

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

*Несобственные интегралы
с бесконечными пределами*

**Электронный курс лекций «Математический анализ»,
часть 12**

Оренбург 2017

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: определение

В предыдущих параграфах мы ввели и рассмотрели понятие определённого интеграла на $[a; b]$. Возникает вопрос: а нельзя ли ввести подобное понятие на промежутках $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; +\infty)$?

Определение 1. Если функция $f(x)$:

- 1) определена на $[a, +\infty)$,
- 2) для $\forall [a, b] \subset [a, +\infty)$ интегрируема на $[a; b]$;

- 3) существует конечный $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$,

то он называется *несобственным интегралом от функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$* .

Обозначение:
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx .$$

Когда существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, говорят, что интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ сходитс}я.$$

В противном случае,

говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не существует или *расходится*.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4}$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ определена и непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[0; b] \subset [0; +\infty)$.

$$\int_0^b \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^b = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} b^2 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} b^2.$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} b^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, интеграл сходится и $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{4}$.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ определена и непрерывна на промежутке $[e; +\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[e; b] \subset [e; +\infty)$.

$$\int_e^b \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| \Big|_e^b = \ln|\ln b| - \ln|\ln e| = \ln|\ln b|.$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|\ln b| = +\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x dx$.

Решение.

Функция $f(x) = \sin x$ определена и непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[0; b] \subset [0; +\infty)$.

$$\int_0^b \sin x dx = -\cos x \Big|_0^b = 1 - \cos b.$$

$\lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - \cos b)$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Теорема 1. Для любого $a \in R_+$ интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Доказательство.

Нетрудно заметить, что при любом $a \in R_+$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ определена и непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[a; b] \subset [a; +\infty)$.

$$\int_a^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \ln|x| \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a}, & p = 1; \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^b = \frac{b^{-p+1}}{1-p} - \frac{a^{-p+1}}{1-p}, & p \neq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty, & p = 1; \\ -\frac{a^{-p+1}}{1-p}, & p > 1; \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

Откуда и следует, что интеграл сходится при $p > 1$, и расходится при $p \leq 1$.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Теорема 2. Если $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in [a, +\infty)$ и $f(x), g(x) \in C([a, +\infty))$.

Тогда:

- 1) если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится;
- 2) если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Доказательство. С доказательством данной теоремы можно ознакомиться в учебнике Л.Д. Кудрявцев Курс математического анализа. В 2-х томах. – М.: Высшая школа, 1981.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$.

Решение.

$$g(x) = \frac{1}{x+x^3} \leq \frac{1}{x^3} = f(x), \quad \forall x \in [1; +\infty).$$

Так как $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ сходится, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$ сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in [1; +\infty),$$

Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, то $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$ расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: определение

Понятие несобственного интеграла для функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; b]$ вводится аналогично.

Определение 2. Если функция $f(x)$:

- 1) определена на $(-\infty; b]$,
- 2) для $\forall [a; b] \subset (-\infty; b]$ интегрируема на $[a; b]$,
- 3) существует конечный $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$,

то он называется *несобственным интегралом от функции $f(x)$ на $(-\infty; b]$* .

Обозначение:
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если существует конечный предел $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$, говорят, что интеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$
 сходится.

В противном случае,

говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ не существует или *расходится*.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty; 0]$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[a; b] \subset (-\infty; 0]$.

$$\int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_a^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x+1) \Big|_a^0 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}a = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}a.$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}a \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: определение

Определение 3. Если функция $f(x)$:

1) определена на $(-\infty; +\infty)$;

2) для любых $a, b \in \mathbb{R}$ $f(x) \in I[a; b]$;

3) для любых $c \in \mathbb{R}$ существуют конечные $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$ и $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx$;

тогда $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$ называется *несобственным интегралом* для $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$.

Обозначение:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

Если несобственный интеграл для функции $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ существует, то

говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится. В противном случае, говорят, что

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами: исследование на сходимость

Если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Заметим, что функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[a; b] \subset (-\infty; +\infty)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\arctg a) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

