



Асимптоты



Содержание

- Вертикальная асимптота
- Горизонтальная асимптота
- Наклонная асимптота
- Связь между наклонной и горизонтальной асимптотами
- Порядок нахождения асимптот
- Нахождение вертикальных асимптот
- Нахождение горизонтальных асимптот
- Нахождение двух пределов
- Нахождение наклонных асимптот
- Выделение целой части у наклонных асимптот
- Использованные сайты

Вертикальная асимптота

- Это прямая вида $x = a$ при условии существования предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
- Как правило, при определении вертикальной асимптоты ищут не один предел, а два односторонних (левый и правый). Это делается с целью определить, как функция ведёт себя по мере приближения к вертикальной асимптоте с разных сторон. Например:

$$1.) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$$

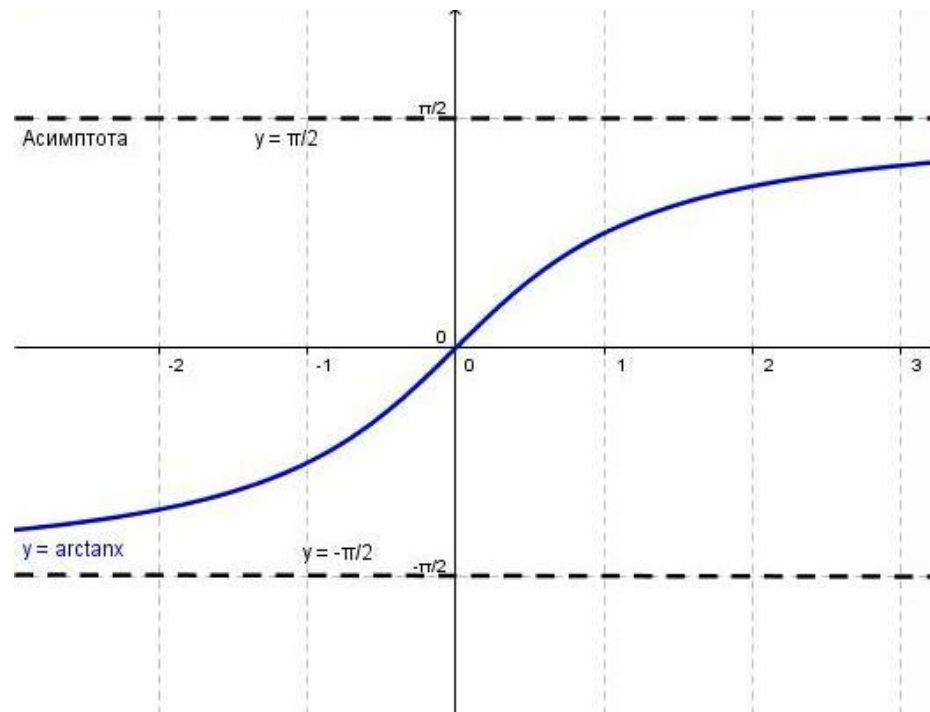
$$2.) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$$

Замечание: обратите внимание на знаки бесконечностей в этих равенствах.



Горизонтальная асимптота

Это прямая вида $y = a$ при условии существования предела $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$



Наклонная асимптота

Это прямая вида $y = kx + b$ при условии существования пределов:

$$1.) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$2.) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

Замечание: функция может иметь не более двух наклонных (горизонтальных) асимптот!

Замечание: Если хотя бы один из двух упомянутых выше пределов не существует (т.е. равен ∞), то наклонной асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$) не существует!



Связь между наклонной и горизонтальной асимптотами

В случае, если наклонная асимптота расположена горизонтально, то есть при $k = 0$, она называется горизонтальной асимптотой. Таким образом, горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты при

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$





Из выше указанных замечаний **следует**, что

1. функция имеет или только одну наклонную асимптоту, или одну горизонтальную асимптоту, или одну наклонную и одну горизонтальную, или две наклонных, или две горизонтальных, либо же вовсе не имеет асимптот;
2. существование указанных в первом пункте асимптот напрямую связано с существованием соответствующих пределов.



Порядок нахождения асимптот

1. Нахождение вертикальных асимптот;
2. Нахождение горизонтальных асимптот;
3. Нахождение двух пределов $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$
4. Нахождение двух пределов $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$



Нахождение вертикальных асимптот

Из определения асимптоты следует, что прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x)$.

- **Например**, для функции $f(x) = 2/(x - 5)$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

- У функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$ прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой.

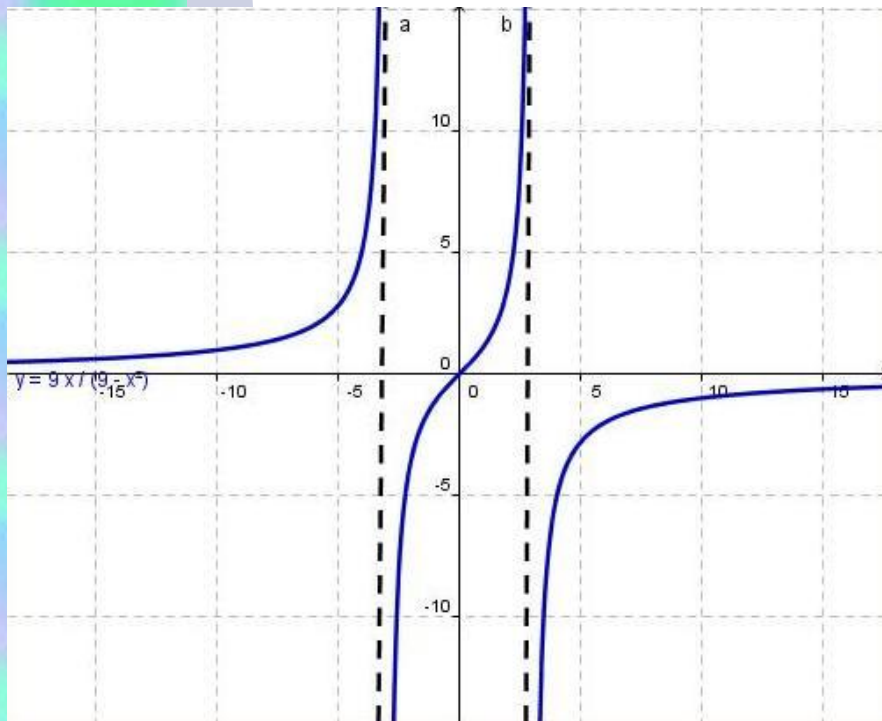
Вертикальных асимптот график не имеет, если область определения не имеет граничных точек. (У графиков многочленов не бывает вертикальных асимптот.)

- **Например**, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ не имеет вертикальных асимптот.

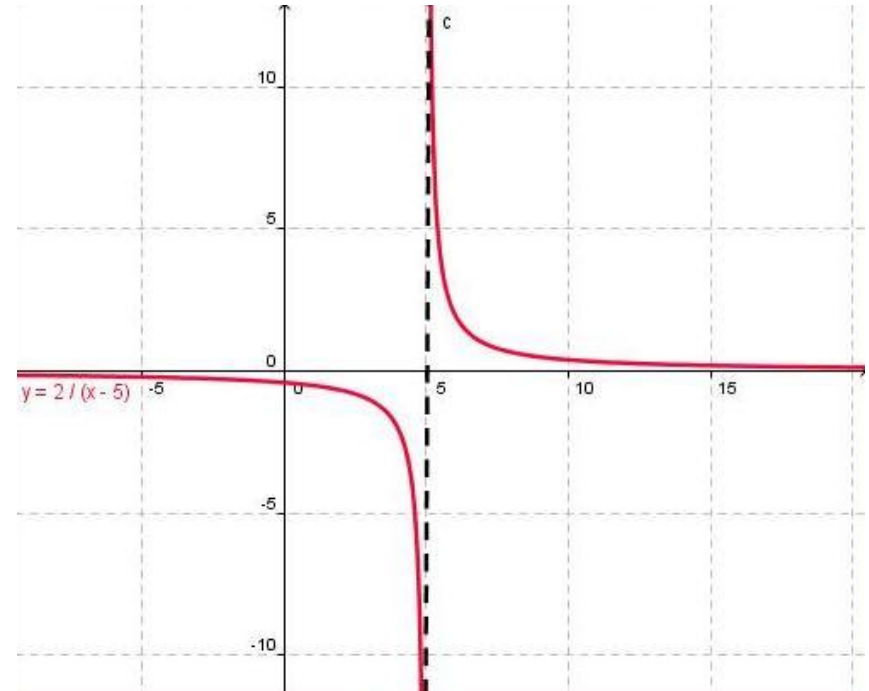


Вертикальные асимптоты

$$y = f(x) = \frac{9x}{9-x^2} = -\frac{9x}{(x-3)(x+3)}$$



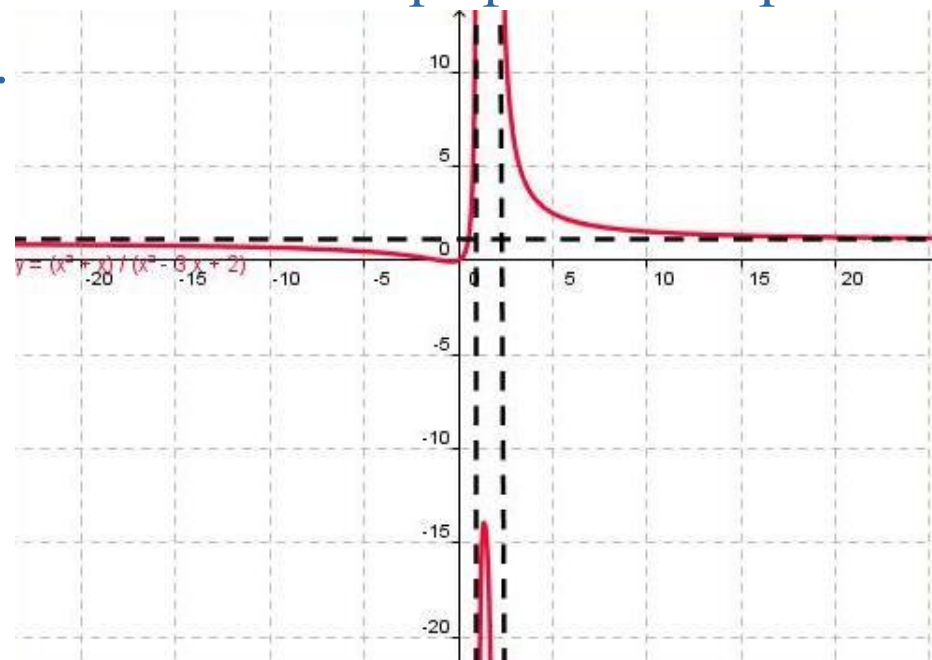
$$y = f(x) = \frac{2}{x-5}$$



Нахождение горизонтальных асимптот

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 - 0 + 0} = 1.$$

Следовательно, горизонтальная прямая $y = 1$ служит горизонтальной асимптотой графика как при $x \rightarrow -\infty$, так и при $x \rightarrow +\infty$.



Нахождение двух пределов

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$
- Если $k = 0$ в предыдущем пункте нахождения двух пределов, то $kx = 0$, и предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$ ищется по формуле горизонтальной асимптоты,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$



Нахождение наклонных асимптот

- Находятся по формуле:

$$y = kx + b \Leftrightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x},$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$$

- Также наклонную асимптоту можно найти, выделив целую часть.



Выделение целой части у наклонных асимптот

- Например, дана функция $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$

Разделив нацело числитель на знаменатель, получим:

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{-2x - 4}{x^2 + 1} = 2x + 5 + (-2) * \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

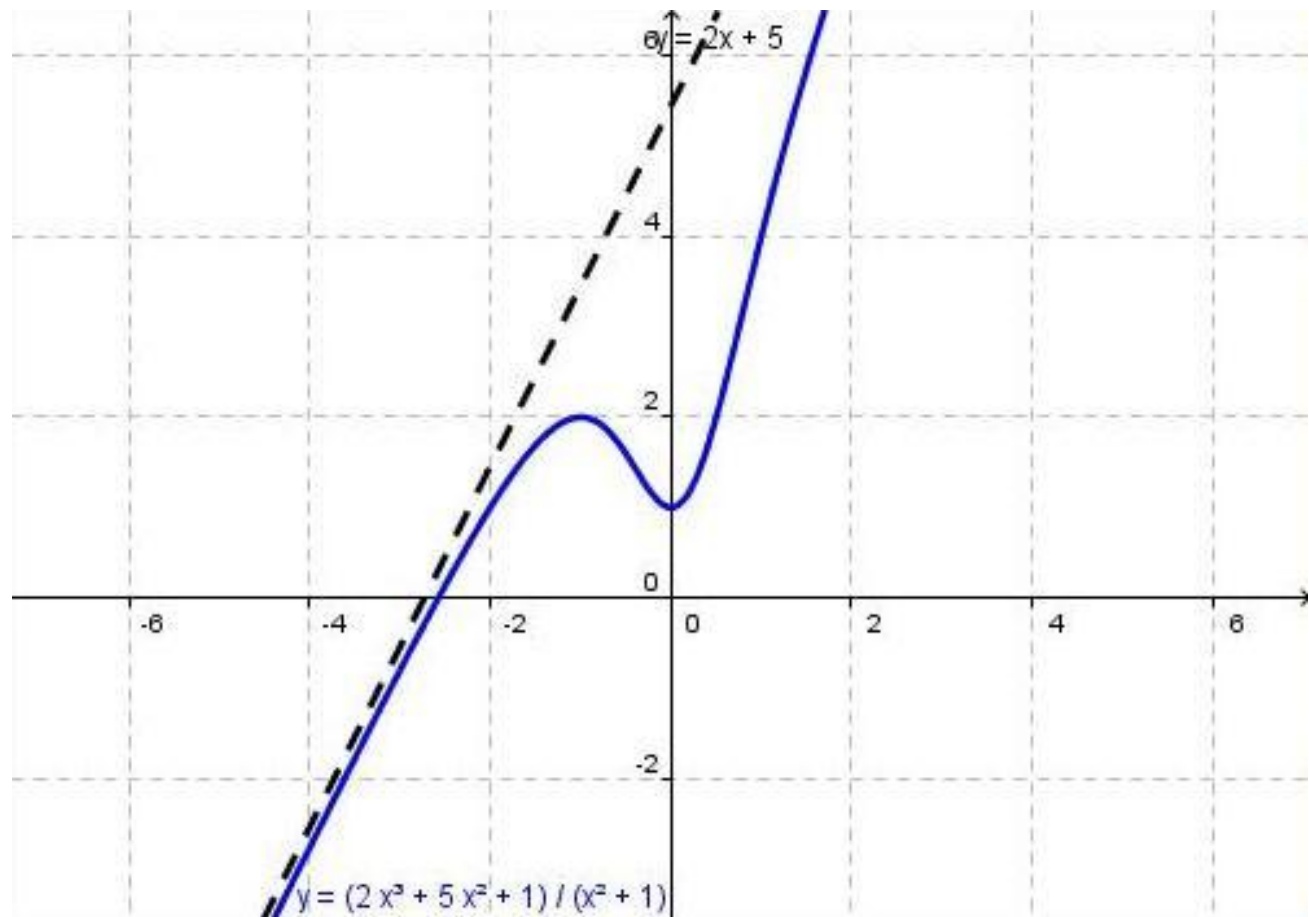
При $x \rightarrow \infty$, $\frac{x + 2}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ ГВ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x + 5) = \pm\infty$$

$y = 2x + 5$ является искомым уравнением асимптоты



Наклонная асимптоты предыдущего примера



Использованные сайты

- <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%82%D1%8B>
- <http://sesia5.ru/vmat/gl2/r15.htm>
- <http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/kiselev1/node63.html>
- <http://webmath.exponenta.ru/dnu/lc/kiselev1/node69.htm>
- <http://mathserfer.com/theory/kiselev1/node68.htm>
!

