



Теория вероятностей и математическая статистика

**Кракашова Ольга
Анатольевна**

доцент, канд. экон. наук,

доцент кафедры Статистики, эконометрики и оценки рисков РГЭУ (РИНХ)

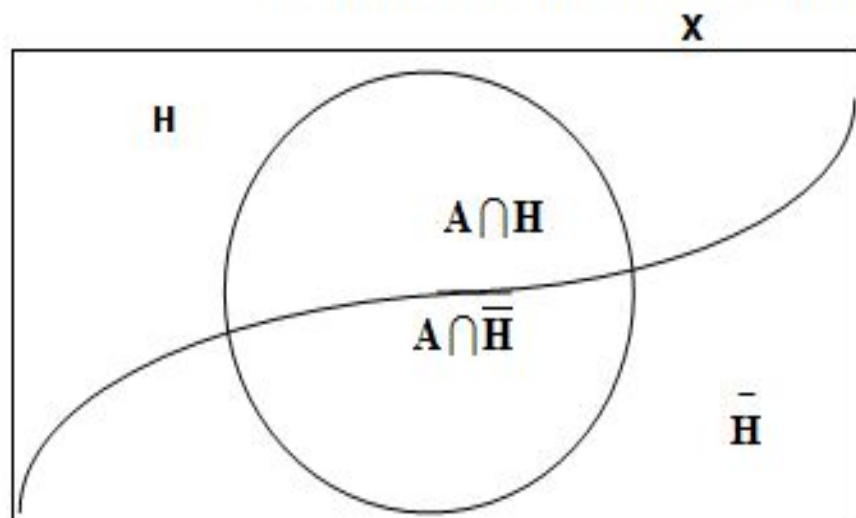


Лекция № 4

Формулы полной вероятности и Байеса

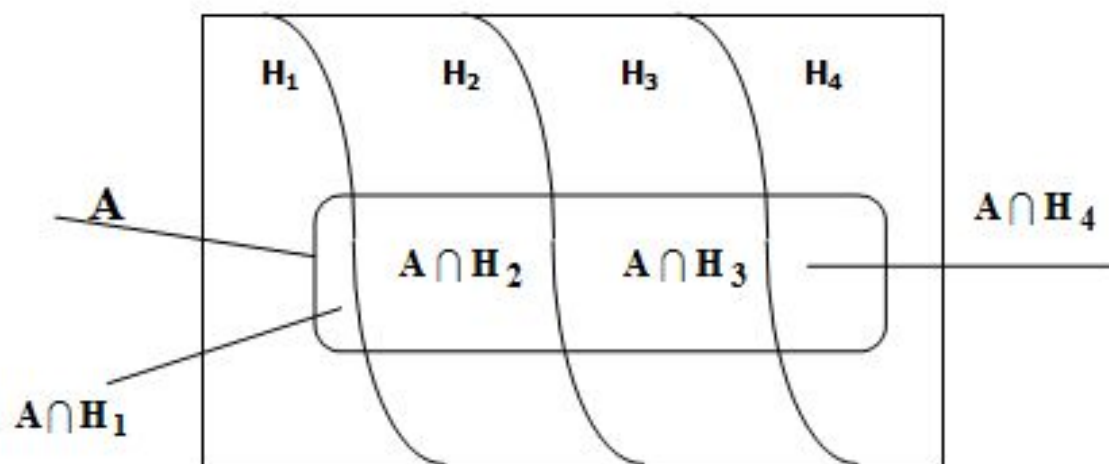
Рассмотрим два события A и H , изображенные на диаграмме Венна. Наборы H и \bar{H} - форма разбиения набора A на два подмножества взаимно несовместных событий. События H и \bar{H} взаимно противоположны. Событие A может произойти либо с H , либо с \bar{H} , но не с двумя вместе. Каковы бы ни были взаимосвязи между событиями A и H , всегда можно сказать, что вероятность события A равна вероятности пересечения событий A и H плюс вероятность пересечения A и дополнения H (событие \bar{H}).

Разложение A на части зависит от H и \bar{H} .



$$P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap \bar{H})$$

Пусть событие A может осуществляться лишь вместе с одним из событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, образующих полную группу (то есть они единственно возможные и несовместные).



Так как заранее неизвестно, какое из событий H_1, H_2, \dots, H_n наступит, то их называют **гипотезами**.

Пусть также известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ и условные вероятности события A : $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$.

Так как гипотезы образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$. Рассмотрим событие A - это (или H_1A, \dots , или H_nA). События H_1A, H_2A, \dots, H_nA - несовместные попарно, так как события H_1, H_2, \dots, H_n попарно несовместны. К этим событиям применяем теорему сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA), \text{ или}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i)$$

События H_1A, H_2A, \dots, H_nA - зависимые. Применяя теорему умножения вероятностей для зависимых событий, получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i) \quad \text{– формула полной вероятности.}$$

Если событие A может наступить только вместе с одним из событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий и называемых гипотезами, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий H_1, H_2, \dots, H_n на соответствующую условную вероятность события A .

Случай двух событий:

$$P(A) = P(H) \cdot P(A/H) + P(\bar{H}) \cdot P(A/\bar{H})$$

Случай более двух событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i), \quad \text{где}$$

$i=1, 2, \dots, n$

Пример 1. Экономист полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году равна 0.75, если экономика страны будет на подъёме; и эта же вероятность равна 0.30, если экономика страны не будет успешно развиваться. По его мнению, вероятность экономического подъёма в будущем году равна 0.80. Используя предположения экономиста, оцените вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году?

Решение. Событие A – “акции компании поднимутся в цене в будущем году”.

Составим рабочую таблицу:

Таблица 1

№ H_i	Гипотезы H_i	$P(H_i)$	$P(A/H_i)$	$P(H_i) \cdot P(A/H_i)$
1	H_1 - “подъем экономики”	0.80	0.75	0.60
2	H_2 - “спад экономики”	0.20	0.30	0.06
Σ		1.00	–	$P(A) = 0.66$

Пример 2. В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны во вторую наудачу переложен один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, окажется черным?

Решение. Событие А - “шар, извлеченный из второй урны - черный”. Составим рабочую таблицу:

Таблица 2

№ H_i	Гипотезы H_i	$P(H_i)$	$P(A/H_i)$	$P(H_i) \cdot P(A/H_i)$
1	H_1 - “из 1 урны во 2 урну переложили черный шар”	6/10	7/11	42/110
2	H_2 - “из 1 урны во 2 урну переложили белый шар”	4/10	6/11	24/110
Σ		1.00	–	$P(A) = 0.60$

Вычисление вероятностей гипотез (формулы Байеса)

В тех случаях, когда стало известно, что событие A произошло, возникает потребность в определении (уточнении) условной вероятности $P(H_i/A)$. Пусть событие A может осуществляться лишь вместе с одной из гипотез H_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Известны вероятности гипотез $P(H_1), \dots, P(H_n)$ и условные вероятности $A: P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$. Так как $AH_i = H_iA$, то $P(AH_i) = P(H_iA)$ или $P(A) \cdot P(A/H_i) = P(H_i) \cdot P(H_i/A)$, а отсюда по правилу пропорций:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

Итак:

Случай двух событий:

$$P(H/A) = \frac{P(H) \cdot P(A/H)}{P(H) \cdot P(A/H) + P(\bar{H}) \cdot P(A/\bar{H})}$$

Случай более двух событий:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A .

Вероятность события H , задаваемая при условии появления события A , получается из вероятностей событий H и \bar{H} и из условной вероятности события A при заданном H . Вероятности событий H и \bar{H} называют априорными (предшествующими), вероятность $P(H/A)$ называют апостериорной (последующей). Формулы Байеса позволяют переоценить наши априорные вероятности гипотез в апостериорные вероятности, вытекающие из знания появления события A .

Пример 3. Экономист полагает, что в течение периода активного экономического роста американский доллар будет расти в цене с вероятностью 0.7, в период умеренного экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0.4 и при низких темпах экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0.2. В течение любого периода времени вероятность активного экономического роста 0.3, умеренного экономического роста 0.5 и низкого роста - 0.2. Предположим, что доллар дорожает в течение текущего периода, чему равна вероятность того, что анализируемый период совпал с периодом активного экономического роста.

Решение. Определим гипотезы:

H_1 - "активный экономический рост"

H_2 - "умеренный экономический рост"

H_3 - "низкий экономический рост"

Определим событие A - "доллар дорожает"

Имеем: $P(H_1) = 0.3$, $P(H_2) = 0.5$, $P(H_3) = 0.2$,

$P(A/H_1) = 0.7$,

$P(A/H_2) = 0.4$ и $P(A/H_3) = 0.2$

Найти: $P(H_1/A)$

Используя формулу Байеса и подставляя заданные значения вероятностей, имеем:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)}$$

$$= \frac{0.30 \cdot 0.70}{0.30 \cdot 0.70 + 0.50 \cdot 0.40 + 0.20 \cdot 0.20} = 0.467$$

Мы можем получить тот же результат при помощи таблицы:

Таблица 3

Гипотезы H_i	Априорные вероятности $P(H_i)$	Условные вероятности и $P(A/H_i)$	Совместные вероятности $P(A \cap H_i)$	Апостериорные вероятности $P(H_i/A)$
H_1	0.30	0.70	0.21	$0.21 / 0.45 = 0.467$
H_2	0.50	0.40	0.20	$0.20 / 0.45 = 0.444$
H_3	0.20	0.20	0.04	$0.04 / 0.45 = 0.089$
Сумма	1.00	--	0.45	1

Пример 3. Экономист полагает, что в течение периода активного экономического роста американский доллар будет расти в цене с вероятностью 0.7, в период умеренного экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0.4 и при низких темпах экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0.2. В течение любого периода времени вероятность активного экономического роста 0.3, умеренного экономического роста 0.5 и низкого роста - 0.2. Предположим, что доллар дорожает в течение текущего периода, чему равна вероятность того, что анализируемый период совпал с периодом активного экономического роста.

Решение. Определим гипотезы:

H_1 - "активный экономический рост"

H_2 - "умеренный экономический рост"

H_3 - "низкий экономический рост"

Определим событие A - "доллар дорожает"

Имеем: $P(H_1) = 0.3$, $P(H_2) = 0.5$, $P(H_3) = 0.2$,

$P(A/H_1) = 0.7$,

$P(A/H_2) = 0.4$ и $P(A/H_3) = 0.2$

Найти: $P(H_1/A)$

Используя формулу Байеса и подставляя заданные значения вероятностей, имеем:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)} = \frac{0.30 \cdot 0.70}{0.30 \cdot 0.70 + 0.50 \cdot 0.40 + 0.20 \cdot 0.20} = 0.467$$

Мы можем получить тот же результат при помощи таблицы:

Таблица 3

Гипотезы H_i	Априорные вероятности $P(H_i)$	Условные вероятности $P(A/H_i)$	Совместные вероятности $P(A \cap H_i)$	Апостериорные вероятности $P(H_i/A)$
H_1	0.30	0.70	0.21	$0.21 / 0.45 = 0.467$
H_2	0.50	0.40	0.20	$0.20 / 0.45 = 0.444$
H_3	0.20	0.20	0.04	$0.04 / 0.45 = 0.089$
Сумма	1.00	--	0.45	1

Мы можем также построить дерево решений для нашей задачи:

