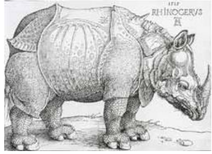
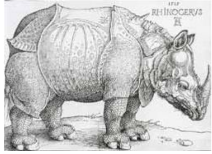
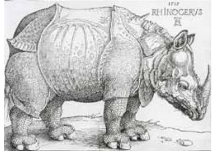


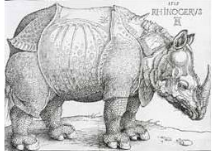
Теория игр



- Q21
- Основные понятия теории игр.



Мы введем интересующие нас задачи с помощью простого, но типичного примера игры в „две монетки“. Правила этой игры таковы: каждый из двух игроков A и B кладет монету гербом или решеткой, не показывая ее противнику. Затем монеты открываются. Игрок A получает обе монеты, если они лежат одной и той же стороной; в противном случае обе монеты получает B.



ИГРА

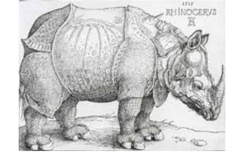
ИГРА ДВУХ ЛИЦ

ИГРА С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

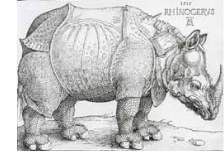
ХОД **ПАРТИЯ**

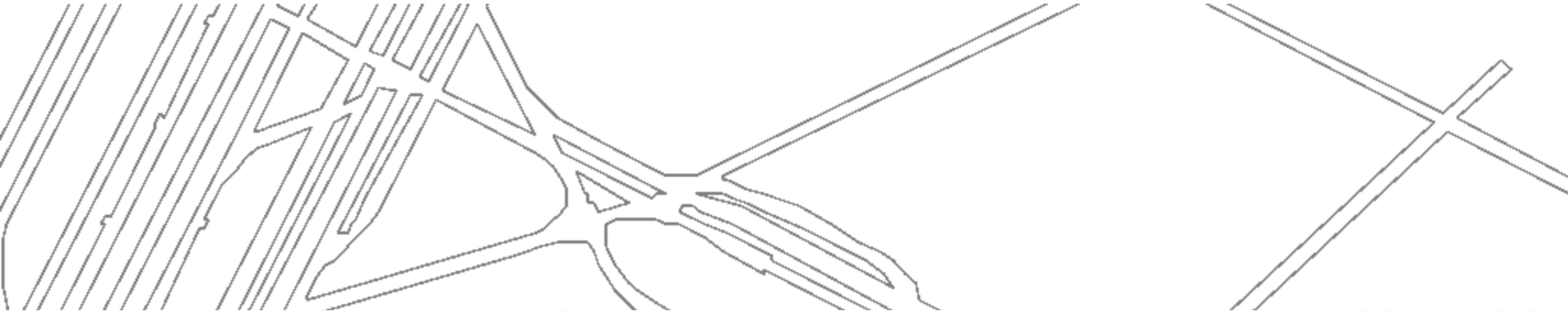
Эта вероятно не очень увлекательная игра удобна для введения того языка, который установился в научной литературе. В этой игре участвуют два игрока, поэтому мы говорим об *игре двух лиц*. Один игрок выигрывает то, что проигрывает другой; иными словами, сумма их выигрышей равна нулю. Получается громоздкое, но общепринятое название: *игра с нулевой суммой*.

Под *игрой* в этом контексте подразумевается набор правил, которые определяют, как могут действовать игроки и каков их выигрыш в зависимости от выбранных действий. Игра состоит из *ходов*; в игре „две монетки“ у каждого игрока имеется только по одному ходу. Каждая реализация игры называется *партией*.

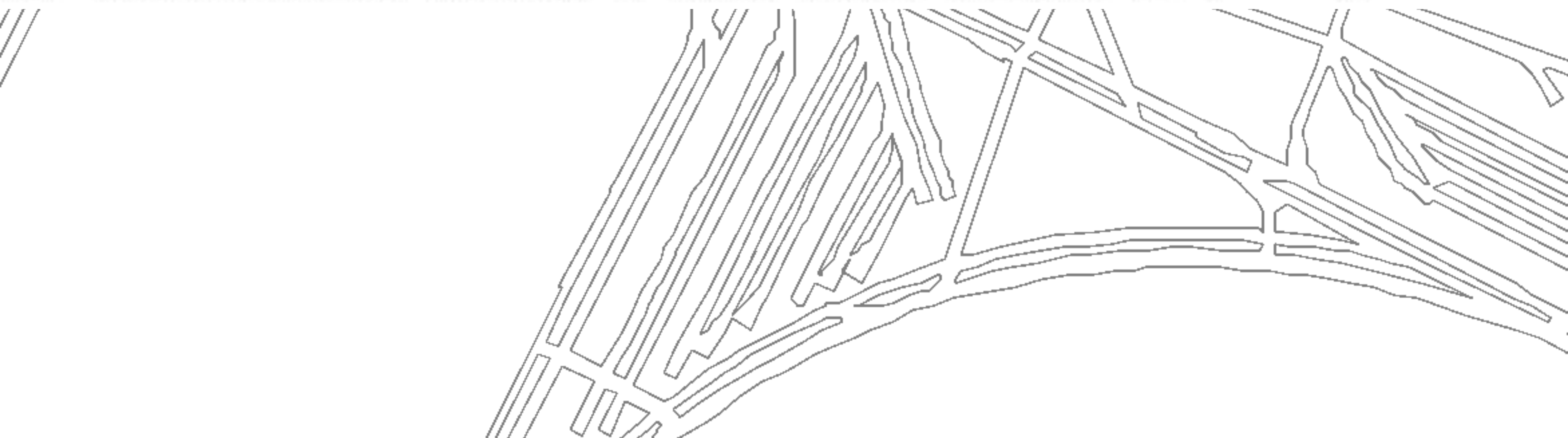


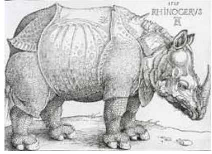
Характерная черта игр, охватываемых этой теорией, состоит в следующем: выигрыш или проигрыш каждого игрока зависит не только от его собственных действий, но и от действий его противника. Совершенно очевидно, что эта особенность проявляется также в некоторых задачах экономики, например на аукционе или на фондовой бирже; она характерна также для военных действий.





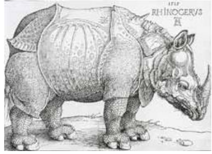
Один из типов игр — так называемые игры Блотто — навеян формализованной военной ситуацией. Вот весьма простой пример такой игры |: генерал A командует четырьмя, а полковник $Б$ (Блотто) пятью ротами. Генерал может подойти к городу по двум различным дорогам и каждую роту может послать по любой из дорог. Полковник может приказать любой роте оборонять любую дорогу. A выигрывает в том случае, если на какой-нибудь дороге у него будет больше рот, чем у Блотто.





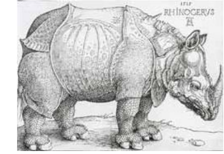
СТРАТЕГИЯ

Естественно предположить, что в играх, где игрок имеет более одного хода, каждый игрок делает выбор хода в зависимости от положения в партии. Однако часто удобнее считать, что игроки заранее определяют свое поведение при всех возможных в дальнейшем обстоятельствах. Совокупность (полученных) выборов при всех возможных ситуациях называется *стратегией*. Если у игрока имеется только один ход, то стратегия совпадает с ходом.

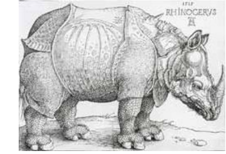


БЛЕФ

В качестве иллюстрации рассмотрим очень простую игру[1]) с „блефом“. Этот термин означает следующее: при неудачном для него раскладе игрок предлагает высокую ставку для того, чтобы противник, подумав, что у него хороший расклад, отказался от действий, которые привели бы его (противника) к успеху. Это описание не может служить формальным определением блефа, которое трудно дать для всех случаев сразу. Но читатель поймет этот термин, если вспомнит о таких популярных играх, как покер или бридж[2]).



Наша игра состоит в следующем: с равной вероятностью игрок A получает одну из двух возможных карт, „старшую“ или „младшую“. Если игрок получил старшую карту, то он должен предложить ставку в 2£[3]). Если A получил младшую карту, то он может уплатить 1£ или предложить ставку в 2£. B может при желании вступить в игру. Если он этого не делает, то уплачивает A 1£. Вступая в игру, B выигрывает 2£, если у A младшая карта, и теряет 2£, если у A старшая карта.



СЛУЧАЙНЫЙ ХОД

В этой игре продемонстрирован так называемый ***случайный ход***, т. е. ход, результат которого зависит от случая. Именно, случайный ход представляет сдача первой карты игроку A. Построим теперь стратегии этой игры и проанализируем их результат.

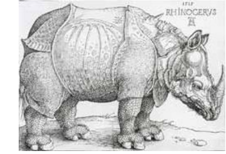
Стратегии игрока A:

Если карта старшая, предложение ставки обязательно, если же карта младшая, то A может либо заплатить 1£ (стратегия A_1), либо предложить ставку в 2£ (игрок A блефует, стратегия A_2).

Стратегии B:

Если A платит 1£, то B может только принять его. Но если A предлагает ставку, то B может либо вступить в игру (стратегия B_1), либо не вступать (стратегия B_2).

НОРМАЛИЗАЦИЯ



Результаты подсчитываются следующим образом:

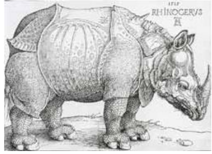
(A_1, B_1). Если A получил младшую карту, то он платит 1£. Если у A старшая карта, то он ставит 2£ и при вступлении B в игру выигрывает 2£. Вероятность каждого из этих событий $^1/_2$, следовательно, средний выигрыш A равен 10 ∤.

(A_1, B_2). Если A получил младшую карту, то он уплачивает 1£. Если у A старшая карта, то он ставит 2£ и B платит 1£. Средний выигрыш равен 0.

(A_2, B_1). Если A получил младшую карту, то он ставит 2£ и при вступлении B в игру теряет 2£. Если же A получил старшую карту, то он ставит 2£ и при вступлении B в игру выигрывает 2£. Средний выигрыш, таким образом, равен нулю.

(A_2, B_2). Если A получил младшую карту, то он ставит 2£ и B уплачивает 1£. Если A получил старшую карту, то он ставит 2£ и уплачивает 1£. Таким образом, выигрыш A равен 1£.

Приведение структуры игры к стратегиям называется *нормализацией*.



ИГРЫ N-ЛИЦ

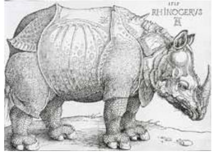
КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

КОАЛИЦИИ

Обобщая далее, можно представить себе *игры n лиц*, в которых принимают участие *n* противников. Такие игры могут быть играми как с нулевой, так и с ненулевой суммой в зависимости от баланса всех выигрышей в конце каждой партии. В настоящее время можно сказать, что теория игр содержит тем меньше результатов, чем к более широким ее обобщениям мы переходим.

будем рассматривать только игры двух лиц, но мимоходом отметим, что существуют два типа игр с *n* игроками, которые называются соответственно *кооперативными* и *некооперативными*[1]). Первые рассматриваются в книге Неймана и Моргенштерна [24], и их отличительная особенность состоит в возможности образования *коалиций* вне игры в узком смысле слова. Участники коалиции заранее согласовывают стратегии, которые они будут использовать в игре.

МАТРИЦА ВЫИГРЫШЕЙ

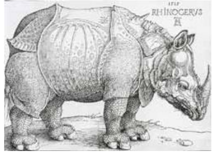


Рассмотрим более хитроумную игру, чем „две монетки". Ее правила таковы:

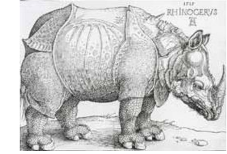
A и B выбирают независимо друг от друга одно из значений -1, 0 или 1. Обозначим значение, выбранное A, через s, а выбранное B — через t. Сумма, которую B уплачивает A, есть $s(t-s)+t(t+s)$. Какое бы значение ни выбрал игрок A, он не может рассчитывать с уверенностью на определенный результат, поскольку последний зависит и от выбора, сделанного B. Для того чтобы получить полную картину всех возможностей, запишем средние возможные результаты в таблицу, которая называется *таблицей выигрышей* или *матрицей выигрышей* и в данном случае выглядит так:

		B выбирает $t =$		
		-1	0	1
A выбирает $s =$	-1	2	-1	-2
	0	1	0	1
	1	-2	-1	2

МАКСИМИЗИРУЮЩИЙ ИГРОК

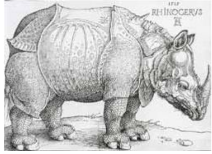


Каждой комбинации выборов, произведенных игроками A и B, соответствует клетка таблицы, в которую мы записываем выигрыш игрока A (или, что то же самое, проигрыш B) при данной комбинации. Как это общепринято, будем всегда предполагать, что в таблице записаны выигрыши игрока A. Мы будем также называть его *первым* или *максимизирующим* игроком, а его противника — *вторым* или *минимизирующим* игроком. Последний будет стараться иметь дело с возможно меньшими элементами таблицы, так как его выигрыши равны элементам таблицы, взятым с обратным знаком. Если какой-нибудь элемент отрицателен, то первый игрок проигрывает, а второй выигрывает абсолютную величину указанного элемента.

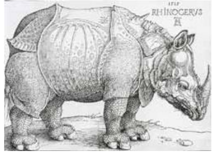


Ясно видно, насколько выигрыш игрока *A* зависит от выбора, сделанного игроком *B*. Безусловно, ни один из игроков не знает (не плутуя) того, что собирается сделать другой. В теории игр предполагается, что оба игрока рассуждают следующим образом.

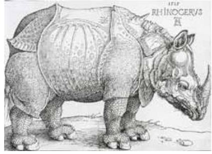
Какой бы выбор я ни сделал, мне приходится опасаться, что мой противник осуществит такой выбор, при котором мой выигрыш (или средний выигрыш, если существуют случайные ходы) будет наименьшим из возможных при данных обстоятельствах. Следовательно, если я произведу выбор, при котором этот наименьший выигрыш окажется возможно бо̀льшим, то моя безопасность будет настолько обеспечена, насколько это вообще возможно в данных обстоятельствах.



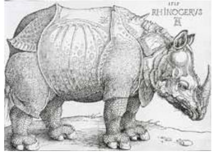
Если оба игрока рассуждают столь осторожно (или, если угодно, по-капитулянтски), то в приведенной игре игрок A замечает, что он выигрывает по меньшей мере -2, 0 или -2 в соответствии с тем, выбрал ли он $s=-1$, 0 или 1. Следовательно, A будет выбирать $s=0$, ибо это обеспечивает ему наибольший из этих „гарантированных" выигрышей. B, рассуждая аналогично, выберет $t=0$. Тогда фактический выигрыш каждого из игроков будет равен 0.



Поставим вопрос: как поступили бы A и B, если бы каждый из них знал решение, принятое противником, или вернее, если бы они считали, что противник рассуждает и действует в соответствии со всем вышесказанным.

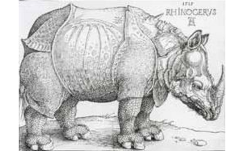


Если игрок A считает, что B по этой (или по какой-нибудь иной) причине выбрал 0, то он сам также выберет 0, так как во втором столбце, который соответствует выбору 0 игроком B, именно 0 является наибольшим элементом. Следовательно, A должен будет принять в точности то же самое решение, к которому его привели ранее изложенные соображения. Аналогично (это видно из таблицы) на решение, принятое игроком B, не окажут влияния даже дополнительно полученные им сведения о том, что A выбрал 0. Мы видим, что приближение „второго порядка", т. е. предположение, что противник действует в соответствии с теоретико-игровой точкой зрения, не побудит ни одного из игроков изменить решение „первого порядка", принятое на основе этой точки зрения.



СЕДЛОВАЯ ТОЧКА

Эта особенность приведенной игры связана с тем обстоятельством, что в матрице выигрышей существует элемент, который является наименьшим в своей строке и в то же время наибольшим в своем столбце. Такой элемент часто называют, по очевидной геометрической аналогии, *седловой точкой*.

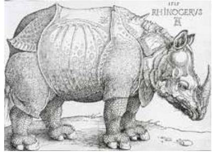


Конечно, не каждая игра двух лиц с нулевой суммой имеет седловую точку. Простым контрпримером может служить игра „две монетки". Еще один такой пример дает следующая игра.

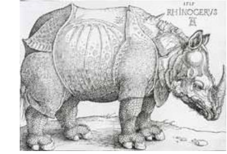
Два игрока независимо друг от друга выбирают одно из чисел 1, 2 или 3. Если оба выбрали одно и то же число, то A платит B сумму в размере выбранного числа. В противном случае A получает от B сумму, равную числу, им выбранному. Таблица выигрышей этой игры „на ускользание" следующая:

		B 1	B 2	B 3
A	1	—1	1	1
A	2	2	—2	2
A	3	3	3	—3

Минимум максимальных элементов столбцов (равный 2) отличен от максимума минимальных элементов столбцов (— 1). Отсюда следует, что в приведенной игре нет седловой точки; это почти очевидно,



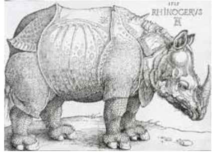
Мы должны найти метод „решения“ таких игр и прежде всего, конечно, должны условиться относительно того, что мы будем понимать под „решением“.



В таком простом примере, как „две монетки“, легко видеть, что должен делать каждый игрок. Если игра проводится один раз, то ни один из ходов не лучше другого. Однако при многократном повторении игры было бы ошибкой оказывать предпочтение только гербу или только решетке, так как, используя такую тенденцию, противник легко мог бы получить преимущество. Следовательно, играя длительное время, необходимо с одинаковой частотой использовать герб или решетку, причем так, чтобы противник не мог угадать последующий ход.

Эти соображения одинаково применимы к обоим игрокам, и мы принимаем, что оба игрока поступают соответственным образом. Играя достаточно долго, каждый из игроков в половине партий будет выигрывать 1, а в половине партий — проигрывать 1. Таким образом, в среднем они будут выигрывать 0.

Подвергнем этот результат такому же анализу, какой был применен для игр с седловой точкой. Допустим, что A знает (или думает, что он знает), что B будет с равной частотой использовать обе возможные стратегии. При таком положении у игрока A нет оснований изменять решение „первого порядка“, т. е. выбор возможностей с равной частотой. Фактически A может теперь выбрать какие угодно частоты, не изменяя среднего выигрыша. Однако было бы неблагоразумно для него изменять свою стратегию, так как B может наказать его за это. Та же аргументация применима к игроку B.



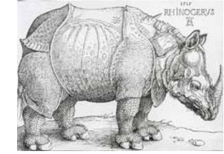
СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

РЕШЕНИЕ ИГРЫ

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ

Мы показали, что если ввести комбинации стратегий с данными частотами, то свойство устойчивости, которым обладают игры с седловой точкой, имеется также и в других играх. Такие комбинации называются *смешанными стратегиями*, а отдельные стратегии, которые соответствуют номерам различных столбцов (или строк) матрицы выигрышей, будут называться *чистыми*. Чистые стратегии представляют собой, очевидно, частный случай смешанных стратегий, когда равны нулю относительные частоты всех чистых стратегий, кроме одной, а эта последняя используется все время. Поэтому всякий раз, когда говорится о стратегиях, имеются в виду смешанные стратегии, если не оговорено противное.

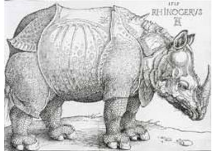
Пара стратегий с описанным свойством устойчивости называется *решением* (строгое определение см. в п. 3 гл. III). Стратегия, фигурирующая в решении, называется *оптимальной*.



Для иллюстрации этого понятия на другом примере рассмотрим введенную ранее игру с блефом. Ее таблица выигрышей такова:

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	$1/2$	0
	A_2	0	1

Решение этой игры следующее: A должен использовать первую чистую стратегию вдвое чаще, чем вторую, B должен поступать таким же образом. Мы можем записать это проще, указывая относительные частоты чистых стратегий ($2/3$, $1/3$) (для каждого игрока). Это действительно является решением, так как ни один игрок (если противник придерживается своей стратегии) не может улучшить свое поведение, но может выиграть (игрок A) меньше или потерять (игрок B) больше чем $1/3$ (то, что он имеет в решении), если он отклонится от оптимальной стратегии и его противник воспользуется этим. Между прочим, интересно отметить, что блеф, характерный для второй чистой стратегии игрока A, в его оптимальной стратегии в действительности используется один раз из трех.



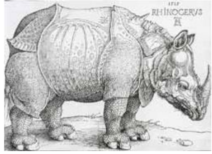
ЗНАЧЕНИЕ ИГРЫ

Игра может иметь более одного решения. Так, например, игра с таблицей выигрышей

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

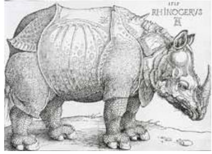
имеет решение $(^1/_3, {}^2/_3)$ для A и $(0, 1, 0)$ для B, а также второе решение $(^2/_3, {}^1/_3)$ для A и снова $(0, 1, 0)$ для B.

Все такие пары определяют один и тот же выигрыш. Выигрыш, определяемый решением, называется *значением* игры.



ОСНОВНОЙ ФАКТ ИГРЫ

Мы уже знаем, что не каждая игра имеет седловую точку. Однако, и это есть основной факт теории игр, всякая игра двух лиц с нулевой суммой и с конечным числом стратегий имеет решение, которое, возможно, использует смешанные стратегии одного или обоих игроков.



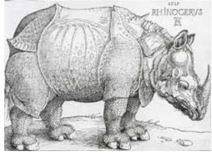
ВПОЛНЕ СМЕШАННАЯ ИГРА

Игра, в которой оба игрока в своих оптимальных решениях используют все свои стратегии, называется *вполне смешанной* (см. Капланский [13]). Такими играми являются „две монетки“ и игра с блефом; таковой не является приведенная ниже игра:

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Читатель легко проверит, что у A решением слvжит $(^1/_4, {}^3/_4)$, а у B — $(^1/_2, {}^1/_2, 0)$.

ДОМИНИРОВАНИЕ



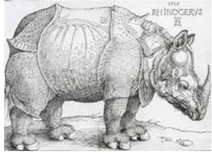
$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Эта игра иллюстрирует также понятие *доминирования*. Мы говорим, что одна чистая стратегия игрока доминирует другую чистую стратегию того же игрока, если при любом выборе противника первая стратегия не хуже второй и хотя бы для одного выбора определенно лучше. Вышеприведенная матрица выигрышей показывает, что *B* поступал бы неразумно всякий раз, когда он выбирал бы свою третью стратегию, которую доминирует вторая. В связи с этим не является неожиданным неучастие третьей чистой стратегии в оптимальной стратегии *B*. Эту стратегию можно было не учитывать с самого начала.

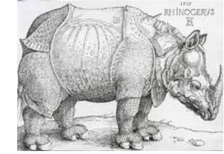
Нужно понять, однако, что даже доминируемая стратегия может быть оптимальной. Например, в игре

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

имеется два решения: (1, 0) для A и (1, 0) для B, а также (0, 1) для A и опять (1, 0) для B. Таким образом, обе чистые стратегии игрока A оптимальны, хотя вторая доминирует первую.



- **Q22**
- **Геометрическая интерпретация игры. Графические способы решения матичных игр.**



ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

1. Дадим графическое представление понятий, используемых в теории игр, которое будет полезно читателям, предпочитающим мыслить геометрически. Имея в виду изображение на двумерной плоскости, ограничимся играми, в которых один из двух игроков имеет в своем распоряжении только две чистые стратегии.

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Приведем геометрические модели как для игрока A, так и для игрока B, причем будем предполагать, что первый имеет две чистые

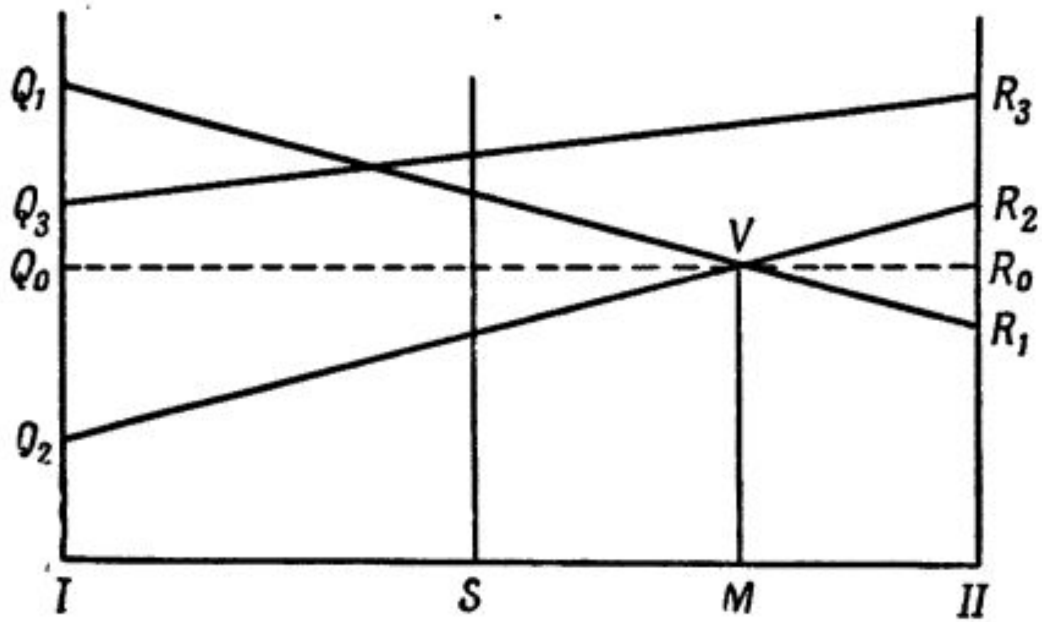


Рис. 1.

стратегии.

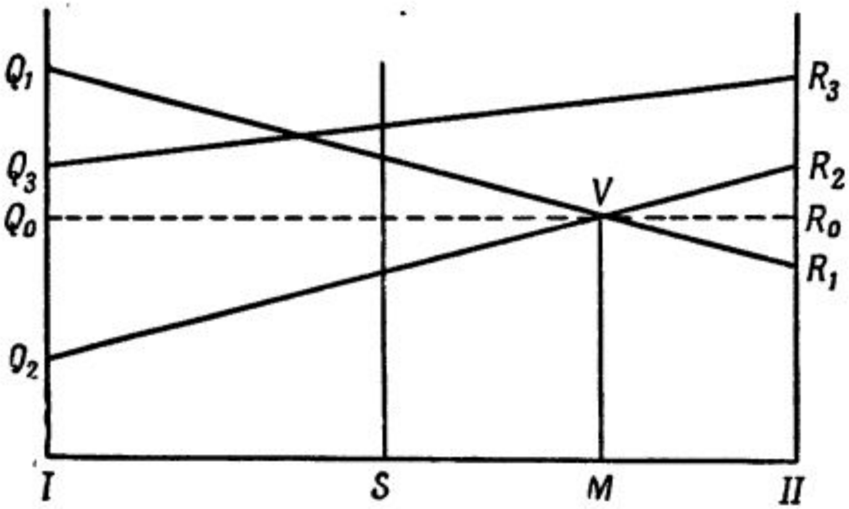


Рис. 1.

Предположим теперь, что A избрал смешанную стратегию, соответствующую точке S на чертеже. Что бы ни предпринял B, игрок A во всяком случае получит сумму, которая соответствует ординате первой (самой низкой) точки пересечения вертикали, проведенной из S, с линией, соответствующей одной из стратегий игрока B (в данном случае это вторая стратегия). Такая ордината может быть найдена для любой точки отрезка $I — II$, и в соответствии с теорией игр A должен выбирать точку, которая максимизирует эту ординату. Поэтому здесь игрок A должен выбрать стратегию, изображенную точкой M. Точка M находится на расстоянии $^3/_4$ от I и $^1/_4$ от II Таким образом, как мы уже видели в п. 3 гл. I, стратегия A есть $(^1/_4, {}^3/_4)$. Эта стратегия дает игроку A выигрыш 2,5, который равен ординате точки V, расположенный над M, а также равен значению игры.

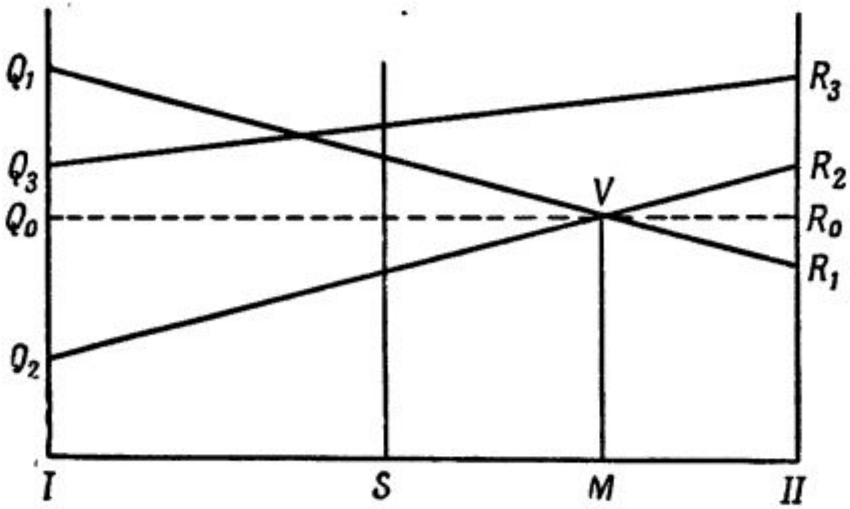


Рис. 1.

Чертеж также показывает, что B не должен использовать свою третью чистую стратегию, так как ее линия всюду выше линии второй стратегии. Какая из оставшихся стратегий для игрока B лучше, зависит от выбора A; если A выбирает точку M, то любая комбинация двух первых чистых стратегий игрока B приводит к одному и тому же выигрышу.

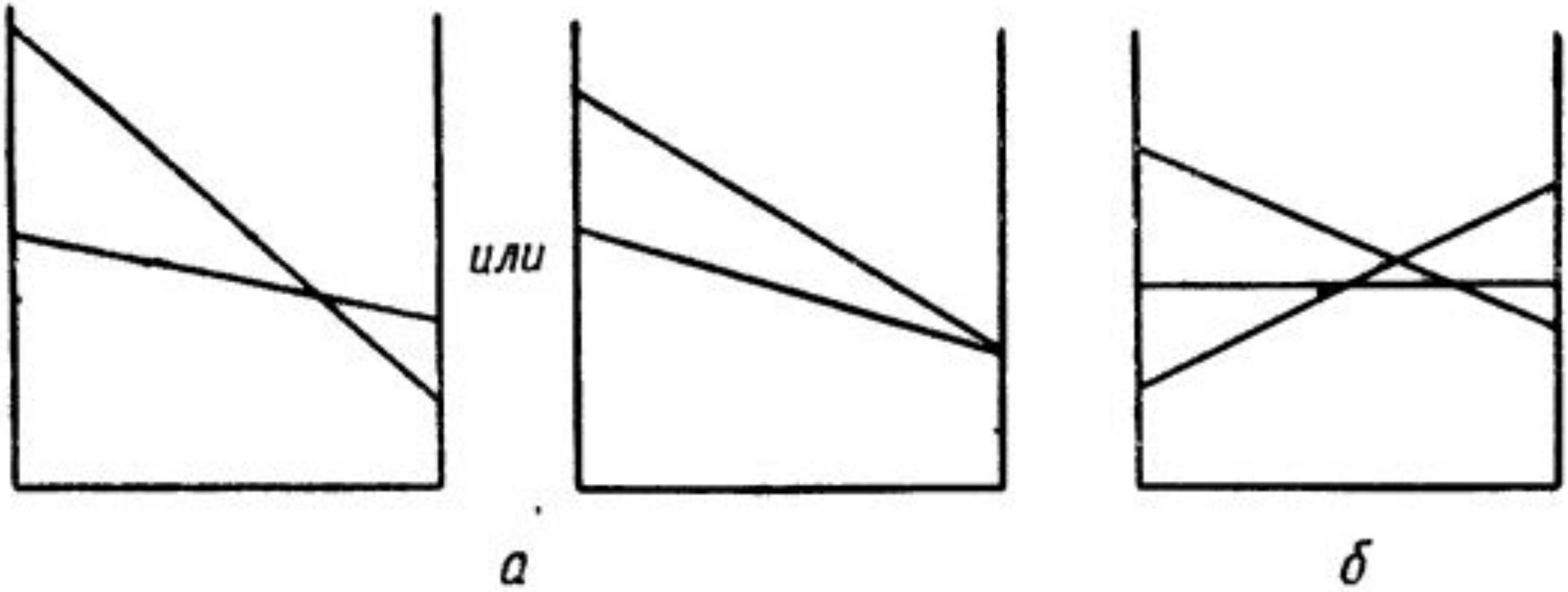
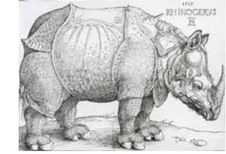


Рис. 2.

Читатель должен иметь в виду, что характер линий стратегий может существенно отличаться от того, что мы имели в приведенном примере; в частности, отметим два случая: (*а*) когда существует оптимальная чистая стратегия и (*б*) когда у игрока *А* имеется более чем одна оптимальная стратегия. Эти случаи проиллюстрированы на рис. 2.



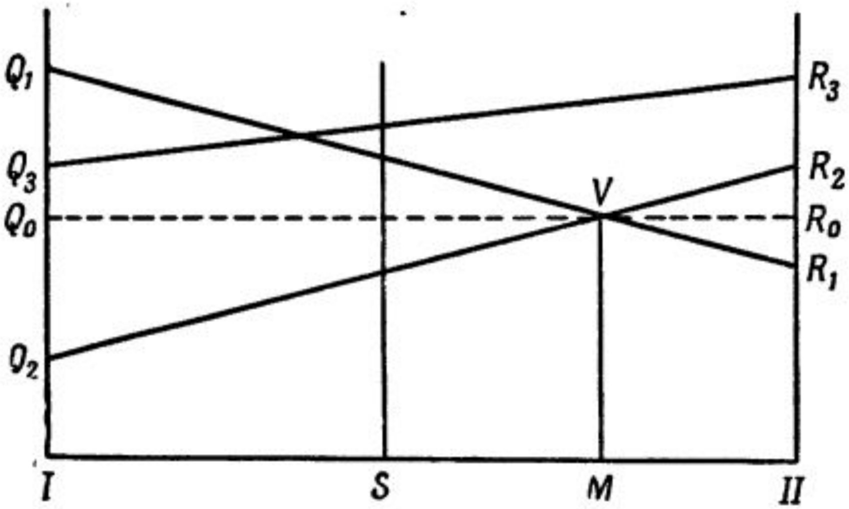
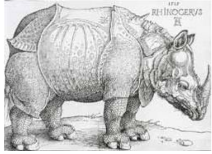


Рис. 1.

Оптимальная смешанная стратегия для B характеризуется тем, что выигрыш остается неизменным независимо от поведения A. Следовательно, смешанную стратегию для B можно найти, проведя через V прямую Q_0R_0 параллельно $I - II$ и подсчитав отношение Q_0Q_1/Q_0Q_2 или R_0R_1/R_0R_2 (см. рис. 1). Эти отношения равны между собой в силу свойств подобных треугольников, и они, очевидно, равны отношению частот, с которыми используются чистые стратегии в оптимальной смеси.



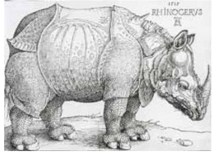
Игры 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

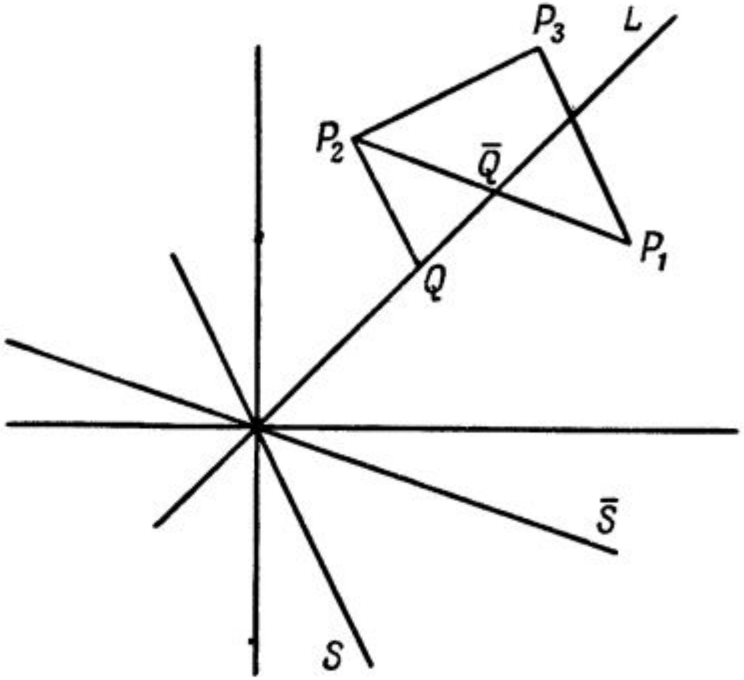
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



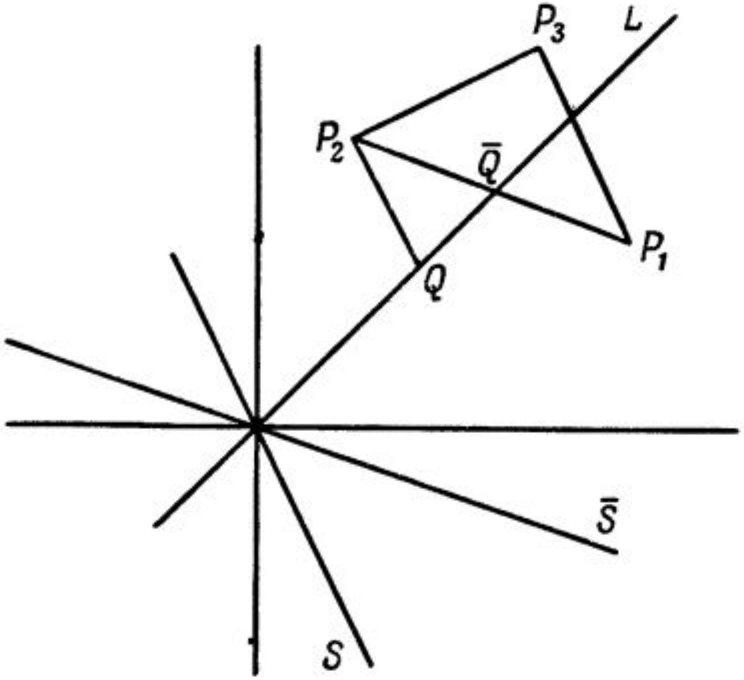
Игры 2×3

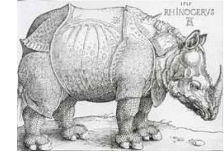
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	18	1	$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(0, 1, 0)$
$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	19, 21, 23, 47, 93, 95, 98	$\frac{5}{2}$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$
$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	25	2	$(1, 0)$	$(1, 0, 0)$
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	25	3	$(1, 0)$	$(1, 0, 0)$



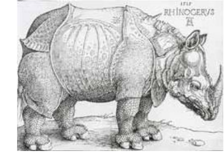
введем другой метод, преимущество которого состоит в том, что он дает общую картину, относящуюся одновременно к обоим игрокам (по-прежнему принимается, что один из игроков выбирает только из двух чистых стратегий).

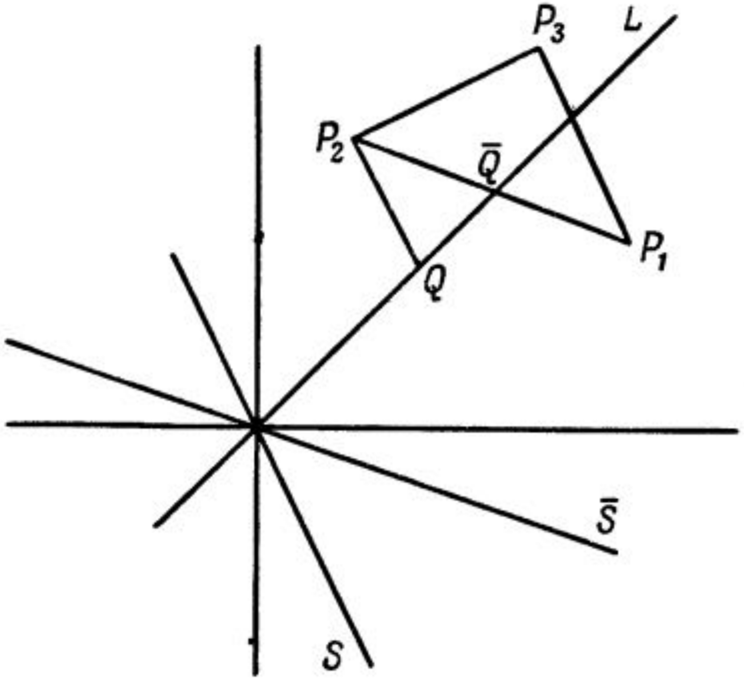
В этой новой интерпретации стратегия игрока B изображается точкой, координаты которой равны выигрышам, полученным при этой стратегии против двух чистых стратегий игрока A. В нашем иллюстративном примере такими точками, соответствующими чистым стратегиям игрока B, будут $P_1=(4,\ 2)$, $P_2=(1,\ 3)$ и $P_3=(3,\ 4)$.



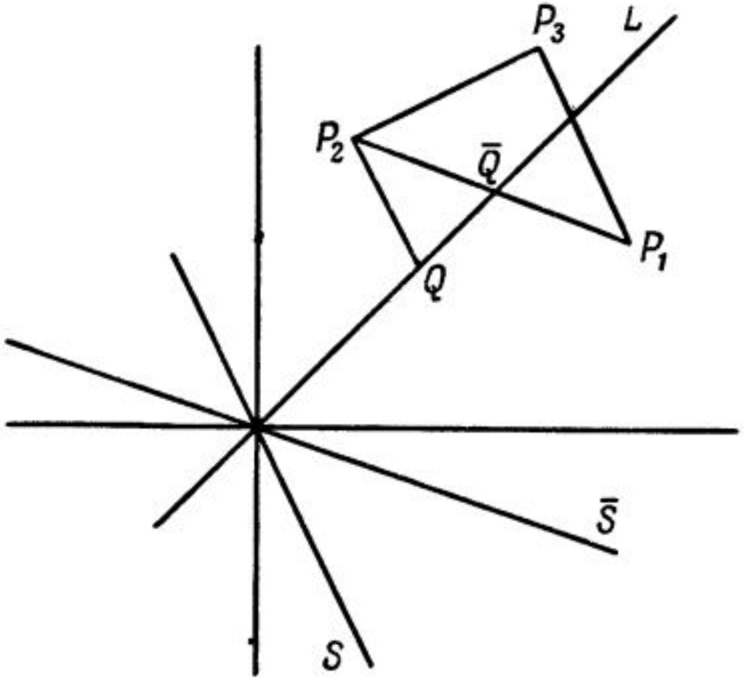


Если B использует некоторую смесь $pP_1 + qP_2 + rP_3$ (обозначение понятно само собой), то выигрыш игрока A есть взвешенное среднее выигрышей против каждой из чистых стратегий игрока B (весами являются числа p, q и r, в сумме дающие 1). Следовательно, стратегия (p, q; r) игрока B изобразится точкой, абсцисса и ордината которой равны соответственно взвешенным средним абсцисс и ординат точек P_1, P_2, P_3 — чистых стратегий игрока B. Поэтому построим для игрока B „многогранник стратегий" [1])

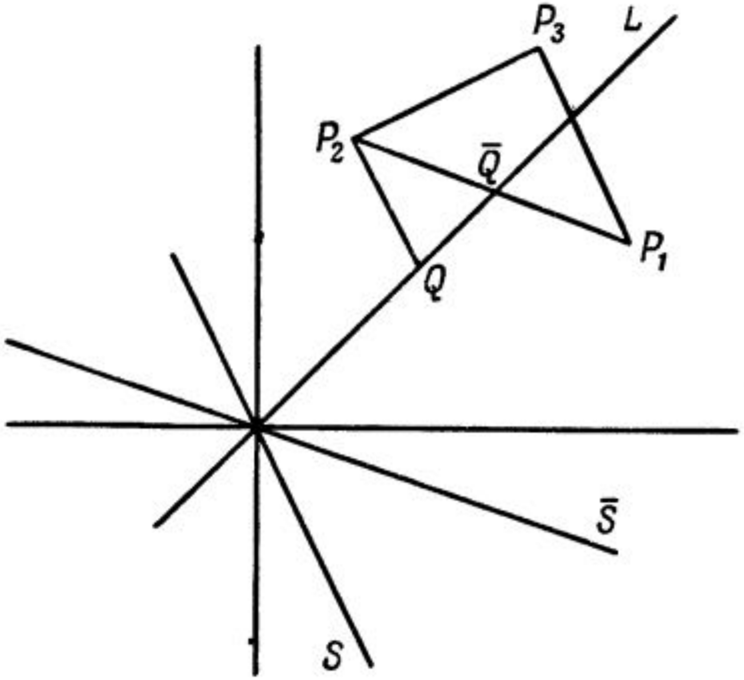


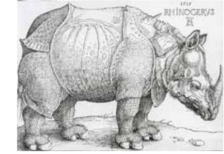


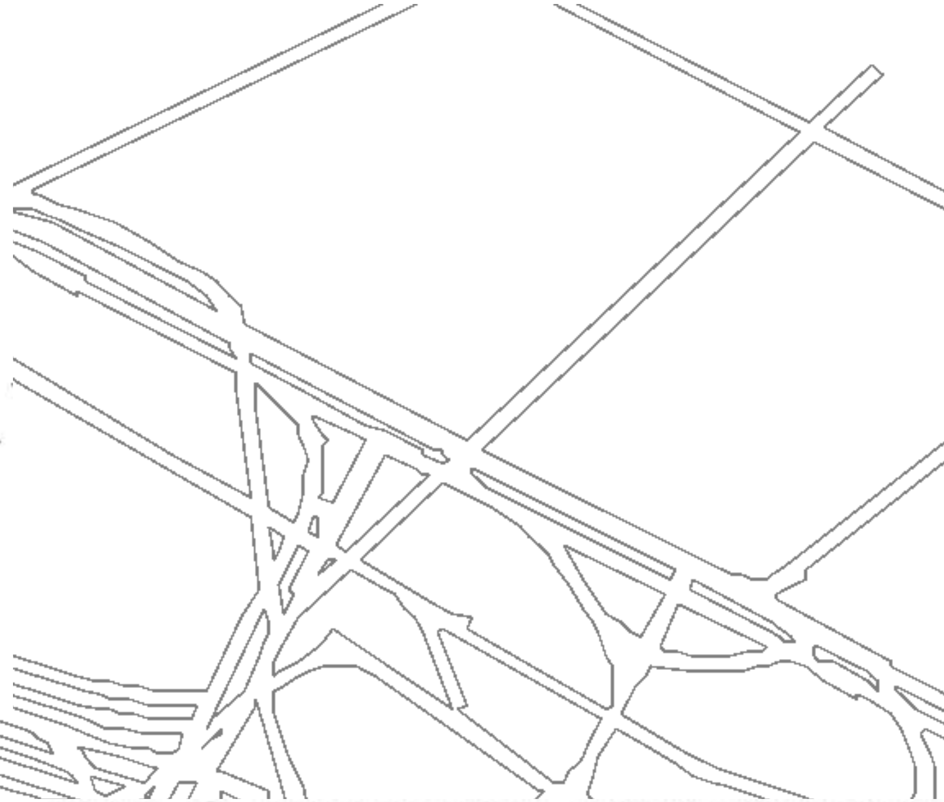
Пусть прямая L есть биссектриса первого (и третьего) квадранта. Если точка стратегии B находится под L, то A должен выбрать свою первую чистую стратегию; если над L, то вторую чистую стратегию. Если же точка находится на L, то A получит одну и ту же сумму независимо от выбранной стратегии (чистой или смешанной). Игрок B должен избрать ту точку многогранника, которая доставляет наименьший выигрыш A, т. е. точку, бо́льшая координата которой имеет наименьшее значение.



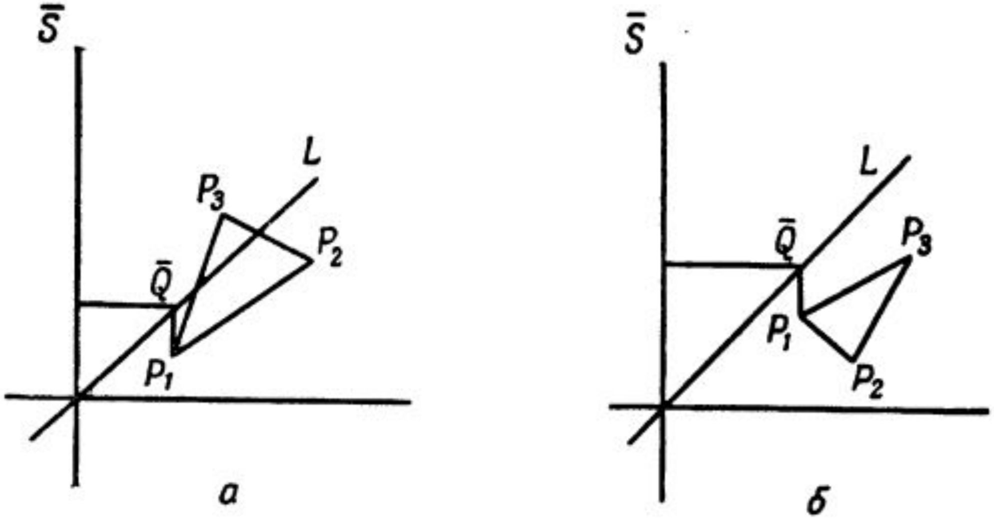
Для того чтобы найти точку стратегии игрока B геометрически, представим себе прямой угол, вершина которого находится на L, левее и ниже многогранника, а направления сторон противоположны положительным направлениям координатных осей [1]), и пусть этот угол движется вправо вверх до тех пор, пока он не достигнет многогранника. Точка соприкосновения (или одна из них) указывает оптимальную стратегию B.

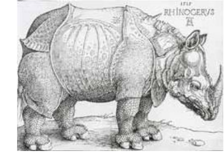




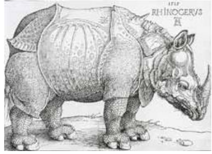


если L пересекает многогранник и точка пересечения с наименьшей абсциссой или ординатой находится на ребре с отрицательным наклоном (т. е. на ребре с наклоном вправо вниз), то она определяет оптимальную стратегию игрока B ($\bar{Q}$ на рис. 3). Однако если какое-либо из этих условий не выполнено, то стратегию игрока B указывает одна из вершин.

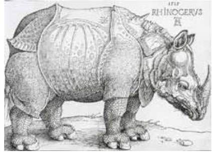




В этом случае, как это видно из рис. 4, стратегия игрока B будет чистой. Можно описать это построение следующим образом: мы чертим нижнюю горизонталь и левую вертикаль, опорные к многограннику [2]). Если биссектриса пересекает первой одну из этих опорных прямых, то решение содержит чистую стратегию игрока B, определяемую той вершиной, из которой исходит указанная горизонталь или вертикаль.



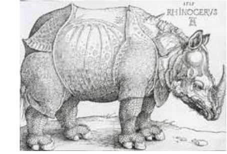
- **Q23**
- **Алгебра теории игр. Определение минимакса и максимина. Теорема о минимаксе.**



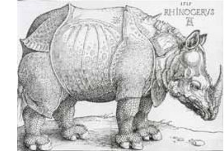
Алгебра теории игр

Пусть игроки A и B имеют соответственно n и m стратегий. Если A использует i-ю, а B свою j-ю стратегию, то выигрыш обозначим через a_{ij}. Обозначим через $x=(x_1, \ldots, x_n)$ смешанную стратегию игрока A, если он использует свои чистые стратегии в отношении $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$, где $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Аналогично смешанная стратегия B обозначается через $y=(y_1, \ldots, y_m)$, где $y_1 + \ldots + y_m = 1$. При использовании обозначений x и y всегда будем считать, что $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ неотрицательны.

Если A и B выбирают соответственно стратегии x и y, то средний выигрыш равен $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij}$.



Выясним, как должны выбираться стратегии. Если A выбрал, например, стратегию $\bar{x}$, то он должен опасаться, что B изберет такую стратегию y, которая делает выражение $\sum_i \sum_j \bar{x}_i y_j a_{ij}$ наименьшим. Если B может сделать это, используя смешанную стратегию, то этого же он может добиться с помощью по крайней мере одной чистой стратегии, так как выигрыш является взвешенным средним величин $\sum_i \bar{x}_i a_{ij}$ с положительными весами y_j $\left(\sum y_j = 1\right)$ и, следовательно, этот выигрыш не может быть меньше, чем наименьшая из сумм $\sum_i \bar{x}_i a_{ij}$.



Таким образом, A должен исследовать только чистые стратегии игрока B и для любой своей стратегии отметить ту стратегию B, которой соответствует наименьший выигрыш. При данной стратегии $\bar{x}$ этот наименьший выигрыш равен

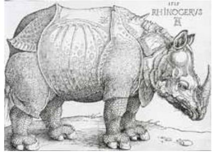
$$\min_{j} \sum_{i} a_{ij} \bar{x}_i = \sum_{i} a_{ij(\bar{x})} \bar{x}_i, \tag{1}$$

где $j(\bar{x})$ обозначает ту стратегию, для которой достигается минимум при данной стратегии $\bar{x}$.

Игрок A хочет сделать этот минимум возможно бо̀льшим. Поэтому он будет выбирать свою стратегию x так, чтобы получить

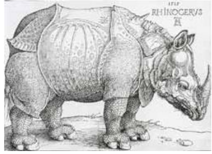
$$\max_{x} \min_{j} \sum_{i} a_{ij} x_i = \max_{x} \sum_{i} a_{ij(x)} x_i = v_1. \tag{2}$$

Введем для v_1 термин *максимин* и отметим, что „чистый“ максимин, т. е. $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$, очевидно, меньше или равен v_1.



очевидно,

$$\max_{x} \min_{j} \sum_{i} a_{ij} x_i \;>=\; \max_{i} \min_{j} a_{ij},$$



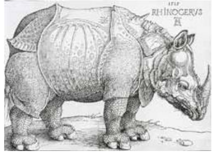
Можно повторить все сказанное, рассуждая с точки зрения игрока B. Начнем с предположения, что B выбирает стратегию $\bar{y}$. Далее он замечает, что A поступит наилучшим образом, избрав стратегию, для которой

$$\max_i \sum_j a_{ij} \bar{y}_j = \sum_j a_{i(\bar{y})j} \bar{y}_j. \tag{3}$$

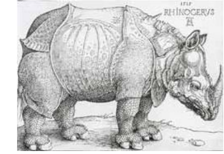
Следовательно, игрок B будет выбирать свою собственную стратегию так, чтобы выигрыш оказался равным

$$\min_y \max_i \sum_j a_{ij} y_j = \min_y \sum_j a_{i(y)j} y_j = v_2. \tag{4}$$

Снова ясно, что „чистый“ *минимакс*, т. е. $\min_j \max_i a_{ij}$, больше или равен v_2.



$$\min_{y} \max_{i} \sum_{j} a_{ij} y_j <= \min_{j} \max_{i} a_{ij},$$



Основная теорема теории игр или теорема о минимаксе утверждает, что v_1 всегда равно v_2. Легко показать, что $v_1 \leqq v_2$, т. е. что максимин никогда не превышает минимакса. Именно, определим $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из условий

$$v_1 = \min_j \sum_i \bar{x}_i a_{ij}$$

и

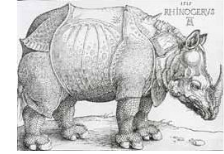
$$v_2 = \max_i \sum_j \bar{y}_j a_{ij};$$

тогда

$$v_1 \leqq \sum_i \sum_j \bar{x}_i \bar{y}_j a_{ij} \quad \text{и} \quad v_2 \geqq \sum_i \sum_j \bar{x}_i \bar{y}_j a_{ij}.$$

Правые части неравенств равны, и поэтому $v_1 \leqq v_2$. Таким образом, теорема о минимаксе будет доказана, если мы установим, что $v_1 \geqq v_2$.

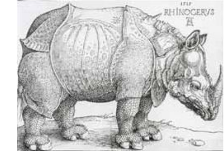
Отсюда также следует, что если чистый максимин равен чистому минимаксу (т. е. если существует седловая точка; эквивалентность этих двух утверждений будет показана в п. 3), то они оба равны $v = v_1 = v_2$.



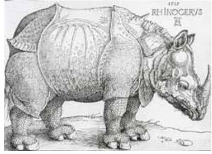
Теорема о минимаксе будет доказана в следующем пункте. Предполагая, что она верна, из (1) и (3) заключаем, что

$$\sum_i \sum_j a_{ij}\bar{x}_i\bar{y}_j = \sum_i a_{ij(\bar{x})}\bar{x}_i = \sum_j a_{i(\bar{y})j}\bar{y}_j.$$

Стратегии $\bar{x}$ и $\bar{y}$ были выбраны так, чтобы обеспечить наилучшую защиту соответственно от чистых стратегий $j(\bar{x})$ и $i(\bar{y})$. Приведенные уравнения показывают, что эти стратегии обеспечивают также наилучшую защиту друг от друга. Следовательно, для того чтобы терпеть возможно меньший убыток, когда A выбирает $\bar{x}$, игрок B не обязан выбирать $j(\bar{x})$, а с тем же успехом может выбрать стратегию $\bar{y}$, причем, как правило, $\bar{y}$ будет смешанной стратегией. Но это утверждение будет верно только тогда, когда каждая чистая стратегия, входящая в $\bar{y}$, определяет совместно с $\bar{x}$ тот же выигрыш, что и чистая стратегия $j(\bar{x})$.



Тем не менее нельзя утверждать, что B вообще может использовать либо $\bar{y}$, либо $j(\bar{x})$ и равнодушно взирать на выбор игрока A. Напротив, он может оставаться равнодушным, только выбрав $\bar{y}$, так как в противном случае A может уклониться от своей оптимальной стратегии и получить больше, чем минимакс v_2.



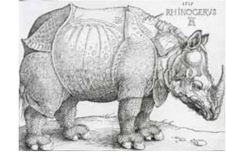
Теорема о минимаксе

Итак, наша задача состоит в том, чтобы доказать равенство $v_1 = v_2$, причем уже известно, что достаточно установить неравенство $v_1 \geqq v_2$.

Доказательство теоремы следует из двух лемм, к изложению которых мы и переходим.

Лемма 1 (Теорема об опорной гиперплоскости). Пусть даны величины a_{ij} ($i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$). Набор $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ назовем точкой A_j n-мерного пространства. Будем говорить, что точка $A=(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит *выпуклой оболочке* точек $A_1, \ldots, A_m$, если можно найти такие неотрицательные числа $t_1, \ldots, t_m$, в сумме равные 1, что для всех $i=1, \ldots, n$

$$a_i = t_1 a_{i1} + \ldots + t_m a_{im}.$$



Теорема об опорной гиперплоскости (в той форме, в какой она нам понадобится) утверждает, что если точка $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ не принадлежит выпуклой оболочке точек $A_1, \ldots, A_m$, то можно найти числа $s_1, \ldots, s_n$, такие, что для любой точки A, принадлежащей выпуклой оболочке, будет выполнено неравенство

$$s_1a_1+\ldots+s_na_n>0.$$

Для $n=2$ или 3 это интуитивно ясно (см. рис. 5). Так как гиперплоскость есть обобщение прямой и плоскости на случай большего числа измерений, то эти частные случаи делают понятным название теоремы.

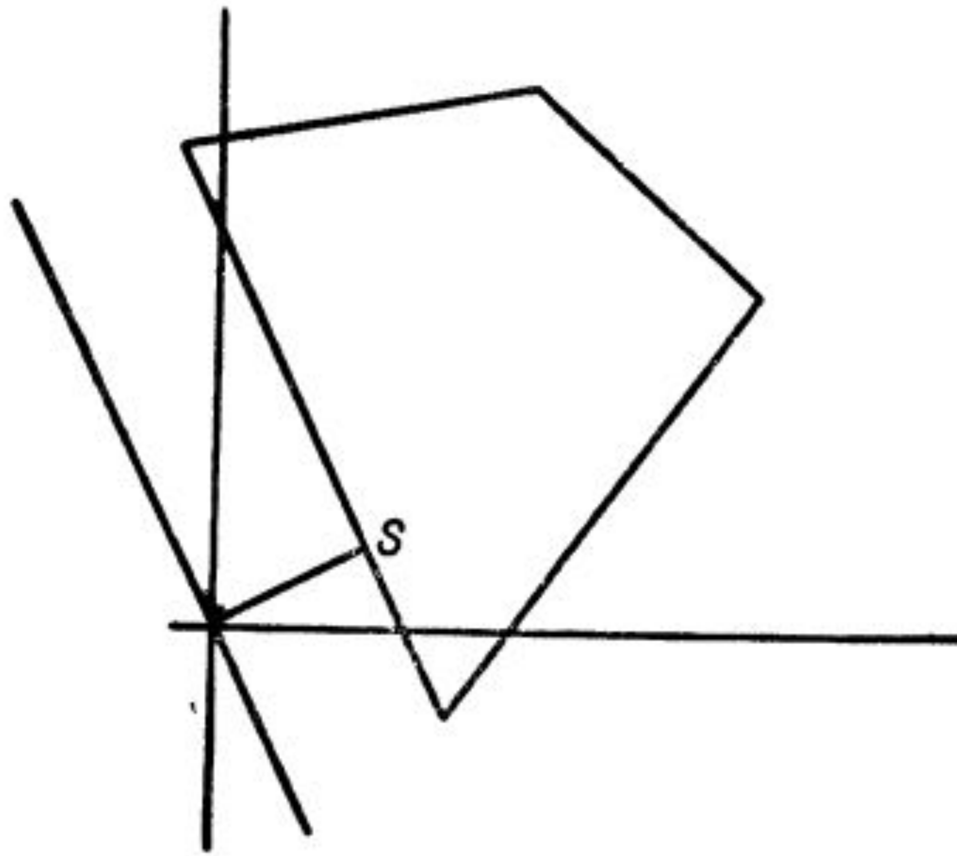
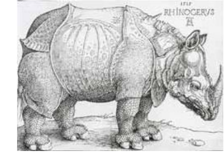


Рис. 5.



Приведем теперь доказательство леммы для произвольного n.

Пусть $\mathbf{0}$ не принадлежит выпуклой оболочке C. Тогда в C существует отличная от $\mathbf{0}$ точка, для которой квадрат „расстояния от $\mathbf{0}$“, т. е. сумма квадратов координат этой точки, является наименьшим. Пусть это будет точка $S=(s_1, \ldots, s_n)$. Рассмотрим в C произвольную точку $A=(a_1, \ldots, a_n)$. Точка с координатами $ta_i+(1-t)s_i$ для каждого $t\in[0, 1]$ будет также принадлежать C. Более того, она будет находиться по меньшей мере на таком же расстоянии от $\mathbf{0}$, как точка S, т. е.

$$\sum_i [ta_i+(1-t)s_i]^2 \geqq \sum_i s_i^2.$$

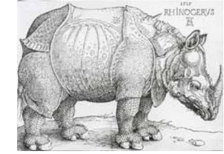
После элементарных алгебраических преобразований получим, что при $t>0$

$$2\sum_i s_i(a_i-s_i)+\sum_i (a_i-s_i)^2 t \geqq 0.$$

При $t\to 0$ неравенство принимает вид

$$\sum_i s_i(a_i-s_i)\geqq 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_i s_i a_i \geqq \sum_i s_i^2 > 0,$$

так как точка S отлична от $\mathbf{0}$, что и доказывает теорему.

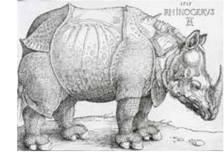


Лемма 2 (Теорема об альтернативах для матриц). Пусть даны величины a_{ij}. Рассмотрим выпуклую оболочку C точек $A_1, \ldots, A_m$ (определенных как и раньше) и точек $(1, 0, \ldots, 0)$; $(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Точка $\mathbf{0}$ либо принадлежит множеству C, либо ему не принадлежит. Теорема об альтернативах для матриц устанавливает, что в первом случае существует такой вектор y, что для всех i

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{im}y_m \leqq 0; \tag{I}$$

во втором случае существует такой вектор x, что для всех j

$$a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n > 0. \tag{II}$$



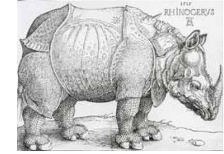
Случай 1. Пусть точка **0** принадлежит C, т. е. существуют такие неотрицательные числа $t_1, \ldots, t_{m+n}$, в сумме дающие единицу, что

$$t_1 a_{i1} + \ldots + t_m a_{im} + t_{m+i} = 0,$$

т. е.

$$t_1 a_{i1} + \ldots + t_m a_{im} = -t_{m+i} \leqq 0.$$

Сумма $t_1 + \ldots + t_m$ должна быть положительна, так как в противном случае все t_i $(i = 1, \ldots, m+n)$ были бы равны 0 и не могли бы в сумме давать 1. Отсюда следует, что $y_j = t_j/(t_1 + \ldots + t_m)$ удовлетворяют неравенству (I).



Случай 2 (рис. 5). Пусть точка $\mathbf{0}$ не принадлежит C. Применяя лемму 1, можно найти такие $(s_1, \ldots, s_n)$, что для всех $j = 1, \ldots, m$

$$s_1 a_{1j} + \ldots + s_n a_{nj} > 0 \quad \text{и} \quad s_1 > 0, \ldots, s_n > 0$$

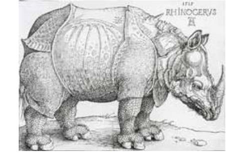
[последнее в силу того, что точки $(1, 0, \ldots, 0)$ и т. д. принадлежат C]. Следовательно, значения $x_i = s_i/(s_1 + \ldots + s_n)$ удовлетворяют неравенству (II). Это доказывает лемму 2 (теорему об альтернативах для матриц).

Теперь используем эту лемму для доказательства основной теоремы. В случае 1 мы имели такой вектор y, что $\sum_j a_{ij} y_j \leqq 0$ для всех i и, следовательно, $\max_i \sum_j a_{ij} y_j \leqq 0$. Поэтому

$$v_2 = \min_y \max_i \sum_i a_{ij} y_j \leqq 0.$$

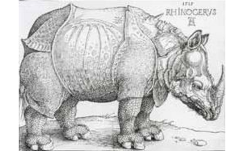
В случае 2 существует такой вектор x, что $\sum_i a_{ij} x_i > 0$ для всех j, и, следовательно, $\min_j \sum_i a_{ij} x_i > 0$. Поэтому

$$v_1 = \max_x \min_j \sum_i a_{ij} x_i > 0.$$



Таким образом, мы показали, что ни в одном случае неравенства $v_1 < 0$ и $v_2 > 0$ не могут выполняться одновременно.

Рассмотрим матрицу выигрышей с элементами $a_{ij} - k$, где k — некоторая произвольная (положительная или отрицательная) постоянная. Применяя к этой матрице полученный результат, убедимся, что не могут оказаться выполненными неравенства $v_1 < k < v_2$. Ввиду произвольности k ясно, что v_1 не может быть меньше, чем v_2, а это и доказывает теорему о минимаксе.

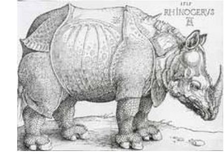


мы ввели понятие *решения* игры. Дадим теперь несколько иное, более формальное определение решения. Ниже будет показана эквивалентность этих двух определений.

Любая пара $\bar{x}$ и $\bar{y}$ является решением игры (a_{ij}), если

$$\sum_i \sum_j a_{ij}\bar{x}_i\bar{y}_j = \max_x \min_y \sum_i \sum_j a_{ij}x_i y_j = \min_y \max_x \sum_i \sum_j a_{ij}x_i y_j.$$

Все вышесказанное не дает нам права утверждать, что у игры существует единственное решение. Но так как может быть только один максимин или минимакс, ясно, что все решения приводят к одному и тому же значению игры $v = v_1 = v_2$. Если две пары $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$ являются решениями, то пара $\bar{x}$, $\bar{\bar{y}}$ также является решением.



Если игра имеет седловую точку, т. е. если можно найти чистые стратегии x_0 и y_0, удовлетворяющие (a) и (b), то из (c), (d) и (e) следует, что значение игры равно максимуму минимумов по строкам, а также минимуму максимумов по столбцам. Для больших матриц это дает значительно более удобный критерий существования седловой точки, чем поиски ее по всей матрице выигрышей.

Если игра не имеет седловой точки, то определение решения или даже только значения игры не является легким делом. Этот вопрос будет рассматриваться в последующих главах (в частности, в гл. IX), так как на него мы ответим вычислительным процессом, который решает более общую задачу. Введем сейчас эту задачу.

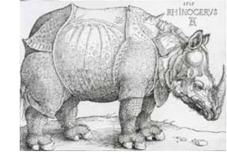
Пусть дана матрица выигрышей. Если A выбирает стратегию x, то он может быть уверен в получении по крайней мере $\min\limits_{j} \sum\limits_{i} a_{ij}x_i = v$. Таким образом, для $j=1, \ldots, m$ имеем

$$a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n \geqq v,$$

где

$$x_1 + \ldots + x_n = 1,$$

$$x_1, \ldots, x_n \geqq 0.$$



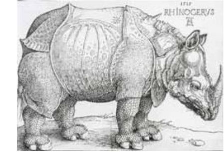
A хотел бы сделать v возможно бо́льшим (тогда v окажется значением игры). Значение v не обязательно положительно, но v заведомо будет положительным, если ко всем a_{ij} добавлена постоянная, делающая их положительными. В результате этого значение игры увеличится на ту же постоянную, но решение игры не изменится, поэтому в дальнейшем мы можем предполагать, что v положительно. Введем новые переменные $x_i' = x_i/v$, относительно которых также будем предполагать, что они принимают только неотрицательные значения. Разделив неравенства на v, получим систему

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i' \geqq 1 \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' = \frac{1}{v}.$$

Нужно минимизировать правую часть последнего равенства.



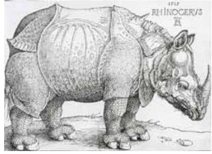
Повторяя это рассуждение для игрока B, получим систему

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y'_j \leqq 1 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n$$

и задачу максимизации выражения

$$\sum_{j=1}^{m} y'_j.$$

Таким образом, мы нашли, что игровая задача может быть приведена к частному случаю более общей задачи, которую можно сформулировать так.



Пусть даны постоянные a_{ij}, b_j и c_i ($i=1, \ldots, n$ и $j=1, \ldots, m$). Требуется найти такие неотрицательные значения x_i и y_j, чтобы сумма $\sum_i c_i x_i$ имела возможно меньшее значение при условии, что $\sum_i a_{ij} x_i = b_j$, и чтобы сумма $\sum_j b_j y_j$ имела возможно большее значение при условии, что $\sum_j a_{ij} y_j = c_i$. Эти две задачи, являющиеся обобщениями задач, которые стоят соответственно перед игроками A и B, находятся между собой в отношении, которое мы называем *двойственностью*.