УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Открытие Максвелла. Теория электромагнитного поля, начала которой заложил Фарадей, математически была завершена Максвеллом. При этом одной из важнейших новых идей, выдвинутых Максвеллом, была мысль о симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей. А именно, поскольку меняющееся во времени магнитное поле ($\partial \mathbf{B}/\partial t$) создает электрическое поле, следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле ($\partial \mathbf{E}/\partial t$) создает магнитное поле.

К этой идее о необходимости существования по сути нового явления индукции можно прийти путем, например, следующих рассуждений. Мы знаем, что согласно теореме о циркуляции вектора **H**

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \quad (1)$$

Применим эту теорему к случаю, когда предварительно заряженный плоский конденсатор разряжается через некоторое внешнее сопротивление (рис. 1, *а*). В качестве контура Г возьмем кривую, охватывающую провод. На контур Г можно натянуть разные поверхности, например *S* и *S'*. Обе поверхности имеют «равные права», однако через поверхность *S* течет ток *I*, а через поверхность *S'* не течет никакого тока!

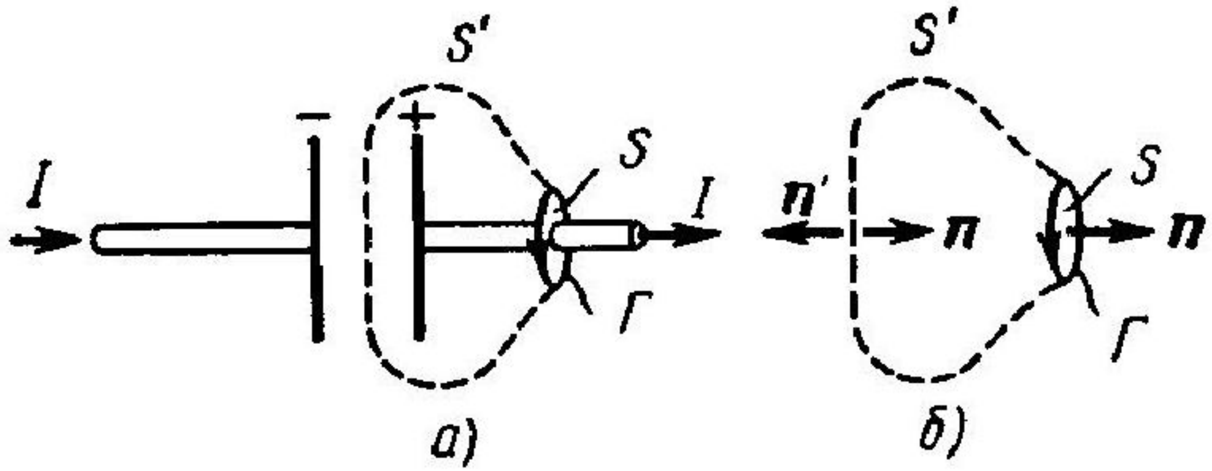

Рис. 1

Обе поверхности имеют «равные права», одна через поверхность S течет ток I, а через поверхность не течет никакого тока!

Получается, что циркуляция вектора **H** зависит от тог какую поверхность мы натягиваем на данный контур (?! чего явно не может быть (в случае постоянных токов это и не происходило).

А нельзя ли как-то изменить правую часть (1), чт бы избежать этой неприятности? Оказывается, можн и вот как.

Первое, что мы замечаем, это то, что поверхность S' «пронизывает» только электрическое поле. По теореме Гаусса поток вектора **D** сквозь замкнутую поверхность $\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = q$, откуда

С другой стороны, согласно уравнению непрерывности

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (3)$$

Сложив отдельно левые и правые части уравнений (2) и (3), получим

$$\oint \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение аналогично уравнению непрерывности для постоянного тока. Из него видно, что кроме плотности тока проводимости $\mathbf{j}$ имеется еще одно слагаемое $\partial \mathbf{D}/\partial t$, размерность которого равна размерности плотности тока. Максвелл назвал это слагаемое плотностью *тока смещения*:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D}/\partial t. \qquad (5)$$

Сумму же тока проводимости и тока смещения называют *полным током*. Его плотность

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (6)$$

Сейчас мы убедимся в том, что введение полного тока устраняет трудность, связанную с зависимостью циркуляции вектора **H** от выбора поверхности, натягиваемой на контур Г. Оказывается, для этого достаточно в правой части уравнения (1) вместо тока проводимости ввести полный ток, т. е. величину

$$I_{\text{полн}} = \int \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \qquad (\quad 7)$$

В самом деле, правая часть (7) представляет собой сумму тока проводимости I и тока смещения $I_{\text{см}}$: $I_{\text{полн}} = I + I_{\text{см}}$. Покажем, что полный ток $I_{\text{полн}}$ будет одинаков и для поверхности S, и для поверхности S', натянутых на один и тот же контур Г. Для этого применим (4) к замкнутой поверхности, составленной из поверхностей S и S'

Теперь, если обернуть нормаль $\mathbf{n}'$ для поверхности S' в ту же сторону, что и для S, то первое слагаемое в последнем уравнении изменит знак, и мы получим

$$I_{\text{полн}}(S') = I_{\text{полн}}(S),$$

что и требовалось доказать.

Итак, теорему о циркуляции вектора **H**, которая была установлена для постоянных токов, можно обобщить для произвольного случая и записать

$$\boxed{\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.} \qquad (8)$$

В таком виде теорема о циркуляции вектора **H** справедлива всегда, свидетельством чему является согласие этого уравнения с результатами опыта во всех без исключения случаях.

Дифференциальная форма уравнения 8):

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},} \qquad (\quad 9)$$

е. ротор вектора **H** определяется плотностью тока проводимости **j** тока смещения $\partial \mathbf{D}/\partial t$ в той же точке.

Несколько замечаний о токе смещения. Следует иметь виду, что ток смещения эквивалентен току проводимости олько в отношении способности создавать магнитное оле.

Токи смещения существуют лишь там, где меняется со ременем электрическое поле. В диэлектриках ток смеще-ия состоит из двух существенно различных слагаемых. ак как вектор $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, то отсюда видно, что плот-ость тока смещения $\partial \mathbf{D}/\partial t$ складывается из «истинного» ока смещения $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ и т о к а п о л я р и з а ц и и $\mathbf{P}/\partial t$ — величины, обусловленной движением связанных арядов. В том, что токи поляризации возбуждают магнитое поле, нет ничего неожиданного, ибо эти токи по прирое своей не отличаются от токов проводимости. Принциипально новое содержится в утверждении, что и другая асть тока смещения ($\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$), которая не связана ни каким движением зарядов, а обусловлена только изменением электрического поля, также возбуждает магнитное поле. Даже в вакууме всякое изменение во времени электрического поля возбуждает в окружающем пространстве магнитное поле.

Открытие этого явления — наиболее существенный и решающий шаг, сделанный Максвеллом при построении теории электромагнитного поля. Это открытие вполне аналогично открытию электромагнитной индукции, согласно которому переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле.

Следует также отметить, что открытие Максвеллом тока смещения — чисто теоретическое открытие, причем первостепенной важности.

Рассмотрим пример, в котором проявляют себя токи смещения.

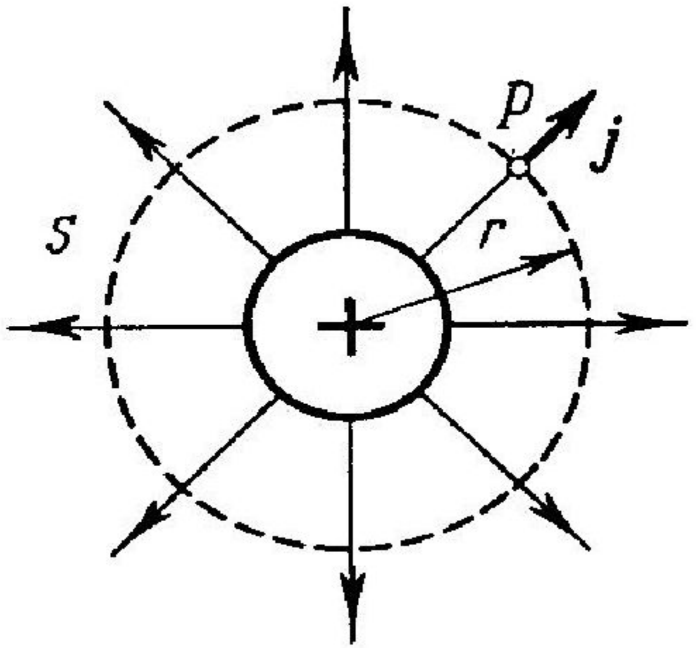

Рис. 2

Пример. *В неограниченной однородной проводящей среде находится металлический шар, которому сообщен положительный электрический заряд* (рис. 2). *Электрические токи, текущие в радиальных направлениях, должны возбуждать магнитное поле. Выясним, куда направлен вектор* **B** *в произвольной точке P.*

Прежде всего ясно, что вектор **B** не может иметь радиальной составляющей. Если бы это было не так, поток вектора **B** через поверхность сферы *S* (рис. 2) был бы отличен от нуля

Значит, вектор **B** должен быть перпендикулярен радиальному направлению в точке P. Но это также невозможно, так как все направления, перпендикулярные радиальному, совершенно равноправны, они ничем не выделены. Остается единственное — магнитное поле всюду равно нулю.

Отсутствие магнитного поля при наличии электрического тока плотностью **j** означает, что кроме тока проводимости **j** в системе имеется и ток смещения $\mathbf{j}_{\text{см}}$, причем такой, что полный ток всюду равен нулю, т. е. в каждой точке $\mathbf{j}_{\text{см}} = -\mathbf{j}$. Или

$$j_{\text{см}} = j = \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\dot{q}}{4\pi r^2} = \frac{\partial D}{\partial t},$$

где принято во внимание, что $D = q/4\pi r^2$ согласно теореме Гаусса.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в интегральной форме. С введением тока смещения макроскопическая теория электромагнитного поля была блестяще завершена. Открытие тока смещения ($\partial \mathbf{D}/\partial t$) позволило Максвеллу создать **единую** теорию электрических и магнитных явлений. Теория Максвелла не только объяснила все разрозненные явления электричества и магнетизма (причем с единой точки зрения), но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

До сих пор мы рассматривали отдельные части этой теории. Теперь можно представить всю картину в виде системы фундаментальных уравнений электродинамики, называемых *уравнениями Максвелла* в неподвижных средах. Этих уравнений четыре (мы уже познакомились с каждым из них в отдельности в предшествующих разделах, а сейчас просто соберем их все вместе).

В интегральной форме система уравнений Максвелла имеет следующий вид:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}, & \oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int \rho\, dV, \\ \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, & \oint \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0, \end{array}} \begin{array}{r} (10) \\ (11) \end{array}$$

где ρ — объемная плотность сторонних зарядов, $\mathbf{j}$ — плотность тока проводимости.

Эти уравнения в сжатой форме выражают всю совокупность наших сведений об электромагнитном поле. Содержание этих уравнений заключается в следующем:

1. Циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. При этом под $\mathbf{E}$ понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое

(циркуляция последнего, как известно, равна нулю).

2. Поток вектора **D** сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

3. Циркуляция вектора **H** по любому замкнутому контуру равна полному току (току проводимости и току смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром.

4. Поток вектора **B** сквозь произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю.

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов **E** и **H** следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из этих полей приводит к появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая единое электромагнитное поле.

Если же поля стационарны ($\mathbf{E} = \text{const}$ и $\mathbf{B} = \text{const}$), то уравнения Максвелла распадаются на две группы *независимых* уравнений:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0, \quad \oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = q, \qquad\qquad (12)$$
$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = I, \quad \oint \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга, что и позволило нам изучить сначала постоянное электрическое поле, а затем независимо от него и постоянное магнитное поле.

Необходимо подчеркнуть, что рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла, ни в коей мере не могут претендовать на их доказательство. Эти уравнения нельзя «вывести», они являются основными аксиомами, постулатами электродинамики, полученными путем обобщения опытных фактов. Эти постулаты играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или начала термодинамики.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Уравнения (10) и (11) можно представить в дифференциальной форме, т. е. в виде системы дифференциальных уравнений, а именно:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \\ &\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(\ \ 13) \\ &(\ \ 14) \end{aligned}$$

Уравнения (13) говорят о том, что электрическое поле может возникнуть по двум причинам. Во-первых, его источником являются электрические заряды, как сторонние, так и связанные (это следует из уравнения $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, если учесть, что $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ и $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho'$, тогда $\nabla \cdot \mathbf{E} \propto (\rho + \rho')$. Во-вторых, поле $\mathbf{E}$ образуется всегда, когда меняется во времени магнитное поле (выражение закона электромагнитной индукции Фарадея).

Уравнения же (14) говорят о том, что магнитное поле $\mathbf{B}$ может возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями, либо тем и другим одновременно (это следует из уравнения $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$, если учесть, что $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}$ и $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{j}'$, тогда $\nabla \times \mathbf{B} \propto \mathbf{j} +$

тогда $\nabla \times \mathbf{B} \propto \mathbf{j} + \mathbf{j}' + \partial \mathbf{P}/\partial t + \varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$, где $\mathbf{j}'$ — плотность тока намагничивания; $\partial \mathbf{P}/\partial t$ — плотность **тока поляризации**. Первые три тока связаны с движением зарядов, последний ток — с изменяющимся во времени полем $\mathbf{E}$). Никаких источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам (по аналогии их называют магнитными зарядами), в природе не существует, это следует из уравнения $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Значение уравнений Максвелла в дифференциальной форме не только в том, что они выражают основные законы электромагнитного поля, но и в том, что путем их решения (интегрирования) могут быть найдены сами поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме совместно с уравнением движения заряженных частиц под действием силы Лоренца

$$d\mathbf{p}/dt = q\mathbf{E} + q[\mathbf{vB}] \qquad (15)$$

составляют фундаментальную систему уравнений. Эта система в принципе достаточна для описания всех электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые эффекты.

Граничные условия. Уравнения Максвелла в интегральной форме обладают большей общностью, чем дифференциальные, ибо они справедливы и в тех случаях, когда существуют *поверхности разрыва* — поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно. Уравнения же Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно.

Можно, однако, достигнуть такой же общности и для дифференциальной формы уравнений, если дополнить их *граничными условиями*, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Эти условия содержатся в интегральной форме уравнений Максвелла и имеют уже знакомый нам вид:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau} \qquad (16$$

(здесь первое и последнее условия относятся к случаям когда на границе раздела нет ни сторонних зарядов, ни токов проводимости). Заметим также, что приведенные граничные условия справедливы как для постоянных, так и для переменных полей.

Материальные уравнения. Фундаментальные уравнения Максвелла еще не составляют полной системы уравнений электромагнитного поля. Этих уравнений недостаточно для нахождения полей по заданным распределениям зарядов и токов.

Уравнения Максвелла необходимо дополнить соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называют *материальными уравнениями*. Вообще говоря, эти уравнения достаточно сложны и не обладают той общностью и фундаментальностью, которые свойственны уравнениям Максвелла.

Материальные уравнения наиболее просты в случае достаточно слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени. В этом случае для изотропных сред, не содержащих сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, материальные уравнения имеют следующий вид (он нам уже знаком):

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \qquad (17)$$

где ε, μ, σ — известные нам постоянные, характеризующие электрические и магнитные свойства среды (диэлектрическая и магнитная проницаемости и электропроводимость), $\mathbf{E}^*$ — напряженность поля сторонних сил, обусловленная химическими или тепловыми процессами.

3. СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла линейны. Они содержат только первые производные полей **E** и **B** по времени и пространственным координатам и первые степени плотности электрических зарядов ρ и токов **j**. Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей.

Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда. Чтобы убедиться в этом, возьмем бесконечно малый контур Γ, натянем на него произвольную конечную поверхность S (рис. 3), а затем стянем этот контур в точку, оставляя поверхность S конечной. В пределе циркуляция $\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l}$ обращается в нуль, поверхность S становится замкнутой и первое из уравнений (11) перейдет в

$$\oint \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t},$$

а это и есть не что иное, как уравнение непрерывности , которое утверждает, что ток, вытекающий из объема V через замкнутую поверхность S, равен убыли заряда в единицу времени внутри этого объема V.

Тот же закон (уравнение непрерывности) можно получить и из дифференциальных уравнений Максвелла. Достаточно взять дивергенцию от обеих частей первого из уравнений (14) и воспользоваться вторым из уравнений (13), и мы получим $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$.

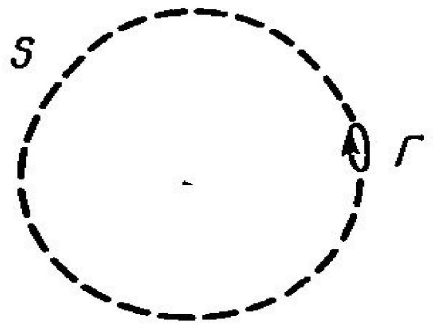

Рис. 3

Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета. Они являются релятивистски инвариантными. Это есть следствие принципа относительности, согласно которому все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны друг другу. Факт инвариантности уравнений Максвелла (относительно преобразований Лоренца) подтверждается многочисленными опытными данными. Вид уравнений Максвелла при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не меняется, однако входящие в них величины преобразуются по определенным правилам.

Итак, уравнения Максвелла являются правильными релятивистскими уравнениями в отличие, например, от уравнений механики Ньютона.

О симметрии уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это обусловлено опять же тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных (насколько известно в настоящее время). Вместе с тем в нейтральной однородной непроводящей среде, где $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$, уравнения Максвелла приобретают симметричный вид, т. е. $\mathbf{E}$ так связано с $\partial\mathbf{B}/\partial t$, как $\mathbf{B}$ с $\partial\mathbf{E}/\partial t$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \partial\mathbf{D}/\partial t, \quad & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Симметрия уравнений относительно электрического и магнитного полей не распространяется лишь на знак перед производными $\partial\mathbf{B}/\partial t$ и $\partial\mathbf{D}/\partial t$. Различие в знаках перед этими производными показывает, что линии вихревого электрического поля, индуцированного изменением поля **B**, образуют с вектором $\partial \mathbf{B}/\partial t$ левовинтовую систему, в то время как линии магнитного поля, индуцируемого изменением **D**, образуют с вектором $\partial \mathbf{D}/\partial t$ правовинтовую систему (рис. 4).

О электромагнитных волнах. Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно — без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер.

Поля такого рода называют **электромагнитными волнами**. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света c.

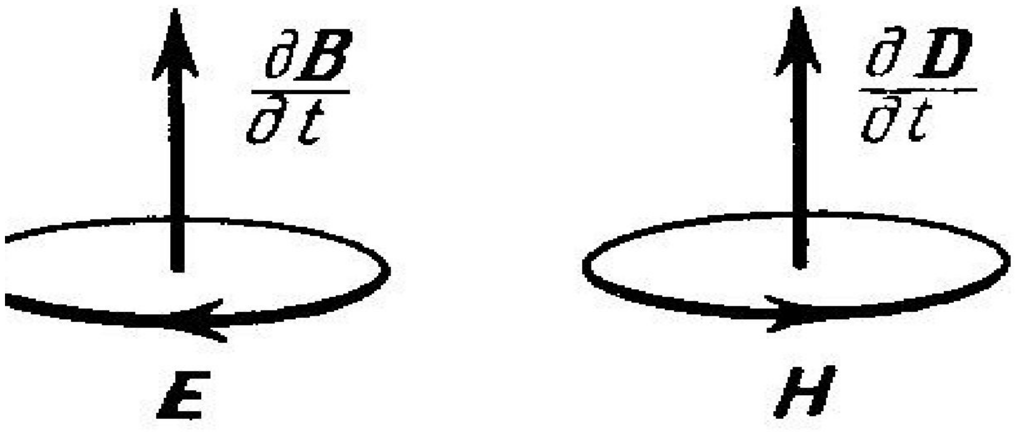

Рис. 4

Выяснилось также, что ток смещения ($\partial \mathbf{D}/\partial t$) играет в этом явлении первостепенную роль. Именно его присутствие наряду с величиной $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и означает возможность появления электромагнитных волн. Всякое изменение во времени магнитного поля возбуждает поле электрическое, изменение же поля электрического, в свою очередь, возбуждает магнитное поле. За счет непрерывного взаимопревращения или взаимодействия они и должны сохраняться — электромагнитное возмущение будет распространяться в пространстве.

Теория Максвелла не только предсказала возможность существования электромагнитных волн, но и позволила установить все их основные свойства, а именно: любая электромагнитная волна независимо от ее конкретной формы (это может быть гармоническая волна или электромагнитное возмущение произвольной формы) характеризуется следующими общими свойствами:

1) ее скорость распространения в непроводящей нейтральной неферромагнитной среде

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \text{ где } c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}; \tag{19}$$

2) векторы **E**, **B** и **v** (скорость волны) взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему (рис. 5). Такое правовинтовое соотношение является *внутренним свойством* электромагнитной волны, не зависящим ни от какой координатной системы;

3) в электромагнитной волне векторы **E** и **B** всегда колеблются в одинаковых фазах (рис. 6, где показана мгновенная «фотография» волны), причем между мгновенными значениями E и B в любой точке существует определенная связь, а именно $E = vB$, или

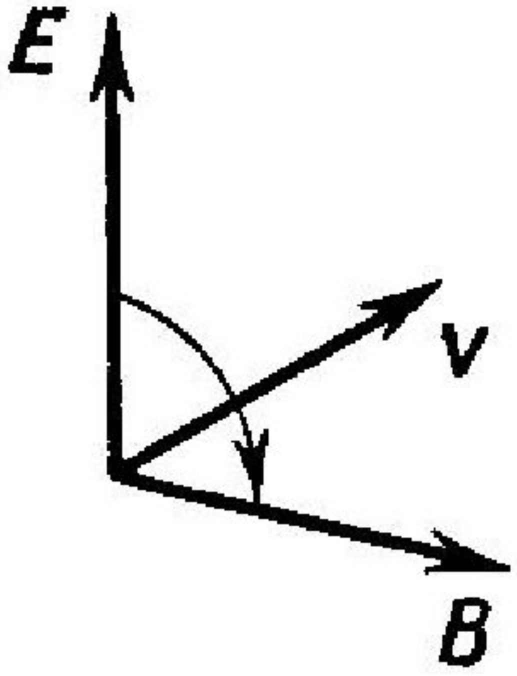

Рис. 5

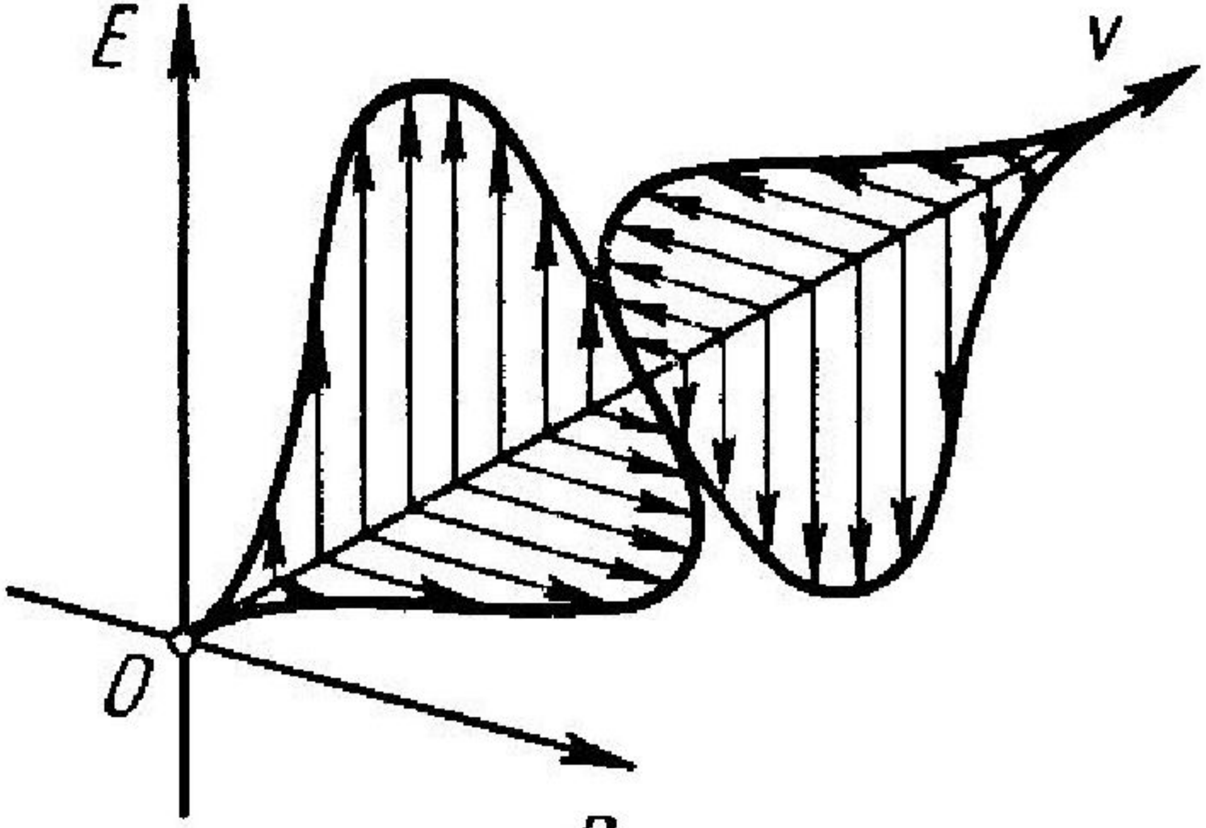

Рис. 6

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H. \qquad (20)$$

Это значит, что E и H (или B) одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т. д.

Понимание того, что из дифференциальных уравнений (18) вытекала возможность существования электромагнитных волн, позволило Максвеллу с блестящим успехом развить электромагнитную теорию света.

§ 4. ЭНЕРГИЯ И ПОТОК ЭНЕРГИИ. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Теорема Пойнтинга. Исходя из представления о локализации энергии в самом поле и руководствуясь принципом сохранения энергии, мы должны заключить, что если в какой-то определенной области энергия уменьшается, то это может происходить только за счет ее «вытекания» через границы рассматриваемой области (среда предполагается неподвижной).

В этом отношении существует формальная аналогия с законом сохранения заряда . Смысл этого закона в том, что убыль заряда в данном объеме за единицу времени равна потоку вектора $\mathbf{j}$ сквозь поверхность, охватывающую этот объем.

Так и в случае закона сохранения энергии следует признать, что существует не только плотность энергии w в данной области, но и некоторый вектор $\mathbf{S}$, характеризующий *плотность потока энергии*.

Если говорить только об энергии электромагнитного поля, то его полная энергия в данном объеме будет изменяться как за счет вытекания ее из объема, так и за счет того, что поле передает свою энергию веществу (заряженным частицам), т. е. производит работу над веществом. Макроскопически это утверждение можно записать так:

$$\boxed{-\frac{dW}{dt} = \oint \mathbf{S}\, d\mathbf{A} + P,} \qquad 21)$$

где $d\mathbf{A}$ — элемент поверхности.

Это уравнение выражает теорему Пойнтинга: *убыль энергии за единицу времени в данном объеме равна потоку энергии сквозь поверхность, ограниченную этим объемом, плюс работа в единицу времени* (т. е. *мощность* P), *которую поле производит над зарядами вещества внутри данного объема.*

В уравнении (21) $W = \int w\, dV$, w — плотность энергии поля, $P = \int \mathbf{jE}\, dV$, $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля. Приведенное выражение для P

можно получить так. За время $\mathrm{d}t$ поле $\mathbf{E}$ совершит над точечным зарядом q работу $\delta A = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}t$, где $\mathbf{u}$ — скорость заряда. Отсюда мощность силы $q\mathbf{E}$ равна $P = q\mathbf{uE}$. Переходя к распределению зарядов, заменим q на $\rho\,\mathrm{d}V$, ρ — объемная плотность заряда. Тогда $\mathrm{d}P = \rho\mathbf{uE}\,\mathrm{d}V = \mathbf{jE}\,\mathrm{d}V$. Остается проинтегрировать $\mathrm{d}P$ по интересующему нас объему.

Следует отметить, что мощность P в (10.21) может быть как положительной, так и отрицательной. Последнее имеет место в тех случаях, когда положительные заряды в веществе движутся против направления поля $\mathbf{E}$ или отрицательные — в противоположном направлении. Например, так обстоит дело в точках среды, где помимо электрического поля $\mathbf{E}$ действует и поле $\mathbf{E}^*$ сторонних сил. В этих точках $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$, и если $\mathbf{E}^* \downarrow\uparrow \mathbf{E}$ и по модулю $E^* > E$, то $\mathbf{jE}$ в выражении для P оказывается отрицательным.

Пойнтинг получил выражения для плотности энергии w и вектора $\mathbf{S}$, воспользовавшись уравнениями Максвелла (этот вывод мы приводить не будем). Если среда не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков (т. е. нет явления гистерезиса), то плотность энергии электромагнитного поля

$$\boxed{w = \frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2}.} \qquad (22)$$

Плотность же потока энергии электромагнитного поля — вектор, называемый **вектором Пойнтинга**,— определяется как

$$\boxed{\mathbf{S} = [\mathbf{EH}].} \qquad (23)$$

Строго говоря, для обеих величин, w и $\mathbf{S}$, из уравнений Максвелла нельзя получить однозначных выражений; приведенные выражения являются простейшими из бесконечного числа возможных. Мы должны поэтому рассматривать эти выражения как постулаты, справедливость которых должна быть подтверждена согласием выводимых из них следствий с опытом.

На нескольких примерах мы увидим, что хотя результаты, получаемые с помощью последних двух формул, иногда выглядят странными, обнаружить в них чего-то невероятного, какого-либо расхождения с опытом не удается. А это и является свидетельством тому, что оба выражения правильные.

Пример 1. Поток энергии в электромагнитной волне (в вакууме). *Вычислим энергию* $\mathrm{d}W$, *проходящую за время* $\mathrm{d}t$ *через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.*

Если в месте нахождения этой площадки известны значения **E** и **B**, то

$$\mathrm{d}W = wc\,\mathrm{d}t,$$

где w — плотность энергии, $w = \varepsilon_0 E^2/2 + \mu_0 H^2/2$. Для электромагнитной волны в соответствии с (10.20)

$$\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2.$$

Это значит, что в электромагнитной волне плотность электрической энергии в любой момент равна плотности магнитной энергии в той же точке, и можно записать для плотности энергии:

$$w = \varepsilon_0 E^2.$$

А тогда

$$dW = \varepsilon_0 E^2 c\, dt = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E^2\, dt.$$

Теперь выясним, что мы получим, если воспользуемся вектором Пойнтинга. Эту же величину dW можно представить через модуль вектора $\mathbf{S}$ так:

$$dW = S\, dt = EH\, dt = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E^2\, dt.$$

Таким образом, оба выражения — для w и $\mathbf{S}$ — приводят к одинаковому результату (последние две формулы).

Пример 2. Выделение теплоты в проводнике.

Пусть по прямому проводу круглого сечения радиусом a течет ток I (рис 7). Поскольку провод обладает сопротивлением, то вдоль него действует некоторое электрическое поле $\mathbf{E}$. Такое же значение $\mathbf{E}$ будет и у поверхности провода в вакууме. Кроме того, значение **E** будет и у поверхности провода в вакууме. Кроме того, наличие тока порождает и магнитное поле. По теореме о циркуляции вектора **H** вблизи поверхности провода $2\pi aH = I$, $H = I/2\pi a$. Векторы **E** и **H** расположены так, что вектор Пойнтинга направлен внутрь

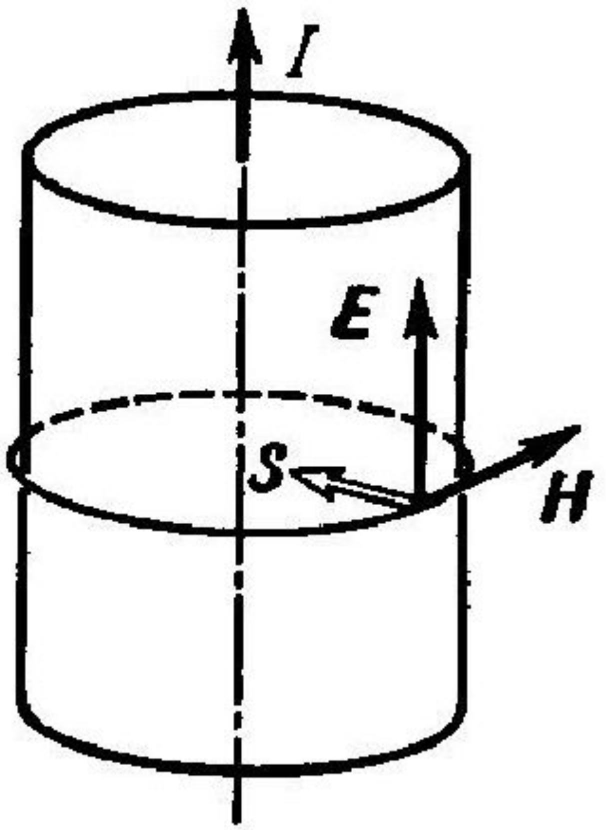

Рис. 7

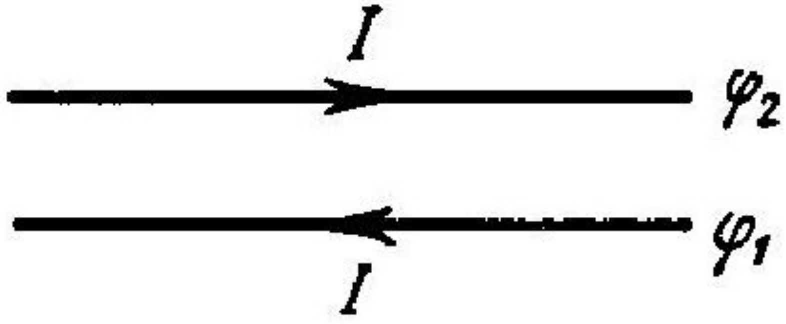

Рис. 8

провода нормально к его боковой поверхности (рис. 7). Следовательно, электромагнитная энергия втекает внутрь провода из окружающего пространства! Но согласуется ли это с количеством теплоты, выделяемым в проводнике? Подсчитаем поток электромагнитной энергии сквозь боковую поверхность участка провода длины l:

$$EH \cdot 2\pi a l = 2\pi a H \cdot El = I \cdot U = RI^2,$$

где учтено, что U — это разность потенциалов на концах данного участка, R — его сопротивление. Таким образом, мы приходим к тому, что поток электромагнитной энергии поступает в провод извне и целиком превращается в джоулеву теплоту. Согласимся, что вывод неожиданный.

Заметим, что в источнике тока вектор **E** направлен против тока I, поэтому в области источника вектор Пойнтинга направлен наружу: там электромагнитная энергия выходит в окружающее пространство, т. е. оказывается, что энергия от источника тока передается не вдоль проводов, а через окружающее проводник пространство в виде потока электромагнитной энергии — потока вектора **S**.

Пример 3. *На рис. 8 показан участок двухпроводной линии. Известны направление тока в проводах и тот факт, что потенциалы проводов* $\varphi_1 < \varphi_2$. *Можно ли установить, где находится источник тока (генератор), слева или справа?*

Ответ можно получить, если воспользоваться вектором Пойнтинга. В нашем случае между проводами вектор **E** направлен вниз, а вектор **H** — за плоскость рисунка, поэтому вектор $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ направлен вправо, т. е. источник тока находится слева, потребитель — справа.

Пример 4. Зарядка конденсатора. *Возьмем плоский конденсатор с круглыми обкладками радиусом a. Пренебрегая краевыми эффектами (рассеянием поля), найдем поток электромагнитной энергии сквозь боковую «поверхность» конденсатора, ибо только там вектор Пойнтинга* **S** *направлен внутрь конденсатора* (рис. 9).

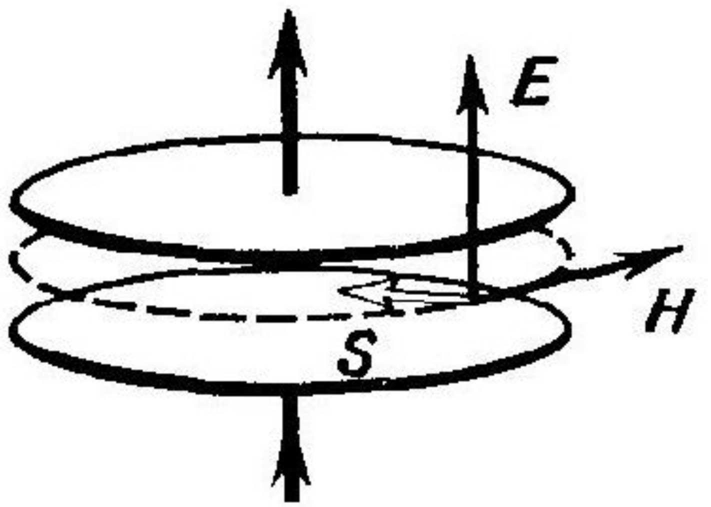

Рис 9

На этой поверхности имеется меняющееся электрическое поле **E** и вызванное его изменением магнитное поле **H**. По теореме о циркуляции вектора **H** следует, что $2\pi a H = \pi a^2 \partial D/\partial t$, где справа стоит ток смещения через контур, показанный на рис 9 пунктиром. Отсюда $H = {}^1/_2 a\, \partial D/\partial t$. Если расстояние между обкладками h, то поток вектора **S** сквозь боковую поверхность есть

$$EH 2\pi a h = E \frac{a}{2} \frac{\partial D}{\partial t} 2\pi a h = E \frac{\partial D}{\partial t} V, \tag{1}$$

где $V = \pi a^2 h$ — объем конденсатора. Будем считать, что этот поток идет целиком на увеличение энергии конденсатора. Тогда, умножив (1) на dt, получим приращение энергии конденсатора за время dt:

$$dW = E\,dD \cdot V = d\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V\right) = d\left(\frac{ED}{2} V\right).$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем формулу для энергии W заряженного конденсатора. Таким образом, и здесь оказывается все в порядке.

5. ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Давление электромагнитной волны. Максвелл теоретически показал, что электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в телах, на которые они падают, оказывают на них *давление*. Это давление возникает в результате воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны.

Пусть электромагнитная волна распространяется в однородной среде, обладающей поглощением. Наличие поглощения означает, что в среде будет выделяться джоулева теплота с объемной плотностью σE^2, а поэтому $\sigma \neq 0$, т. е. поглощающая среда обладает проводимостью.

Электрическое поле волны в такой среде возбуждает электрический ток с плотностью $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Вследствие этого на единицу объема среды действует амперова сила $\mathbf{F}_{\text{ед}} = [\mathbf{jB}] = \sigma [\mathbf{EB}]$, направленная в сторону распространения волны (рис 10). Эта сила и вызывает давление электромагнитной волны.

При отсутствии поглощения проводимость $\sigma = 0$ и $\mathbf{F}_{\text{ед}} = 0$, т. е. в этом случае электромагнитная волна не оказывает никакого давления на среду.

Импульс электромагнитного поля. Поскольку электромагнитная волна оказывает давление на вещество, последнее приобретает определенный импульс. Но в замкнутой системе, состоящей из вещества и электромагнитной волны, возникло бы нарушение закона сохранения импульса, если бы импульсом обладало только вещество.

Импульс такой системы может сохраняться лишь при условии, что электромагнитное поле (волна) также обладает импульсом: вещество приобретает импульс за счет импульса, передаваемого ему электромагнитным полем.

Введем понятие *плотности импульса* **G** электромагнитного поля как величину, численно равную импульсу поля в единице объема. Расчет, который мы не будем здесь приводить, показывает, что плотность импульса

$$\boxed{\mathbf{G} = \mathbf{S}/c^2,} \qquad (24)$$

где $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$ — вектор Пойнтинга. Как и вектор $\mathbf{S}$, плотность импульса $\mathbf{G}$ является, вообще говоря, функцией времени и координат.

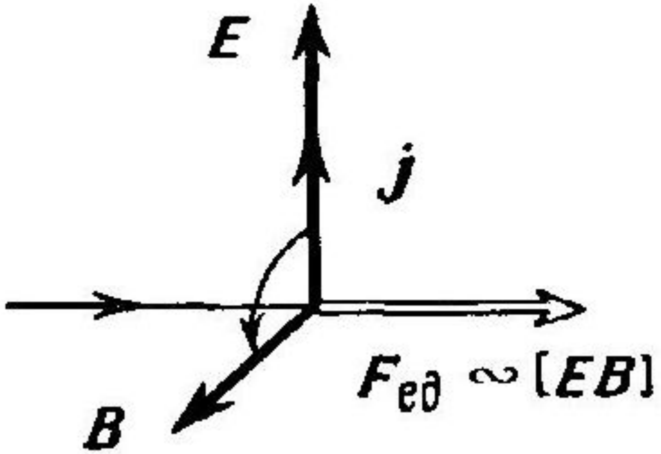

Рис. 10

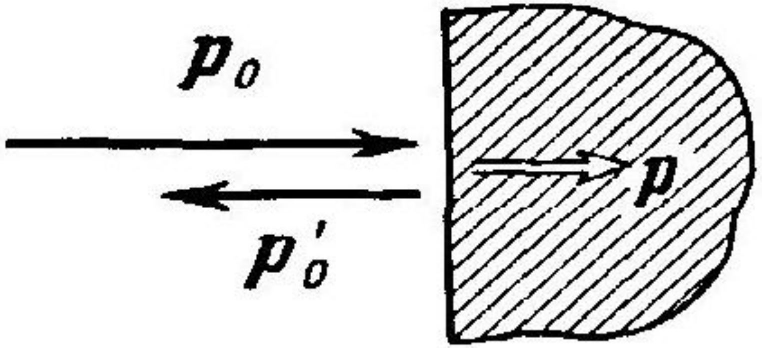

Рис. 11

Для электромагнитной волны в вакууме согласно (20) $\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$, поэтому плотность энергии w и модуль S вектора Пойнтинга равны соответственно:

$$w = \varepsilon_0 E^2/2 + \mu_0 H^2/2 = \varepsilon_0 E^2, \quad S = EH = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}E^2.$$

Отсюда следует, что $S = w/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. А так как $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 1/c$, c — скорость света в вакууме, то $S = wc$, и из формулы (24) вытекает, что для электромагнитной волны в вакууме

$$\boxed{G = w/c.} \tag{25}$$

Такая же связь между энергией и импульсом присуща (как показывается в теории относительности) частицам с нулевой массой покоя. Это и естественно, поскольку согласно квантовым представлениям электромагнитная волна эквивалентна потоку фотонов — частиц с нулевой массой покоя.

2. В точке P_2 (рис. 12) $|d\mathbf{D}|/D = v\,dt/r$, поэтому можно записать:

$$\partial \mathbf{D}/\partial t = -q\mathbf{v}/4\pi r^3 .$$

Если $q > 0$, то $\mathbf{j}_{см} \downarrow\uparrow \mathbf{v}$, и наоборот.

● **2.** *Ток, текущий по длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого R, меняют так, что магнитное поле внутри соленоида возрастает со временем по закону $B = \beta t^2$, где β — постоянная. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида.*

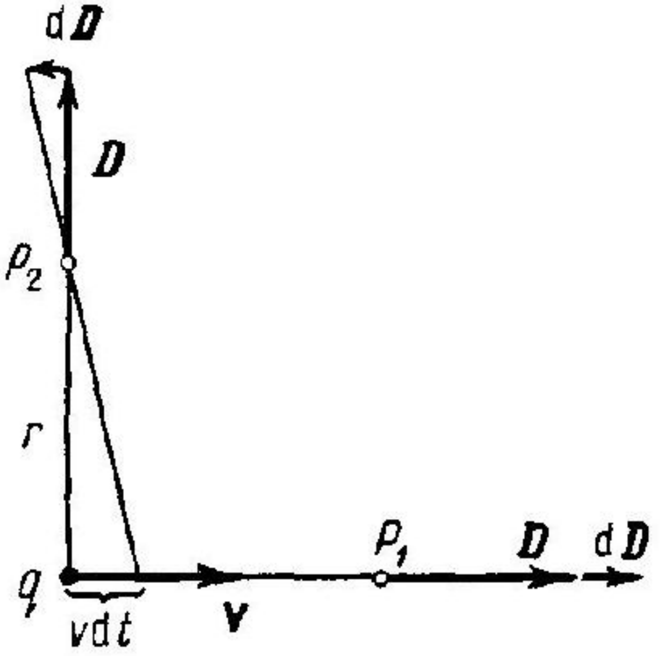

Рис. 12

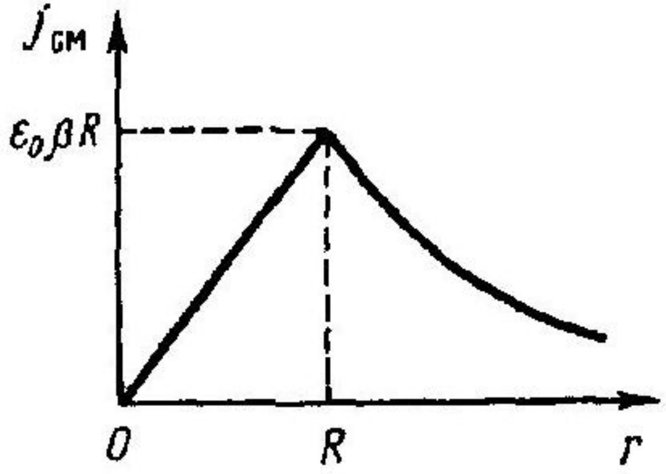

Рис. 13

Решение. Чтобы определить плотность тока смещения, надо согласно (10.5) сначала найти напряженность электрического поля — здесь оно будет вихревым. Воспользовавшись уравнением Максвелла для циркуляции вектора **E**, запишем:

$$2\pi r E = \pi r^2 \partial B/\partial t,\ E = r\beta t\ (r < R);$$
$$2\pi r E = \pi R^2 \partial B/\partial t,\ E = R^2 \beta t/r\ (r > R).$$

Теперь по формуле $j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \partial E/\partial t$ найдем плотность тока смещения:

$$j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \beta r\ (r < R);\ j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \beta R^2/r\ (r > R).$$

График зависимости $j_{\text{см}}(r)$ показан на рис. 13.

● 3. *Плоский конденсатор образован двумя дисками, между которыми находится однородная слабо проводящая среда. Конденсатор зарядили и отключили от источника напряжения. Пренебрегая краевыми эффектами, показать, что магнитное поле внутри конденсатора отсутствует.*

Решение. Магнитное поле будет отсутствовать, потому что полный ток (ток проводимости плюс ток смещения) равен нулю. Это и надо показать. Обратимся к плотности тока. Пусть в некоторый момент плотность тока проводимости равна **j**. Ясно, что $\mathbf{j} \propto \mathbf{D}$, причем $\mathbf{D} = \sigma \mathbf{n}$, где σ — поверхностная плотность заряда на положительно заряженной обкладке; **n** — нормаль (рис. 14).

Наличие тока проводимости приводит к уменьшению поверхностной плотности заряда σ, а следовательно, и $\mathbf{D}$ — ток проводимости будет сопровождаться током смещения. Плотность последнего

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D}/\partial t = (\partial \sigma/\partial t)\,\mathbf{n} = -j\mathbf{n} = -\mathbf{j}.$$

Отсюда следует, что действительно

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}} = 0.$$

● 4. *Пространство между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых дисков, заполнено однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью* σ *и диэлектрической проницаемостью* ε. *Пренебрегая краевыми эффектами, найти модуль вектора* $\mathbf{H}$ *между обкладками на расстоянии* r *от их оси, если напряженность электрического поля между обкладками меняется со временем по закону* $E = E_m \cos \omega t$.

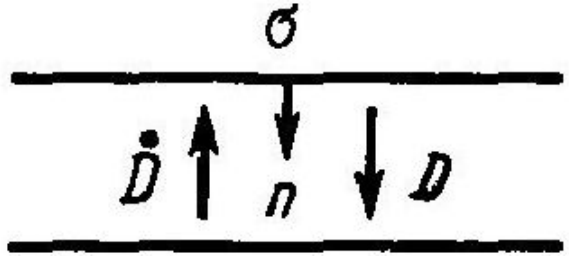

Рис. 14

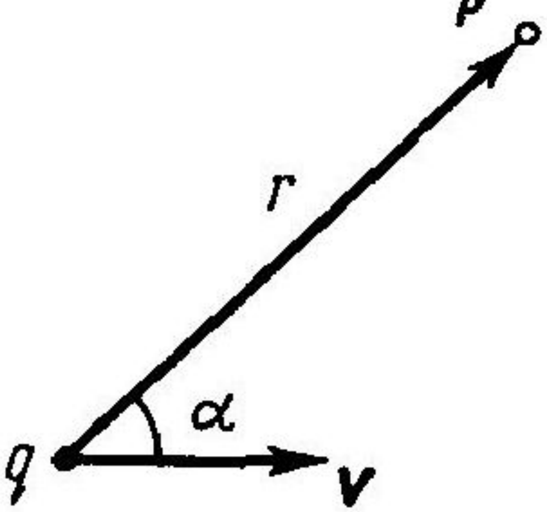

Рис. 15

Р е ш е н и е. Из уравнения Максвелла для циркуляции вектора **H** следует, что

$$2\pi r H = \left(j_n + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) \pi r^2 .$$

Принимая во внимание закон Ома $j_n = \sigma E_n(t)$, получим

$$H = \frac{r}{2}\left(\sigma E_n + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) = \frac{rE_m}{2}(\sigma \cos \omega t - \varepsilon\varepsilon_0 \omega \sin \omega t).$$

Преобразуем выражение в скобках к косинусу. Для этого умножим и разделим это выражение на $f=\sqrt{\sigma^2+(\varepsilon\varepsilon_0\omega)^2}$, а затем введем угол δ по формулам $\sigma/f=\cos\delta$, $\varepsilon\varepsilon_0\omega/f=\sin\delta$. Тогда

$$H={}^1/_2 rE_m\sqrt{\sigma^2+(\varepsilon\varepsilon_0\omega)^2}\,|\cos(\omega t+\delta)|.$$

● **5.** *Точечный заряд q движется в вакууме равномерно и прямолинейно с нерелятивистской скоростью* **v**. *Воспользовавшись уравнением Максвелла для циркуляции вектора* **H**, *получить выражение для* **H** *в точке P, положение которой относительно заряда характеризуется радиус-вектором* **r** (рис. 15).

Р е ш е н и е. Из соображений симметрии ясно, что в качестве контура, по которому надо брать циркуляцию вектора **H**, следует взять окружность с центром O (ее след показан на рис. 16 штриховой линией). Тогда

$$2\pi R H = \frac{\partial}{\partial t} \int D_n \, dS, \qquad (1)$$

где R — радиус окружности.

Найдем поток вектора **D** сквозь поверхность, ограниченную этой окружностью. Проще всего, если эту поверхность S взять

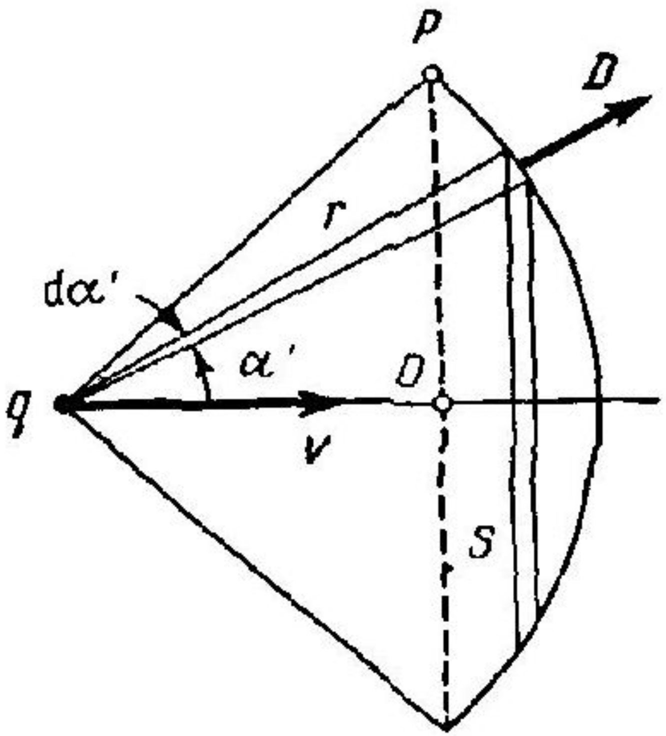

Рис. 16

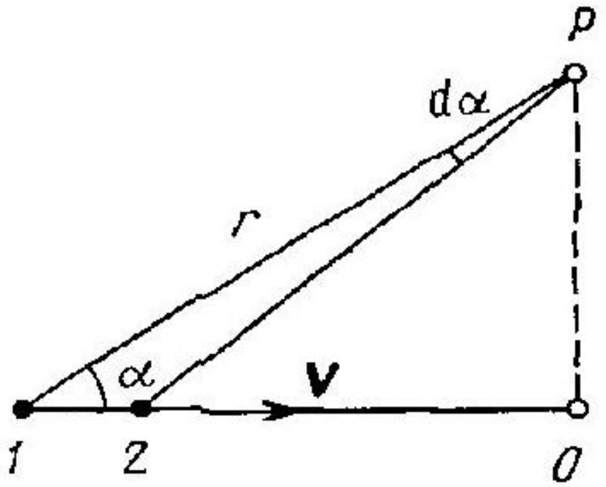

Рис. 17

сферической с радиусом кривизны r (рис. 16). Тогда поток вектора $\mathbf{D}$ через элементарное кольцо, взятое на данной сферической поверхности, есть

$$D\,\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi r^2}2\pi r\sin\alpha'\cdot r\,\mathrm{d}\alpha' = \frac{q}{2}\sin\alpha'\,\mathrm{d}\alpha',$$

а весь поток сквозь выбранную поверхность

$$\int D\,\mathrm{d}S = \frac{q}{2}(1-\cos\alpha). \tag{2}$$

Теперь согласно (1) продифференцируем (2) по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int D\,\mathrm{d}S \approx \frac{q}{2}\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

При перемещении заряда из точки 1 в точку 2 (рис. 17) на расстояние $v\,dt$ имеем $v\,dt\cdot\sin\alpha \approx r\,d\alpha$, откуда

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{v\sin\alpha}{r}. \tag{4}$$

После подстановки (4) в (3), а затем (3) в (1) получим

$$H = qvr\sin\alpha/4\pi r^3, \tag{5}$$

где учтено, что $R = r\sin\alpha$. Соотношение (5) в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{H} = \frac{q}{4\pi}\frac{[\mathbf{vr}]}{r^3}.$$

Мы видим, таким образом, что постулированное нами выражение является следствием уравнений Максвелла.

● 6. **Ротор E.** *В некоторой области инерциальной системы отсчета имеется вращающееся с угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}$ *магнитное поле, модуль которого* $B = \mathrm{const}$. *Найти* $\nabla \times \mathbf{E}$ *в этой области как функцию векторов* $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{B}$.

Решение. Из уравнения $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ видно, что вектор $\nabla \times \mathbf{E}$ направлен противоположно вектору $\mathrm{d}\mathbf{B}$, а его модуль можно вычислить с помощью рис. 18:

$$|\mathrm{d}\mathbf{B}| = B \cdot \omega\, \mathrm{d}t, \quad |\mathrm{d}\mathbf{B}/\mathrm{d}t| = B\omega.$$

Поэтому

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\left|\vec{\omega}\mathbf{B}\right|.$$

● **7. Вектор Пойнтинга.** *Протоны, имеющие одинаковую скорость* **v**, *образуют пучок круглого сечения с током I. Найти направление и модуль вектора Пойнтинга* **S** *вне пучка на расстоянии r от его оси.*

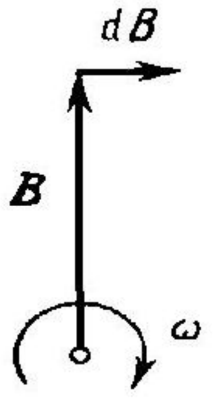

Рис. 18

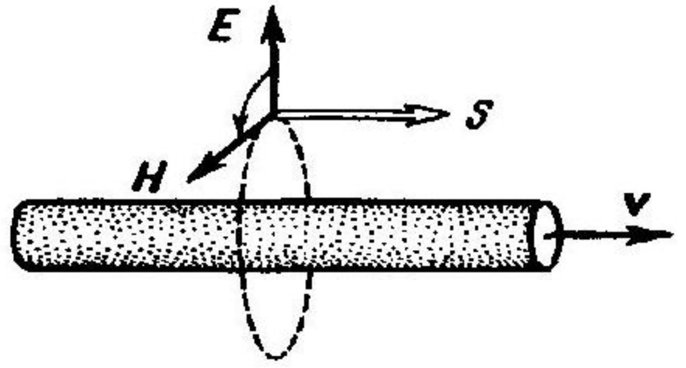

Рис. 19

Р е ш е н и е. Из рис. 19 видно, что $\mathbf{S} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$. Найдем модуль вектора **S**: $S = EH$, где E и H зависят от r. По теореме Гаусса

$$2\pi r E = \lambda/\varepsilon_0,$$

где λ — заряд на единицу длины пучка. Кроме того, по теореме о циркуляции вектора **H**

$$2\pi r H = I.$$

Определяя E и H из последних двух уравнений и учитывая, что $I = \lambda v$, получаем

$$S = EH = I^2/4\pi^2\varepsilon_0 v r^2.$$

● 8. *Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.*

Р е ш е н и е. При возрастании тока увеличивается магнитное поле в соленоиде, а значит, появляется вихревое электрическое поле. Пусть радиус сечения соленоида равен a. Тогда напряженность вихревого электрического поля у боковой поверхности соленоида можно определить с помощью уравнения Максвелла, выражающего закон электромагнитной индукции:

$$2\pi a E = \pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t}, \quad E = \frac{a}{2} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Поток энергии через боковую поверхность соленоида можно представить в таком виде:

$$\Phi = EH \cdot 2\pi a l = \pi a^2 l \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right),$$

где l — длина соленоида, $\pi a^2 l$ — его объем.

Таким образом, мы видим, что поток энергии через боковую поверхность соленоида (поток вектора Пойнтинга) равен скорости изменения магнитной энергии внутри соленоида:

$$\Phi = S \cdot 2\pi a l = \partial W / \partial t.$$

● **9.** *Энергия от источника постоянного напряжения U передается к потребителю по длинному коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым сопротивлением. Ток в кабеле I. Найти поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя проводящая оболочка кабеля тонкостенная.*

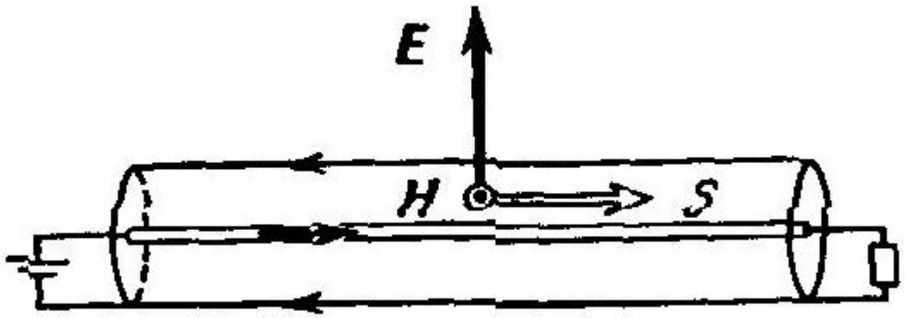

Рис. 20

Решение. Искомый поток энергии определяется формулой

$$\Phi = \int_a^b S \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r, \qquad (1)$$

где $S = EH$ — плотность потока, $2\pi r dr$ — элементарное кольцо шириной $\mathrm{d}r$, в пределах которого S одинаково, a и b — радиусы внутреннего провода и внешней оболочки кабеля (рис. 20). Для вычисления этого интеграла необходимо знать зависимость $S(r)$, или $E(r)$ и $H(r)$.

С помощью теоремы Гаусса получим

$$2\pi r E = \lambda/\varepsilon_0, \qquad (2)$$

где λ — заряд провода на единицу длины. Далее, по теореме о циркуляции

$$2\pi r H = I. \qquad (3)$$

После подстановки E и H из формул (2) и (3) в выражение (1) и интегрирования получим

$$\Phi = \frac{\lambda I}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \tag{4}$$

В условии задачи λ, a и b не заданы, вместо них дано U. Найдем связь между этими величинами:

$$U = \int_a^b E \, \mathrm{d}r \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \tag{5}$$

Из сопоставления (4) и (5) следует, что

$$\Phi = UI.$$

Это совпадает со значением мощности, выделяемой на нагрузке.

● 10. *Плоский воздушный конденсатор, пластины которого имеют форму дисков радиусом a, подключены к переменному гармоническому напряжению частоты ω. Найти отношение максимальных значений магнитной и электрической энергией внутри конденсатора.*

Р е ш е н и е. Пусть напряжение на конденсаторе меняется по закону $U = U_m \cos \omega t$ и расстояние между пластинами конденсатора равно h. Тогда электрическая энергия конденсатора

$$W_э = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi a^2 h = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2h} U_m^2 \cos^2 \omega t. \qquad (1)$$

Магнитную энергию определим по формуле

$$W_м = \int \frac{B^2}{2\mu_0} \mathrm{d}V. \qquad (2)$$

Необходимую для вычисления этого интеграла величину B найдем из теоремы о циркуляции вектора $\mathbf{H}$: $2\pi r H = \pi r^2 \partial D/\partial t$. Отсюда, имея в виду, что $H = B/\mu_0$ и $\partial D/\partial t = -\varepsilon_0 (U_m/h) \omega \sin \omega t$, получим

$$B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{r \omega U_m}{h} |\sin \omega t|. \qquad (3)$$

Остается подставить (3) в (2), где в качестве $\mathrm{d}V$ надо взять элементарный объем в виде кольца, для которого $\mathrm{d}V = 2\pi r\,\mathrm{d}r \cdot h$. В результате интегрирования найдем

$$W_{\text{м}} = \frac{\pi}{16} \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2 a^4 U_m^2}{h} \sin^2 \omega t. \qquad (4)$$

Отношение максимальных значений магнитной энергии (4) и электрической энергии (1) таково:

$$\frac{W_{\text{м макс}}}{W_{\text{э. макс}}} = \frac{1}{8} \mu_0 \varepsilon_0 a^2 \omega^2.$$

Например, при $a = 6$ см и $\omega = 1\,000$ с$^{-1}$ это отношение равно $5 \cdot 10^{-15}$.