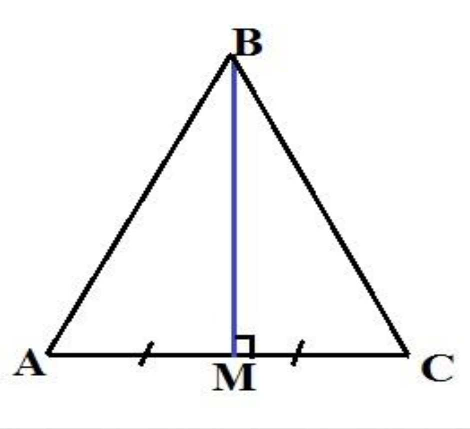
Признаки равнобедренного треугольника

Если медиана треугольника является его высотой, то данный треугольник равнобедренный



Дано: ABC-треугольник

BM-медиана ΔABC

BM-высота ΔABC

Доказать: ΔABC - равнобедренный

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{r} BM - \text{высота}\,\Delta ABC\ (\text{по усл.}) \Rightarrow BM \perp AC \\ BM - \text{медиана}\,\Delta ABC\ (\text{по усл.}) \Longrightarrow AM = MC = \frac{1}{2}AC \end{array}\right| \Rightarrow$$

⇒BM – серединный перпендикуляр отрезка AC (по опр.) ⇒

$\Rightarrow \rho(B; A) = \rho(B; C)$ (по свойству серединного ⊥), т.е.

BA=BC ⇒ ΔABC – равнобедренный (по определению).

II способ.

1) BM – медиана ΔABC (по усл.) $\Longrightarrow AM = MC = \frac{1}{2}AC$

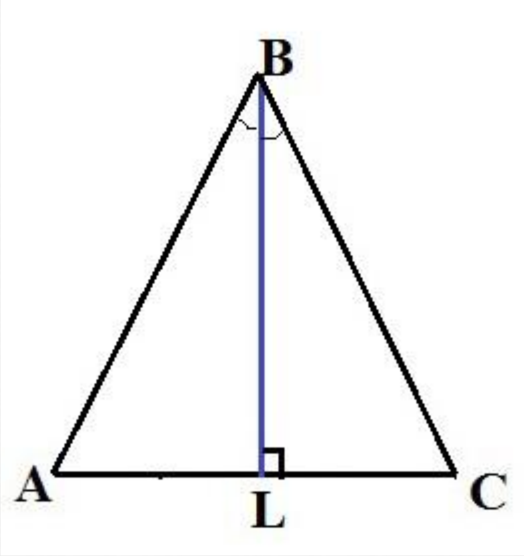
2) BM – высота ΔABC (по усл.) $\Rightarrow \angle BMA = \angle BMC = 90^0$

3) Рассмотрим ΔABM и ΔCBM

$$\left.\begin{array}{r} BM \text{ – общая сторона} \\ AM = MC \text{ (п. 1)} \\ \angle BMA = \angle BMC \text{ (п. 2)} \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABM = \Delta CBM$$

(по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный (по опр.)

Если биссектриса треугольника является его высотой, то данный треугольник равнобедренный



Дано: ABC-треугольник

BL-биссектриса ΔABC

BL-высота ΔABC

Доказать: ΔABC - равнобедренный

1) BL-биссектриса ΔABC (по усл.) ⇒ $\angle ABL = \angle CBL = \frac{1}{2}\angle ABC$

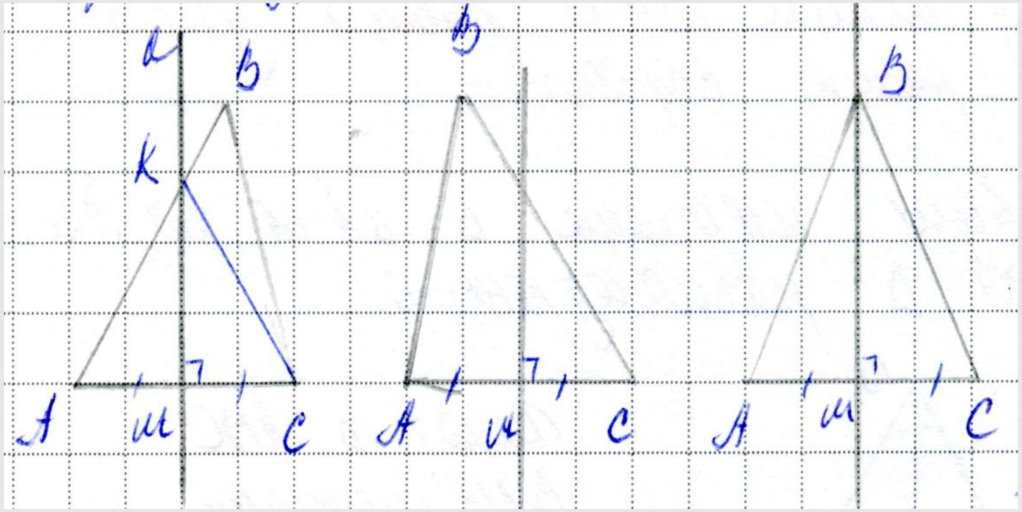
2) BL-высота ΔABC (по усл.) ⇒ $\angle ALB = \angle CLB = 90^0$

3) Рассмотрим ΔABL и ΔCBL

$$\left.\begin{array}{l} BL - \text{общая сторона} \\ \angle ABL = \angle CBL \ (\text{п. } 1) \\ \angle ALB = \angle CLB \ (\text{п. } 2) \end{array}\right| \Longrightarrow$$ ΔABL = ΔCBL (по стороне и двум прилежащим углам)

4) ΔABL = ΔCBL (п.3), ⟹ AB=BC (как соответ. элементы), ⟹ ΔABC – равнобедренный (по определению), ч.т.д.

Если в треугольнике два угла равны, то данный треугольник равнобедренный



- Дано: ABC-треугольник

$\angle A = \angle C$

Доказать: ΔABC - равнобедренный

Доказательство:

1) Доп. постр.: ***a*** – серединный перпендикуляр к АС. Докажем, что прямая ***a*** проходит через точку В.

2) Предположим, что прямая $a \cap AB = К$ или $a \cap BC = H$

Если $a \cap AB = К$, то К – точка серединного перпендикуляра к отрезку АС, ⇒АК=КС (по свойству серединного ⊥). Так как АК=КС, то ΔАКС – равнобедренный (по опр.), ⇒ $\angle A = \angle ACK$

$$\left.\begin{array}{r}\angle A = \angle ACK \text{ (по допущ.)} \\ \angle A = \angle ACB \text{ (по усл.)}\end{array}\right| \Longrightarrow \angle ACK = \angle ACB,$$ что противоречит основному свойству величины угла.

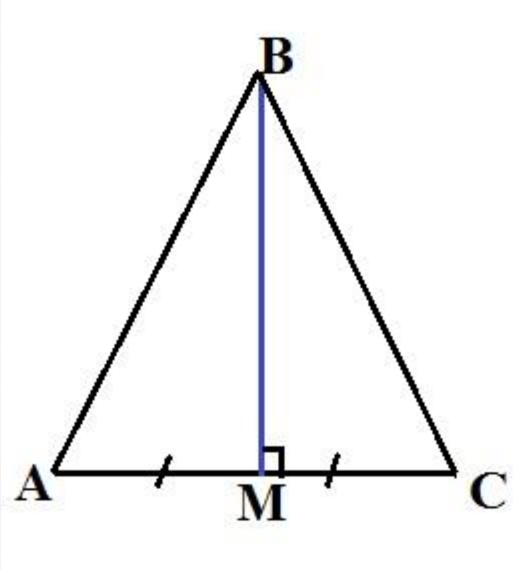
Значит, предположение о том, что $a \cap AB = К$ неверно.

Аналогично можно доказать, что прямая ***a*** не пересекает ВС в точке Н.

Значит, прямая ***a*** проходит через точку В, ⟹ АВ=ВС (по свойству серединного ⊥), ⟹ ΔАВС – равнобедренный, ч.т.д.

В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

Если медиана треугольника является его биссектрисой, то данный треугольник равнобедренный

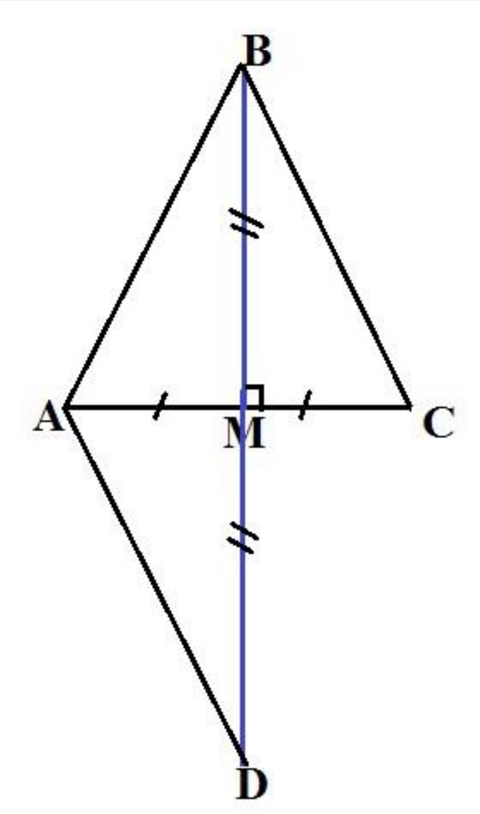


Дано: ABC-треугольник

BM-медиана ΔABC

BM-биссектриса ΔABC

Доказать: ΔABC - равнобедренный



1) BM-биссектриса ΔABC (по усл.), $\angle ABM = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle ABC$ (по опр.)
2) BM – медиана ΔABC (по усл.), ⇒ AM=MC=$\frac{1}{2}$AC (по опр.)
3) Доп. постр.: на продолжении BM отложим отрезок MD так, что BM=MD

4) ΔBMC и ΔADM

$$\left.\begin{array}{c} BM = MD (\text{по постр.}) \\ \text{CM} = \text{AM} (\text{п. } 2) \\ \angle BMC = \angle AMD (\text{по св} - \text{ву вертикальных} \angle) \end{array}\right| \Rightarrow$$

⇒ ΔBMC = ΔADM (по двум сторонам и углу между ними)

5) ΔBMC = ΔADM, ⇒ BC=AD, $\angle CBM = \angle ADM$ (как соответ. элементы)

6) $\left.\begin{array}{l} \angle CBM = \angle ADM \ (\text{п. } 5) \\ \angle CBM = \angle ABM \ (\text{п. } 1) \end{array}\right| \Rightarrow \angle ABM = \angle ADM$ ⇒ ΔADB – равнобедренный (по признаку р/б Δ), ⇒ AB=AD

7) $\left.\begin{array}{l} \text{AB}=\text{AD} \ (\text{п. } 6) \\ \text{BC} = AD (\text{п. } 5) \end{array}\right|$ ⇒AB=BC, ⇒ ΔABC – равнобедренный (по опр.)