МБОУ "Ики-Бурульская СОШ им.А.Пюрбеева"

Обратные тригонометрические функции, их графики и формулы

Учитель математики: КОРЖУЕВА Е.М.

Определения обратных тригонометрических функций

Поскольку тригонометрические функции периодичны, то обратные к ним функции не однозначны. Так, уравнение $y = \sin x$, при заданном $y\,(-1 \leqslant y \leqslant 1)$, имеет бесконечно много корней. Действительно, в силу периодичности синуса, если x такой корень, то и $x + 2\pi n$ (где n целое) тоже будет корнем уравнения. Таким образом, **обратные тригонометрические функции многозначны**. Чтобы с ними было проще работать, вводят понятие их главных значений. Например, если для синуса $y = \sin x$, если ограничить аргумент x интервалом $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то на этом интервле функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Поэтому она имеет однозначную обратную функцию, которую называют арксинусом: $x = \arcsin y$.

Если особо не оговорено, то под обратными тригонометрическими функциями имеют в виду их главные значения, которые определяются следующими определениями.

Арксинус ($y = \arcsin x$) – это функция, обратная к синусу ($x = \sin y$), имеющая область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

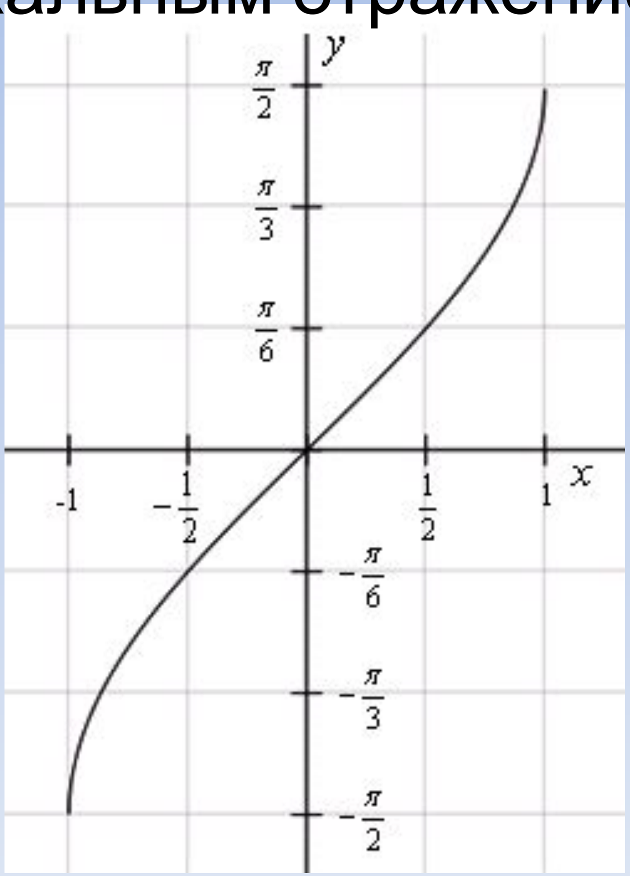
Арккосинус ($y = \arccos x$) – это функция, обратная к косинусу ($x = \cos y$), имеющая область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и множество значений $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Арктангенс ($y = \operatorname{arctg} x$) – это функция, обратная к тангенсу ($x = \operatorname{tg} y$), имеющая область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

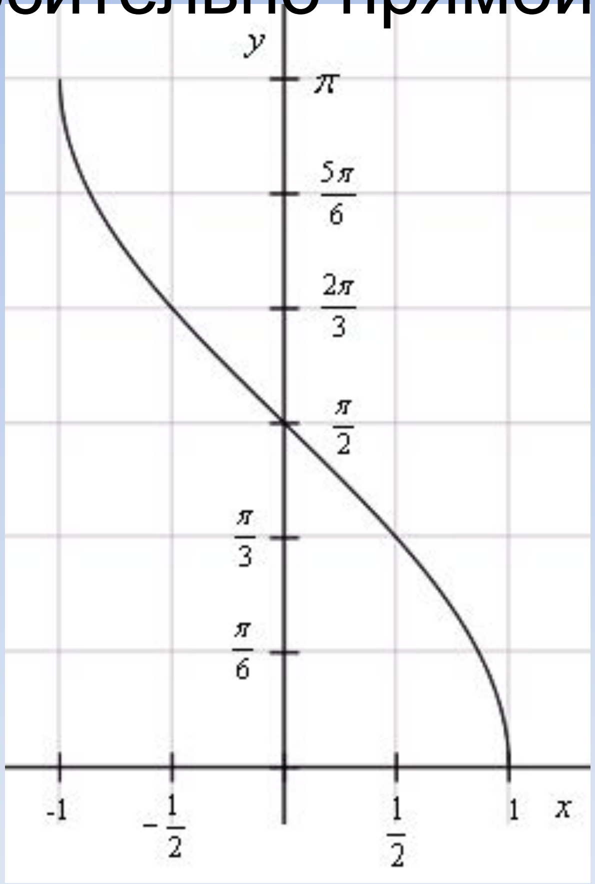
Арккотангенс ($y = \operatorname{arcctg} x$) – это функция, обратная к котангенсу ($x = \operatorname{ctg} y$), имеющая область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $0 < y < \pi$.

Графики обратных тригонометрических функций

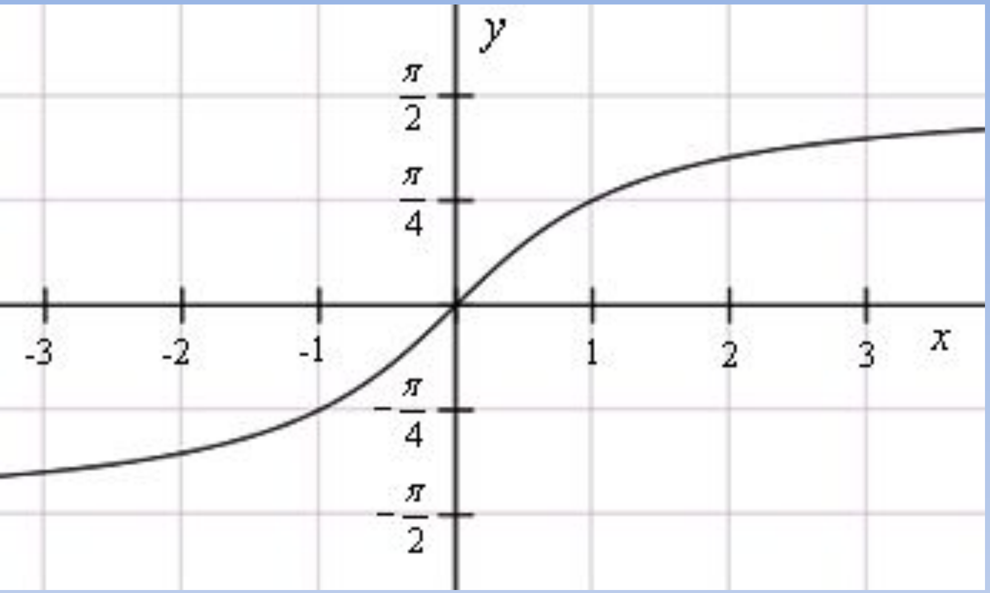
Графики обратных тригонометрических функций получаются из графиков тригонометрических функций зеркальным отражением относительно прямой $y = x$.



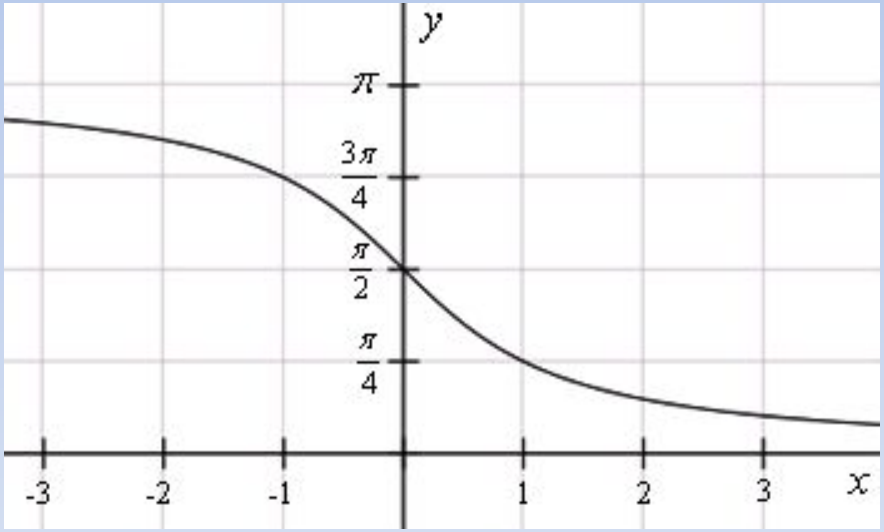
y* = arcsin *x



y* = arccos *x



y* = arctg *x



y* = arcctg *x

Основные формулы

$\arcsin(\sin x) = x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin x) = x$

$\arccos(\cos x) = x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$\cos(\arccos x) = x$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ при $0 < x < \pi$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$

Формулы, связывающие обратные тригонометрические функции

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Формулы суммы и разности

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

при $xy \leqslant 0$ или $x^2 + y^2 \leqslant 1$

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

при $x > 0,\ y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

при $x < 0,\ y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$

при $xy \geqslant 0$ или $x^2 + y^2 \leqslant 1$

$$\arcsin x - \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$

при $x > 0,\ y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arcsin x - \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$

при $x < 0,\ y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$

при $x + y \geqslant 0$

$$\arccos x + \arccos y = 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$

при $x + y < 0$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

при $x > 0,\ xy > 1$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

при $x < 0,\ xy > 1$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$$

при $xy > -1$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$$

при $x > 0,\ xy < -1$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$$

при $x < 0,\ xy < -1$