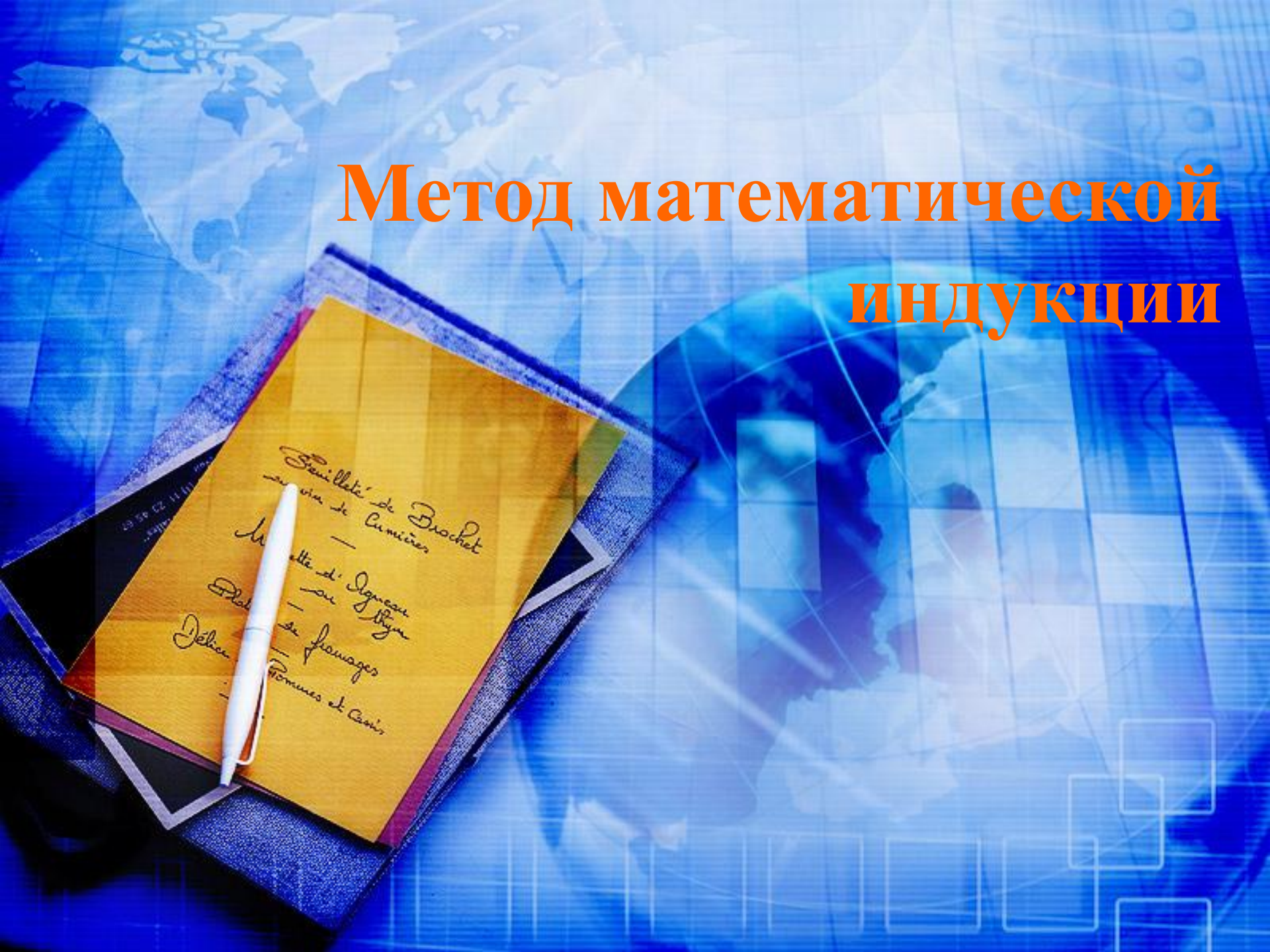
Метод математической индукции



Утверждения

Общие

Все граждане России имеют право на образование.

Во всяком параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Все числа, оканчивающиеся нулём, делятся на 5.

Частные

Петров имеет право на образование.

В параллелограмме ABCD диагонали в точке пересечения делятся пополам.

140 делится на 5.

Дедукция –

переход от общих утверждений к частным.

Пример.

Все граждане России имеют право на образование.

Петров – гражданин России.

Петров имеет право на образование.

Индукция –

переход от частных утверждений к общим.

Пример.

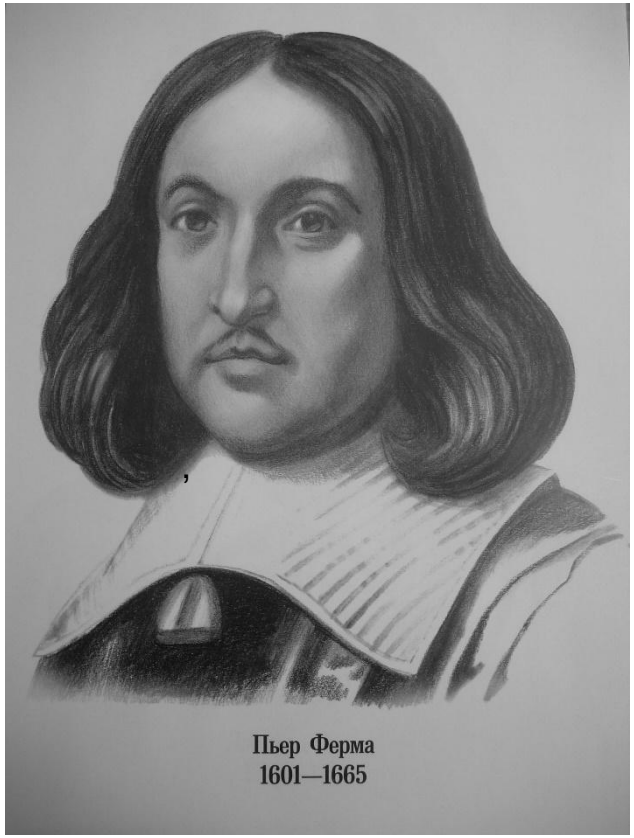
140 делится на 5.

Все числа, оканчивающиеся нулём, делятся на 5.

140 делится на 5.

Все трёхзначные числа делятся на 5.

Знаменитый математик XVII в. П.Ферма проверив, что числа



$$2^{2^0}+1=3$$
$$2^{2^1}+1=5$$
$$2^{2^2}+1=17$$
$$2^{2^3}+1=257$$
$$2^{2^4}+1=65537$$

простые, сделал по индукции предположение, что для всех n=1,2,3,… числа вида

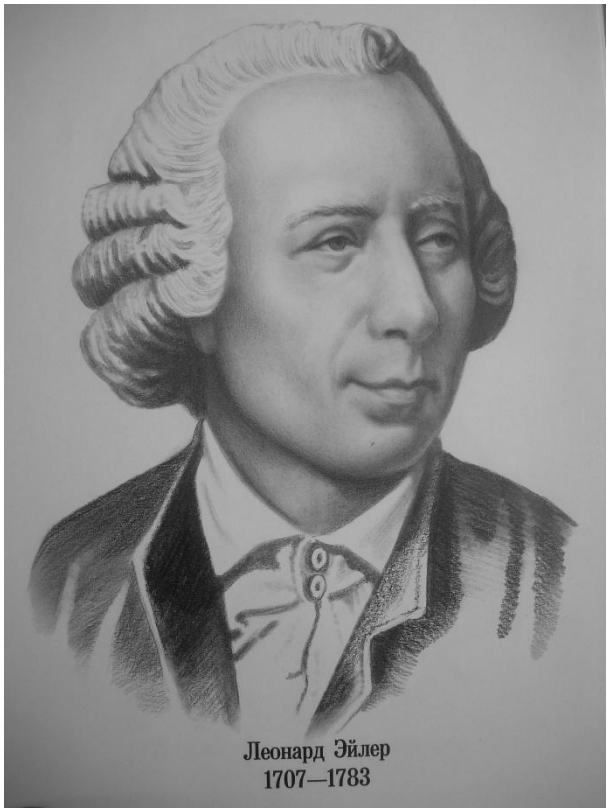
$$2^{2^n}+1$$

простые.

В XVIII веке Л.Эйлер нашел, что при n=5

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$$

составное число.



Индукция

Полная

Неполная

Требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах $4 < n < 20$ представимо в виде суммы двух простых чисел.

Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=7+3; 12=7+5; 14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 20=13+7.

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Задача.

Перед нами последовательность нечетных чисел натурального ряда.

1,3,5,7,9,11,13…

Чему равна сумма n первых членов этой последовательности?

Решение:

Рассмотрим частные случаи:

- $1=1 \quad = 1^2$
- $1+3=4 \quad = 2^2$
- $1+3+5=9 \quad = 3^2$
- $1+3+5+7=16 \quad = 4^2$
- $1+3+5+7+9=25 \quad = 5^2 \ldots$

Общий вывод: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Как же узнать, справедливо ли это утверждение вообще?

Принцип математической индукции

Утверждение P(n) справедливо для всякого натурального n, если:

1. Оно справедливо для n=1 или для наименьшего из натуральных чисел при котором закономерность имеет смысл.

2. Из справедливости утверждения для какого либо произвольного натурально n=k следует его справедливость для n=k+1.

Алгоритм доказательства методом математической индукции

1. Проверяют справедливость гипотезы для наименьшего из натуральных чисел при котором гипотеза имеет смысл (базис индукции).

2. Сделав предположение, что гипотеза верна для некоторого значения k, стремятся доказать справедливость ее для $k+1$ (индукционный шаг).

3. Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что высказанная гипотеза справедлива для любого натурального числа n.

Суть доказательства *методом математической индукции*:

1. **базис** проверить верность утверждения при $n = 1$
2. **индукционный шаг**

   - <u>допустить</u>, что утверждение верно при $n = k$
   - <u>доказать,</u> что утверждение верно при $n = k+1$

Докажите, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Доказательство:

1. Имеем $n=1=1^2$. Следовательно, утверждение верно при $n=1$.
2. Пусть k-любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для $n=k$, т.е. $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$.

   Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n=k+1$, т.е. что $1+3+5+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$.

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Итак, утверждение $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ истинно для любого натурального n.

Задача

Доказать, что

$$(7^n + 8^{2n-3}) \vdots 19$$

при $n \geq 2$.

Доказательство:

1. Проверим верность утверждения при n=2.

$$7^2 + 8^{2\cdot 2-3} = 57, 57 = 19\cdot 3.$$

Следовательно, утверждение верно при n=2.

2. Пусть утверждение справедливо для $n=k>2$, т.е.

$$(7^k + 8^{2k-3}) \vdots 19.$$

Докажем истинность утверждения для $n=k+1$, т.е. что

$$(7^{k+1} + 8^{2(k+1)-3}) \vdots 19.$$

$$7^{k+1} + 8^{2(k+1)-3} = 7\cdot 7^k + 8^{2k+2-3} = 7\cdot 7^k + 8^{2k-3}\cdot 64 =$$

$$= 7^k\cdot 7 + 8^{2k-3}\cdot 7 + 8^{2k-3}\cdot 57 = 7\underbrace{\left(7^k + 8^{2k-3}\right)}_{\vdots 19} + 8^{2k-3}\cdot \underbrace{57}_{\vdots 19}$$

Итак, утверждение истинно для любого натурального $n\geq 2$.

Задача

Доказать, что для любого натурального числа n истинно утверждение

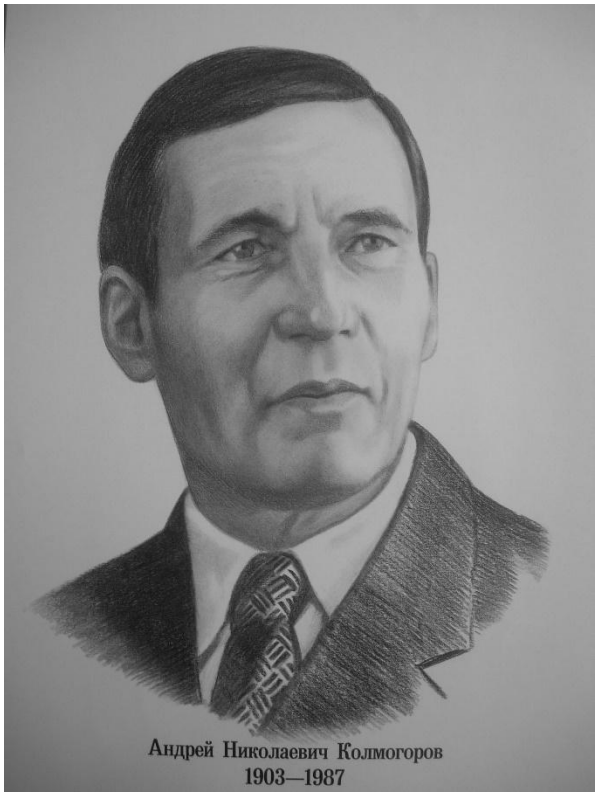
$$(8^n + 6) \vdots 7$$

Задача

Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Метод математической индукции позволяет в поисках общего закона испытывать возникающие при этом гипотезы, отбрасывать ложные и утверждать истинные.



«Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику».

А.Н. Колмогоров

Домашнее задание

1. Доказать, что сумма квадратов чисел натурального ряда от 1 до *n*, равна

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Докажите, что при любом натуральном *n* верно утверждение

$$\left(7^n-1\right)\vdots 6$$