Лекция 6

Кинематика точки

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

- 1.Способы задания движения точки
- 2. Определение скорости точки при различных способах задания движения
- 3. Определение ускорения точки при различных способах задания движения

Способы задания движения точки

Задать движение точки – определить положение точки в любой момент времени в выбранной системе отсчета.

Способы задания движения точки:

векторный,

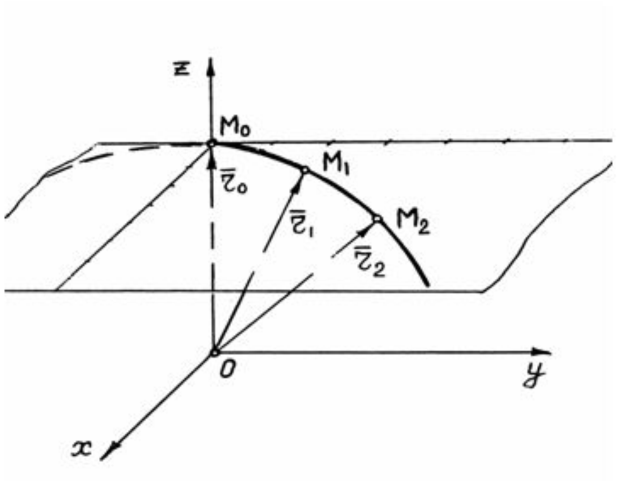
координатный,

естественный.

Векторный способ

В декартовой системе координат задается радиус-вектор $\vec{r}$ точки как функция времени ***t***:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$



Чтобы определить положение точки в разные моменты времени, в выражение радиус-вектора точки подставляют конкретные значения времени ***t***.

Если соединить последовательно концы радиус-вектора ($\vec{r}_1, \vec{r}_2$, т.д.), то получают линию, описываемую точкой в пространстве, или годограф.

Эту линию называют *траекторией точки.*

Координатный способ

Координаты точки задают как функции времени ***t***:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Уравнения называют *кинематическими уравнениями движения точки* или параметрическими уравнениями траектории. Для перехода от параметрических уравнений к уравнениям в явной или неявной форме, дающим непосредственную связь между координатами, следует исключить из уравнений параметр ***t***.

Связь координатного и векторного способов

Координаты x, y, z можно рассматривать как координаты точки M – конца радиус-вектора

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

Пример

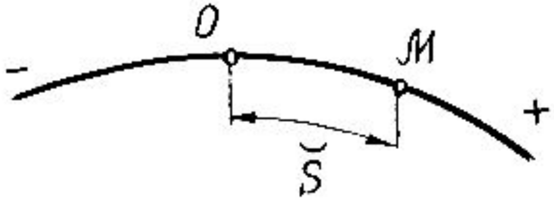
Векторный способ: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + 2\vec{k}$

Координатный способ: $x = 2t^2, \quad y = t, \quad z = 2\,.$

Из этих уравнений видно, что точка движется в плоскости $z = 2$ по ветви параболы $x = 2y^2$.

Естественный способ

Задают траектория точки, начало отсчета на траектории, положительное направление по траектории и *закон движения вдоль траектории*: $S = S(t)$,



где S - дуговая координата, определяющая положение точки на траектории, но ***не пройденный*** путь.

Дуговая координата может быть как положительной, так и отрицательной.

Переход от координатного к естественному способу

Пусть движение точки задано координатным способом, т.е. уравнениями $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$.
По этим уравнениям можно определить траекторию точки.
Для нахождения закона движения по траектории воспользуемся соотношениями:

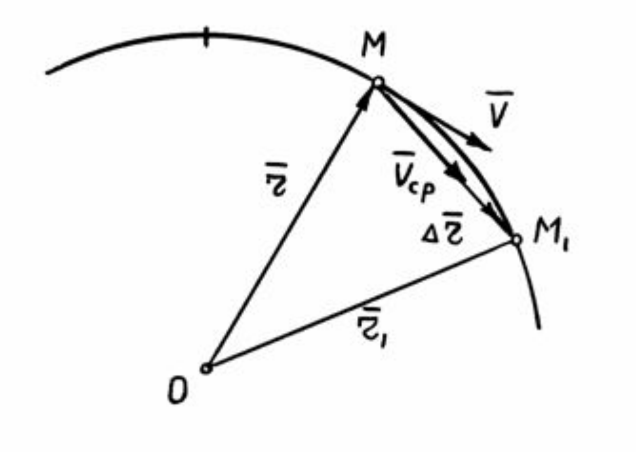
$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ или $dS = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$, где $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ и т.д.

Считая, что при $t = 0$ дуговая координата $S = 0$, получим

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

- **Определение скорости точки при различных способах задания движения**

Векторный способ



Пусть в момент времени t положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ - радиус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$.

Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ характеризует скорость изменения положения точки и называется средней скоростью точки за время Δt:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} .$$

Векторный способ

Предел отношения $\vec{v}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется истинной скоростью точки:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Из математики: *производная по времени от вектора - это вектор, направленный по касательной к годографу дифференцируемого вектора.* Так как годографом дифференцируемого вектора $\vec{r}$ служит траектория точки, то, *вектор скорости направлен по касательной к траектории.*

Координатный способ

Если представить радиус-вектор точки в виде

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,,$$

то скорость точки определятся формулой:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \,.$$

Вектор скорости точки можно записать через проекции на декартовы оси координат:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \,,$$

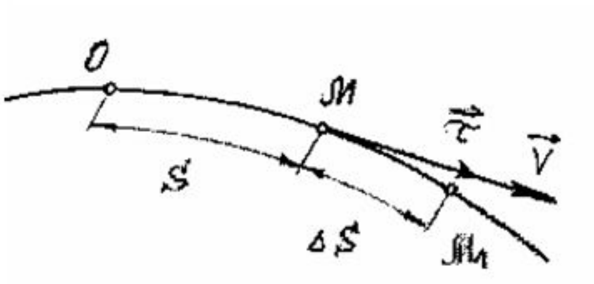
где $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \,.$

Модуль вектора скорости: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \,,$

а его направляющие косинусы вычисляются:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v} \,.$$

Естественный способ



Пусть в момент времени $\boldsymbol{t}$ точка находится на траектории в положении М с дуговой координатой S, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – в положении M_1 с $S_1 = S + \Delta S$.

Средняя скорость точки М за время Δt определяется: $v_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

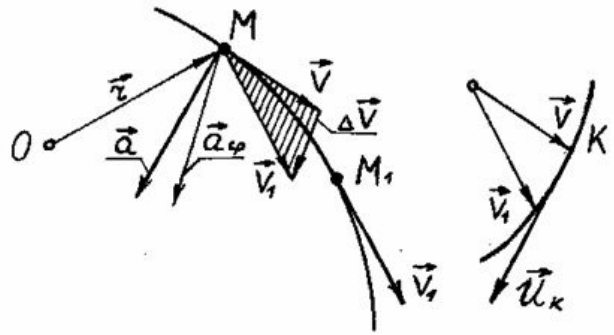
Величина истинной скорости точки М равна $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{dS}{dt}$.

Скорость точки направлена по касательной к траектории. Введем орт $\vec{\tau}$ касательной.

Тогда вектор скорости определяется: $\vec{v} = \dfrac{dS}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$.

- **Определение ускорения точки при различных способах задания движения**

Векторный способ



Пусть в момент времени t скорость точки равна $\vec{v}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ скорость равна $\vec{v}_1$.

Среднее ускорение точки за время Δt - это вектор $\vec{a}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$,

а истинное ускорение точки - это предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \to 0$: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Вектор среднего ускорения лежит в плоскости, образованной векторами $\vec{v}, \vec{v}_1, \Delta\vec{v}$ (заштрихованная плоскость).

Вектор ускорения точки параллелен касательной к годографу вектора скорости.

Координатный способ

Вектор ускорения точки можно представить в виде:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

или

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ .$$

Проекции ускорения на декартовы оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}\ .$$

Модуль и направляющие косинусы вектора ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}\ .$$

Естественный способ

Так как ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, а скорость $\vec{v} = v\vec{\tau}$,

то $\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{ds}$

или

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Первая составляющая в этом выражении характеризует изменение величины скорости и направлена по касательной к траектории.

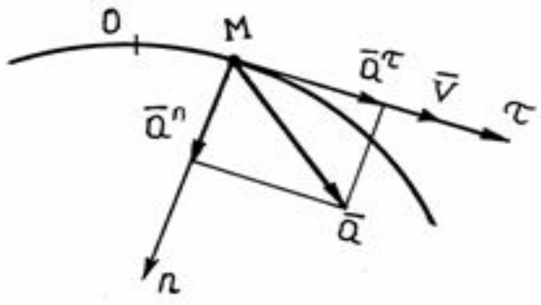
Ее называют *касательной составляющей* вектора ускорения

$$\vec{a}^{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}.$$

Естественный способ

Дифференциал во втором слагаемом в выражении $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ приводится к виду $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$, где ρ - *радиус кривизны* кривой в данной точке, орт $\vec{n}$, перпендикулярен орту $\vec{\tau}$. Формула для определения ускорения точки при естественном способе задания движения:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$



Второе слагаемое характеризует изменение направления вектора скорости и направлено по главной нормали к траектории. Оно называется нормальной составляющей ускорения:

$$\vec{a}^n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

Модуль полного ускорения точки: $$a = \sqrt{(a^{\tau})^2 + (a^n)^2}.$$

Алгоритм решения задач

1) определить траекторию движения точки в координатной форме, исключив из уравнений движения время *t;*
2) построить траекторию в плоскости xOy;
3) указать на рисунке местоположение в заданный момент времени;
4) вычислить проекции скоростей и полную скорость и найти их значения в заданный момент времени;
5) вычислить проекции ускорений и полное ускорение в заданный момент времени;
6) вычислить тангенциальное (касательное) ускорение;
7) вычислить нормальное ускорение;
8) определить радиус кривизны траектории в заданный момент времени.

Алгоритм-схема