# Метод математической индукции

# Утверждения

## Общие

Все граждане России имеют право на образование.

Во всяком параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Все числа, оканчивающиеся нулём, делятся на 5.

## Частные

Петров имеет право на образование.

В параллелограмме ABCD диагонали в точке пересечения делятся пополам.

140 делится на 5.

# Дедукция –

переход от общих утверждений к частным.

*Пример*.

Все граждане России имеют право на образование.

Петров – гражданин России.

---

Петров имеет право на образование.

# Индукция –

переход от частных утверждений к общим.

*Пример*.

140 делится на 5.

---

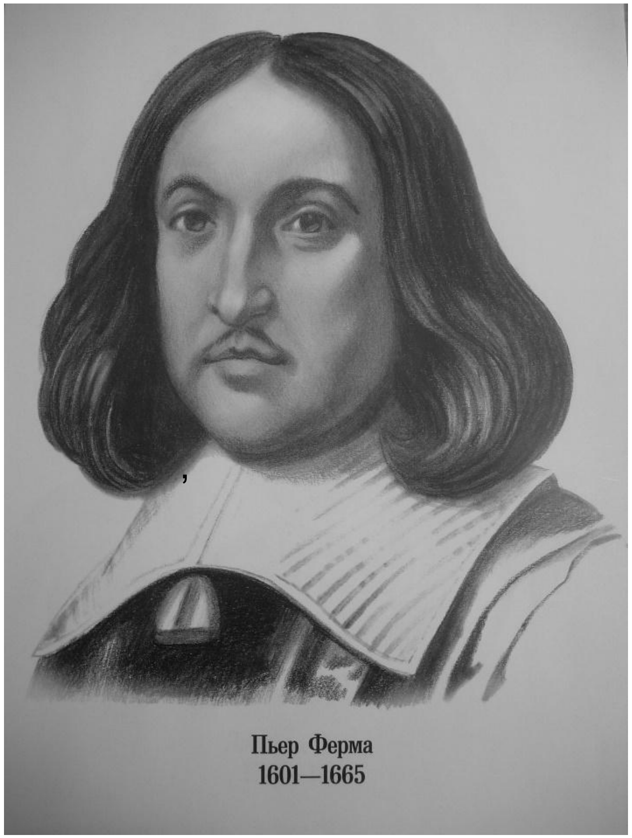
Все числа, оканчивающиеся нулём, делятся на 5.

140 делится на 5.

---

Все трёхзначные числа делятся на 5.

Знаменитый математик XVII в. П.Ферма проверив, что числа


Пьер Ферма
1601—1665

$$2^{2^0}+1=3$$
$$2^{2^1}+1=5$$
$$2^{2^2}+1=17$$
$$2^{2^3}+1=257$$
$$2^{2^4}+1=65537$$

простые, сделал по индукции предположение, что для всех n=1,2,3,… числа вида

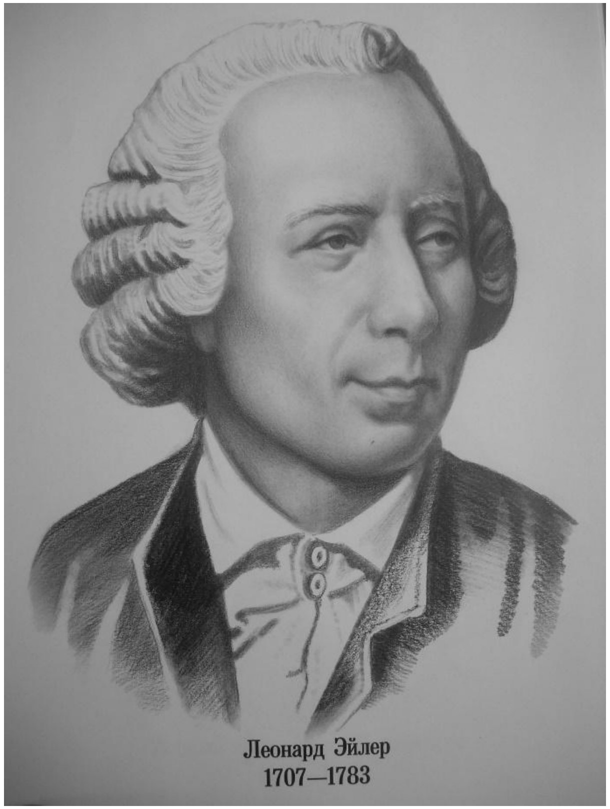
$$2^{2^n}+1$$

простые.

В XVIII веке Л.Эйлер нашел, что при n=5

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$$

составное число.



# Индукция

Полная

Неполная

Требуется установить, что каждое натуральное чётное число $n$ в пределах $4 < n < 20$ представимо в виде суммы двух простых чисел.

Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=7+3; 12=7+5; 14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 20=13+7.

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

## Задача.

Перед нами последовательность нечетных чисел натурального ряда.

1,3,5,7,9,11,13…

Чему равна сумма n первых членов этой последовательности?

## Решение:

Рассмотрим частные случаи:

- $1=1 \quad =1^2$
- $1+3=4 \quad =2^2$
- $1+3+5=9 \quad =3^2$
- $1+3+5+7=16 \quad =4^2$
- $1+3+5+7+9=25 \quad =5^2\ldots$

Общий вывод: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$

Как же узнать, справедливо ли это утверждение вообще?

# Принцип математической индукции

Утверждение P($n$) справедливо для всякого натурального $n$, если:

1. Оно справедливо для $n$=1 или для наименьшего из натуральных чисел при котором закономерность имеет смысл.

2. Из справедливости утверждения для какого либо произвольного натурально $n$=$k$ следует его справедливость для $n$=$k$+1.

# Алгоритм доказательства методом математической индукции

1. Проверяют справедливость гипотезы для наименьшего из натуральных чисел при котором гипотеза имеет смысл (базис индукции).

2. Сделав предположение, что гипотеза верна для некоторого значения $k$, стремятся доказать справедливость ее для $k+1$ (индукционный шаг).

3. Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что высказанная гипотеза справедлива для любого натурального числа $n$.

## Суть доказательства *методом математической индукции*:

1. **базис** проверить верность утверждения при $n = 1$
2. **индукционный шаг**

   - <u>допустить</u>, что утверждение верно при $n = k$
   - <u>доказать,</u> что утверждение верно при $n = k+1$

Докажите, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

# Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Доказательство:

1. Имеем $n=1=1^2$. Следовательно, утверждение верно при $n=1$.
2. Пусть $k$-любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для $n=k$, т.е. $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$.

   Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n=k+1$, т.е. что $1+3+5+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$.

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Итак, утверждение $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ истинно для любого натурального $n$.

## Задача

Доказать, что

$$(7^{n}+8^{2n-3})\vdots 19$$

при $n \geq 2$.

Доказательство:

1. Проверим верность утверждения при $n$=2.

$$7^2+8^{2\cdot 2-3}=57,57=19\cdot 3.$$

Следовательно, утверждение верно при $n$=2.

2. Пусть утверждение справедливо для $n$=$k$>2, т.е.

$$(7^k+8^{2k-3})\,\vdots\,19.$$

Докажем истинность утверждения для $n$=$k$+1, т.е. что

$$(7^{k+1}+8^{2(k+1)-3})\,\vdots\,19.$$

$$7^{k+1}+8^{2(k+1)-3}=7\cdot 7^k+8^{2k+2-3}=7\cdot 7^k+8^{2k-3}\cdot 64=$$

$$=7^k\cdot 7+8^{2k-3}\cdot 7+8^{2k-3}\cdot 57=7\Big(\underbrace{7^k+8^{2k-3}}_{\vdots\,19}\Big)+8^{2k-3}\cdot\underbrace{57}_{\vdots\,19}$$

Итак, утверждение истинно для любого натурального $n$≥2.

## Задача

Доказать, что для любого натурального числа $n$ истинно утверждение

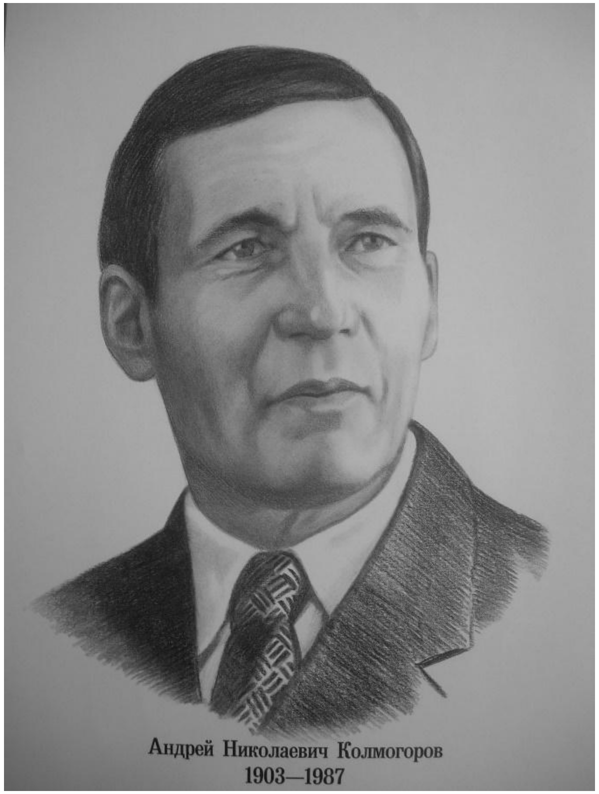
$$(8^n + 6) \,\vdots\, 7$$

## Задача

Доказать, что сумма *n* первых чисел натурального ряда равна

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Метод математической индукции позволяет в поисках общего закона испытывать возникающие при этом гипотезы, отбрасывать ложные и утверждать истинные.




«Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику».

А.Н. Колмогоров

# Домашнее задание

1. Доказать, что сумма квадратов чисел натурального ряда от 1 до *n*, равна

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Докажите, что при любом натуральном *n* верно утверждение

$$\left(7^n-1\right) \vdots 6$$