;b]\subset(-\infty;b]$ интегрируема на $[a;b]$,

3) существует конечный $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$,

то он называется *несобственным интегралом от функции f(x) на* $(-\infty;b]$.

Обозначение: $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *сходится*. В противном случае, говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ не существует или *расходится*.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty;0]$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[a;b] \subset (-\infty;0]$.

$$\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{a}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = arctg(x+1)\Big|_a^0 = arctg1 - arctga = \frac{\pi}{4} - arctg\,a.$$

$$\boxed{\lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{\pi}{4} - arctga\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.}$$

Следовательно, интеграл сходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: определение

Определение 3. Если функция $f(x)$:

1) определена на $(-\infty;+\infty)$;
2) для любых $a,b\in R$ $\quad f(x)\in I[a;b]$;
3) для любых $c\in R$ существуют конечные $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$ и $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$;

тогда $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом для* $f(x)$ *на* $(-\infty;+\infty)$.

Обозначение: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$.

Если несобственный интеграл для функции $f(x)$ на $(-\infty;+\infty)$ существует, то говорят, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится. В противном случае, говорят, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \forall c \in R.}$$

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

<u>Решение.</u> Заметим, что функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty;+\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[a;b] \subset (-\infty;+\infty)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\boxed{\lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} arctgx \Big|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} (-arctga) = \frac{\pi}{2},}$$

$$\boxed{\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx \Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (arctgb) = \frac{\pi}{2}.}$$

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.}$$