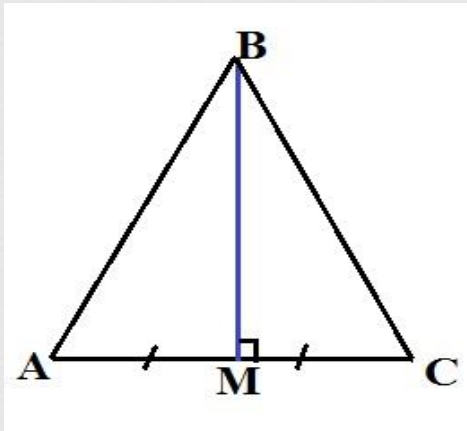


Признаки равнобедренного треугольника

*Если медиана треугольника является его высотой,
то данный треугольник равнобедренный*



□
Дано: $\triangle ABC$ -треугольник

BM -медиана $\triangle ABC$

BM -высота $\triangle ABC$

Доказать: $\triangle ABC$ - равнобедренный

Доказательство:

BM – высота $\triangle ABC$ (по усл.) $\Rightarrow BM \perp AC$
 BM – медиана $\triangle ABC$ (по усл.) $\Rightarrow AM = MC = \frac{1}{2}AC$
 $\Rightarrow BM$ – серединный перпендикуляр отрезка AC (по опр.) \Rightarrow
 $\Rightarrow \rho(B; A) = \rho(B; C)$ (по свойству серединного \perp), т.е.
 $BA = BC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный (по определению).

III способ.



1) BM – медиана $\triangle ABC$ (по усл.) $\Rightarrow AM = MC = \frac{1}{2}AC$

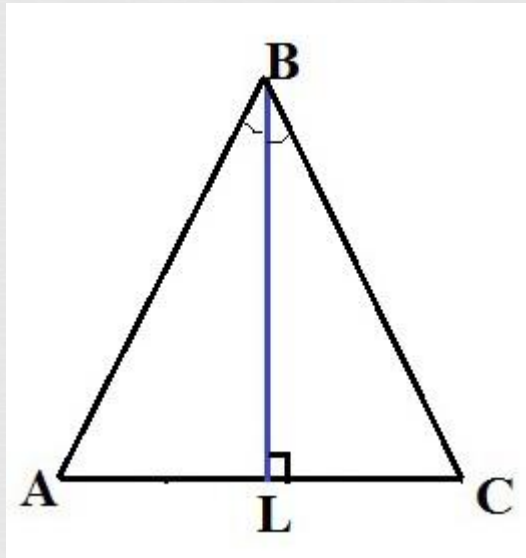
2) BM – высота $\triangle ABC$ (по усл.) $\Rightarrow \angle BMA = \angle BMC = 90^\circ$

3) Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$

BM – общая сторона
 $AM = MC$ (п. 1)
 $\angle BMA = \angle BMC$ (п. 2) $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBM$ (по двум сторонам

и углу между ними) $\Rightarrow AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный
(по опр.)

Если биссектриса треугольника является его высотой, то данный треугольник равнобедренный



Дано: $\triangle ABC$ -треугольник

BL -биссектриса $\triangle ABC$

BL -высота $\triangle ABC$

Доказать: $\triangle ABC$ - равнобедренный

1) BL -биссектриса $\triangle ABC$ (по усл.) $\Rightarrow \angle ABL = \angle CBL = \frac{1}{2} \angle ABC$

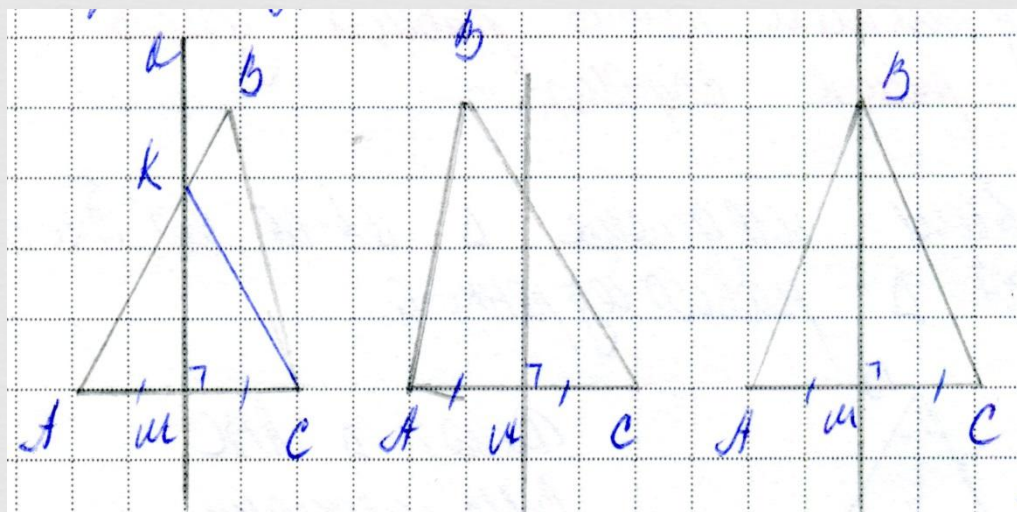
2) BL -высота $\triangle ABC$ (по усл.) $\Rightarrow \angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$

3) Рассмотрим $\triangle ABL$ и $\triangle CBL$

BL – общая сторона
 $\left. \begin{array}{l} \angle ABL = \angle CBL \text{ (п. 1)} \\ \angle ALB = \angle CLB \text{ (п. 2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABL = \triangle CBL$ (по стороне и двум прилежащим углам)

4) $\triangle ABL = \triangle CBL$ (п.3), $\Rightarrow AB=BC$ (как соответ. элементы), $\Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный (по определению), ч.т.д.

Если в треугольнике два угла равны, то данный
треугольник равнобедренный



Дано: $\triangle ABC$ -треугольник

$$\angle A = \angle C$$

Доказать: $\triangle ABC$ -
равнобедренный

Доказательство:

1) Доп. постр.: a – серединный перпендикуляр к AC . Докажем, что прямая a проходит через точку B .

2) Предположим, что прямая $a \cap AB = K$ или $a \cap BC = H$

Если $a \cap AB = K$, то K – точка ~~серединного~~ перпендикуляра к отрезку AC , $\Rightarrow AK=KC$ (по свойству серединного \perp). Так как $AK=KC$, то $\triangle AKC$ – равнобедренный (по опр.), $\Rightarrow \angle A = \angle ACK$

$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle ACK \text{ (по допущ.)} \\ \angle A = \angle ACB \text{ (по усл.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ACK = \angle ACB$, что противоречит основному свойству величины угла.

Значит, предположение о том, что $a \cap AB = K$ неверно.

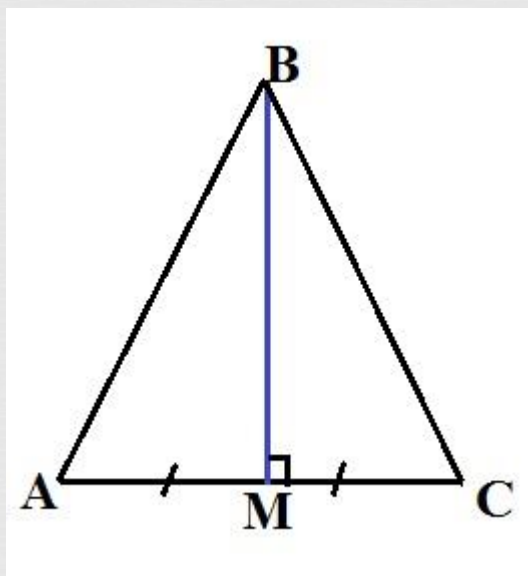
Аналогично можно доказать, что прямая a не пересекает BC в точке H .

Значит, прямая a проходит через точку B , $\Rightarrow AB=BC$ (по свойству серединного \perp), $\Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный, ч.т.д.

*В треугольнике против равных углов лежат
равные стороны.*



Если медиана треугольника является его биссектрисой, то данный треугольник равнобедренный

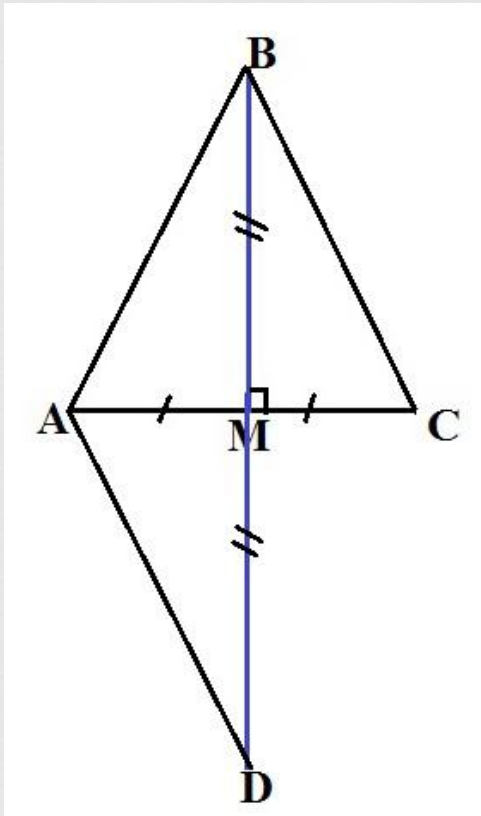


Дано: $\triangle ABC$ -треугольник

BM -медиана $\triangle ABC$

BM -биссектриса $\triangle ABC$

Доказать: $\triangle ABC$ - равнобедренный



□



- 1) BM -биссектриса $\triangle ABC$ (по усл.),
 $\angle ABM = \angle CBM = \frac{1}{2} \angle ABC$ (по опр.)
- 2) BM – медиана $\triangle ABC$ (по усл.), \Rightarrow
 $AM = MC = \frac{1}{2} AC$ (по опр.)
- 3) Доп. постр.: на продолжении BM
отложим отрезок MD так, что
 $BM = MD$

4) $\triangle BMC$ и $\triangle ADM$

$$BM = MD \text{ (по постр.)}$$

$$CM = AM \text{ (п. 2)}$$

$$\angle BMC = \angle AMD \text{ (по св - ву вертикальных } \angle \text{)} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle BMC = \triangle ADM$ (по двум сторонам и углу между ними)

5) $\triangle BMC = \triangle ADM$, $\Rightarrow BC = AD$, $\angle CBM = \angle ADM$ (как соответ. элементы)

$$\angle CBM = \angle ADM \text{ (п. 5)}$$

$$6) \quad \left. \begin{array}{l} \angle CBM = \angle ABM \text{ (п. 1)} \\ \angle CBM = \angle ADM \text{ (п. 5)} \end{array} \right| \Rightarrow \angle ABM = \angle ADM \Rightarrow \triangle ADB -$$

равнобедренный (по признаку р/б \triangle), $\Rightarrow AB = AD$

$$7) \quad AB = AD \text{ (п. 6)}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \text{ (п. 6)} \\ BC = AD \text{ (п. 5)} \end{array} \right| \Rightarrow AB = BC, \Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный (по опр.)}$$