Асимптоты

Содержание

Вертикальная асимптота

- **Это прямая вида $x = a$ при условии существования предела** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$
- Как правило, при определении вертикальной асимптоты ищут не один предел, а два односторонних (левый и правый). Это делается с целью определить, как функция ведёт себя по мере приближения к вертикальной асимптоте с разных сторон. Например:

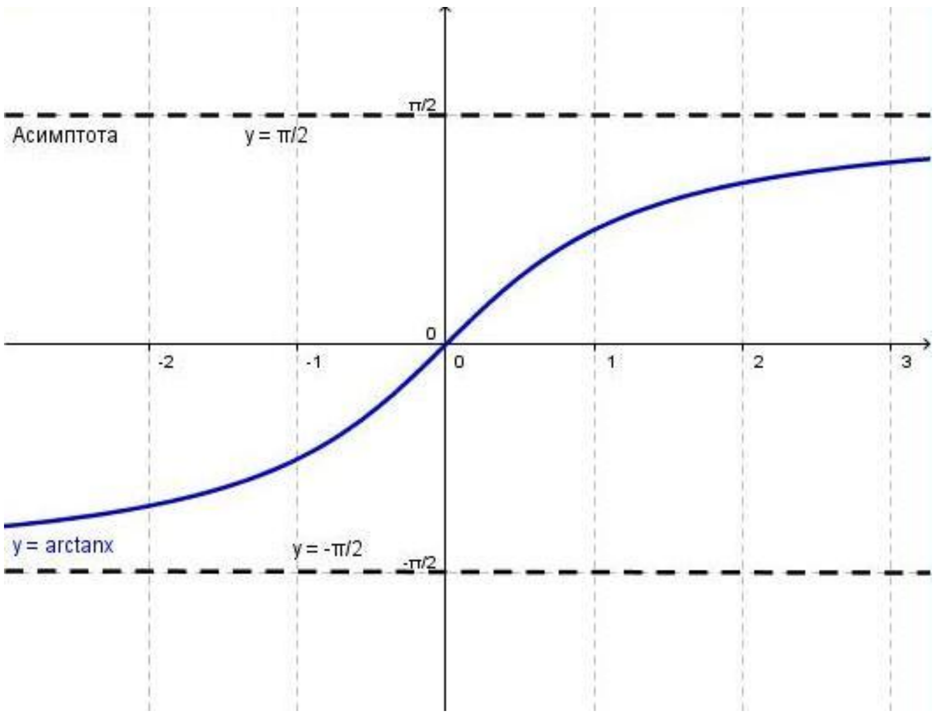
1.) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$

2.) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$

Замечание: обратите внимание на знаки бесконечностей в этих равенствах.

Горизонтальная асимптота

Это прямая вида *y* = *a* при условии существования предела $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$



Наклонная асимптота

Это прямая вида *y* = *kx* + *b* при условии существования пределов:

1.) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

2.) $$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$$

Замечание: функция может иметь не более двух наклонных (горизонтальных) асимптот!

Замечание: Если хотя бы один из двух упомянутых выше пределов не существует (т.е. равен ∞), то наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) не существует!

Связь между наклонной и горизонтальной асимптотами

В случае, если наклонная асимптота расположена горизонтально, то есть при $k = 0$, она называется горизонтальной асимптотой. Таким образом, **горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты** при $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Из выше указанных замечаний **следует**, что

1. функция имеет или только одну наклонную асимптоту, или одну горизонтальную асимптоту, или одну наклонную и одну горизонтальную, или две наклонных, или две горизонтальных, либо же вовсе не имеет асимптот;
2. существование указанных в первом пункте асимптот напрямую связано с существованием соответствующих пределов.

Порядок нахождения асимптот

1. Нахождение вертикальных асимптот;
2. Нахождение горизонтальных асимптот;
3. Нахождение двух пределов $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$
4. Нахождение двух пределов $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$

Нахождение вертикальных асимптот

Из определения асимптоты следует, что прямая ***x = a*** – асимптота кривой ***y = f(x).***

- **Например**, для функции ***f(x) = 2/(x – 5)*** прямая ***x = 5*** является вертикальной асимптотой.
- У функции $y = \dfrac{9x}{9 - x^2}$ прямые ***x = 3*** и ***x = -3*** являются вертикальными асимптотами кривой.

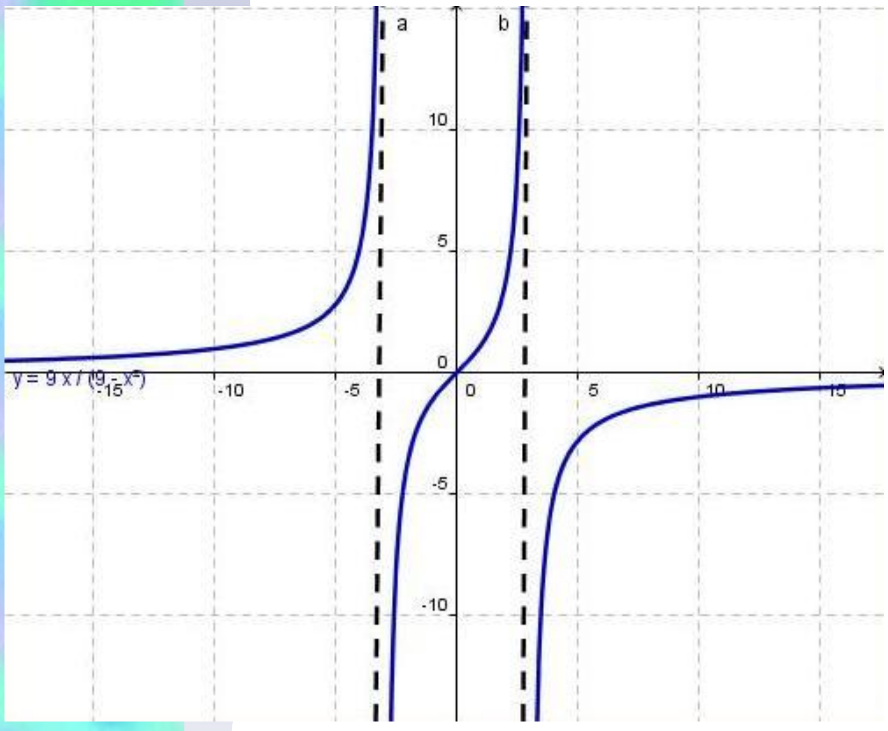
Вертикальных асимптот график не имеет, если область определения не имеет граничных точек. (У графиков многочленов не бывает вертикальных асимптот.)

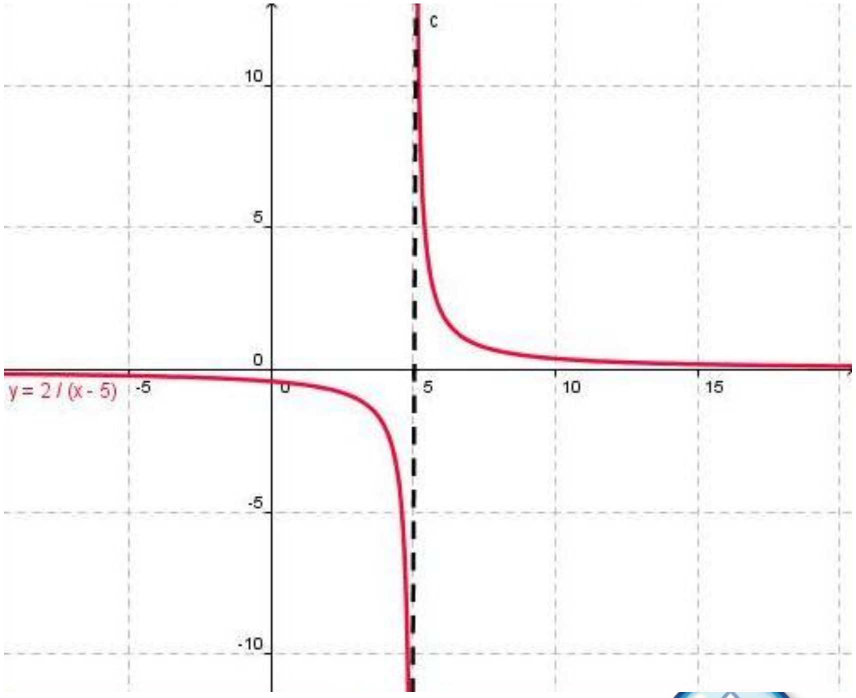
- **Например**, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ не имеет вертикальных асимптот.

Вертикальные асимптоты

$$y = f(x) = \frac{9x}{9 - x^2} = -\frac{9x}{(x-3)(x+3)}$$

$$y = f(x) = \frac{2}{x-5}$$

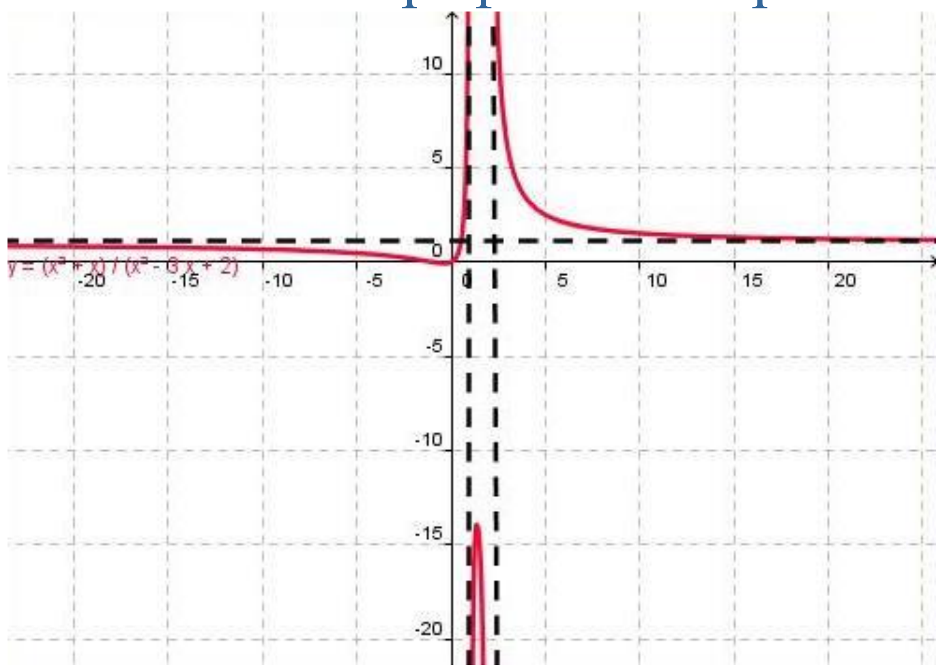




Нахождение горизонтальных асимптот

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1+0}{1-0+0}=1.$$

Следовательно, горизонтальная прямая ***y = 1*** служит горизонтальной асимптотой графика как при ***x*** → **-** ∞, так и при ***x*** → + ∞.



Нахождение двух пределов

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$
- Если ***k = 0*** в предыдущем пункте нахождения двух пределов, то ***kx = 0***, и предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$ ищется по формуле горизонтальной асимптоты,

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=a$$

Нахождение наклонных асимптот

- Находятся **по формуле**:

$$y = kx + b \Leftarrow \Rightarrow k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x},$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, \; b = \lim_{x \to \infty} (y - kx)$$

- Также наклонную асимптоту можно найти, **выделив целую часть**.

Выделение целой части у наклонных асимптот

- **Например,** дана функция $$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

Разделив нацело числитель на знаменатель, получим:

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{-2x - 4}{x^2 + 1} = 2x + 5 + (-2) * \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

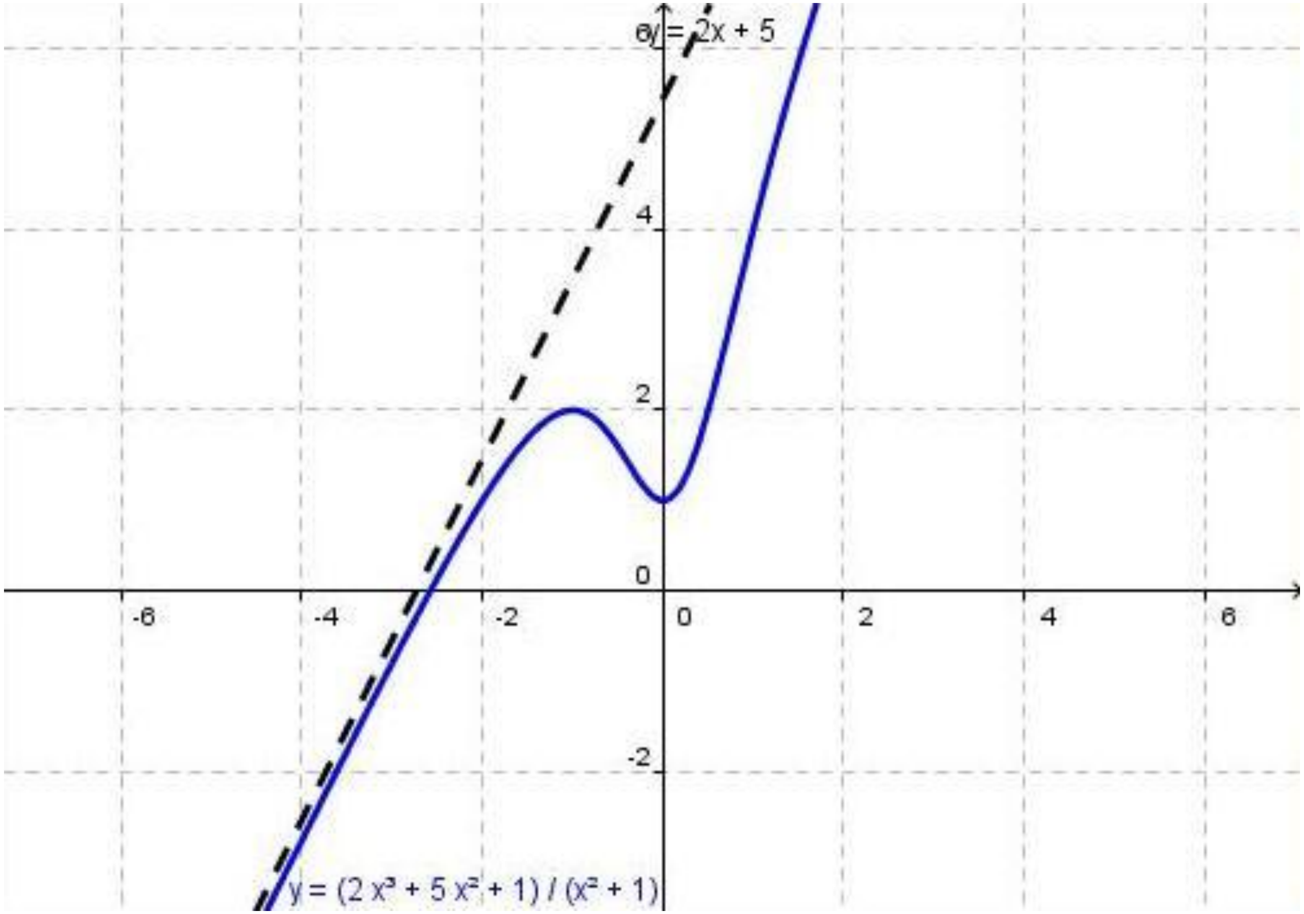
При $x \to \infty$, $\frac{x+2}{x^2+1} \to 0$ гь:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (2x + 5) = \pm\infty$$

, и

***y* = 2*x* + 5** является искомым уравнением асимптоты

Наклонная асимптоты предыдущего примера



Использованные сайты

- http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%82%D1%8B
- http://sesia5.ru/vmat/gl2/r15.htm
- http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/kiselev1/node63.html
- http://webmath.exponenta.ru/dnu/lc/kiselev1/node69.htm
- http://mathserfer.com/theory/kiselev1/node68.html