

МБОУ "Ики-Бурульская СОШ им.А.Пюрбеева"

Обратные тригонометрические функции, их графики и формулы

Учитель математики: **КОРЖУЕВА Е.М.**

Определения обратных тригонометрических функций

Поскольку тригонометрические функции периодичны, то обратные к ним функции не однозначны. Так, уравнение $y = \sin x$, при заданном y ($-1 \leq y \leq 1$), имеет бесконечно много корней. Действительно, в силу периодичности синуса, если x такой корень, то и $x + 2\pi n$ (где n целое) тоже будет корнем уравнения. Таким образом, **обратные тригонометрические функции многозначны**. Чтобы с ними было проще работать, вводят понятие их главных значений. Например, если для синуса $y = \sin x$, если ограничить аргумент x интервалом $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то на этом интервале функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Поэтому она имеет однозначную обратную функцию, которую называют арксинусом: $x = \arcsin y$.

Если особо не оговорено, то под обратными тригонометрическими функциями имеют в виду их главные значения, которые определяются следующими определениями.

Арксинус ($y = \arcsin x$) – это функция, обратная к синусу ($x = \sin y$), имеющая область определения $-1 \leq x \leq 1$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

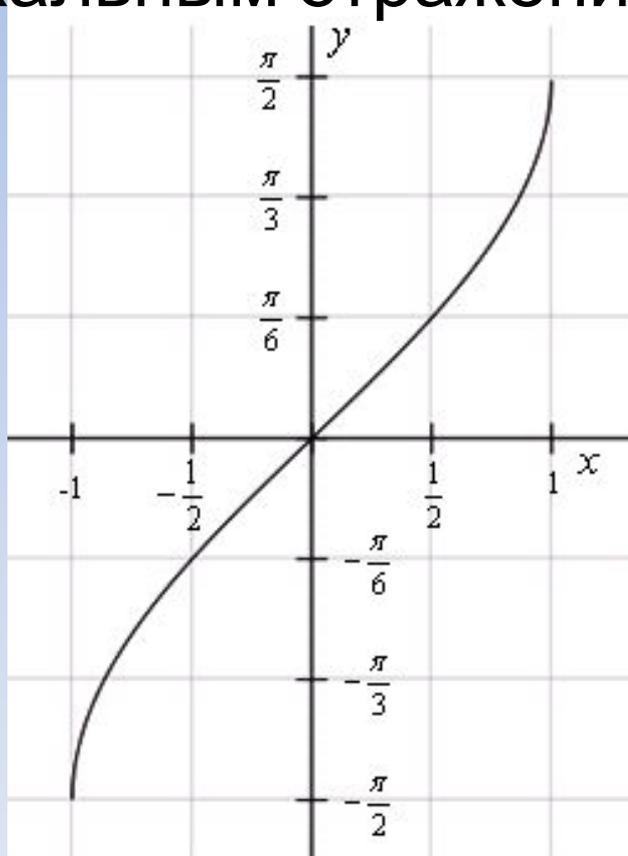
Арккосинус ($y = \arccos x$) – это функция, обратная к косинусу ($x = \cos y$), имеющая область определения $-1 \leq x \leq 1$ и множество значений $0 \leq y \leq \pi$.

Арктангенс ($y = \operatorname{arctg} x$) – это функция, обратная к тангенсу ($x = \operatorname{tg} y$), имеющая область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

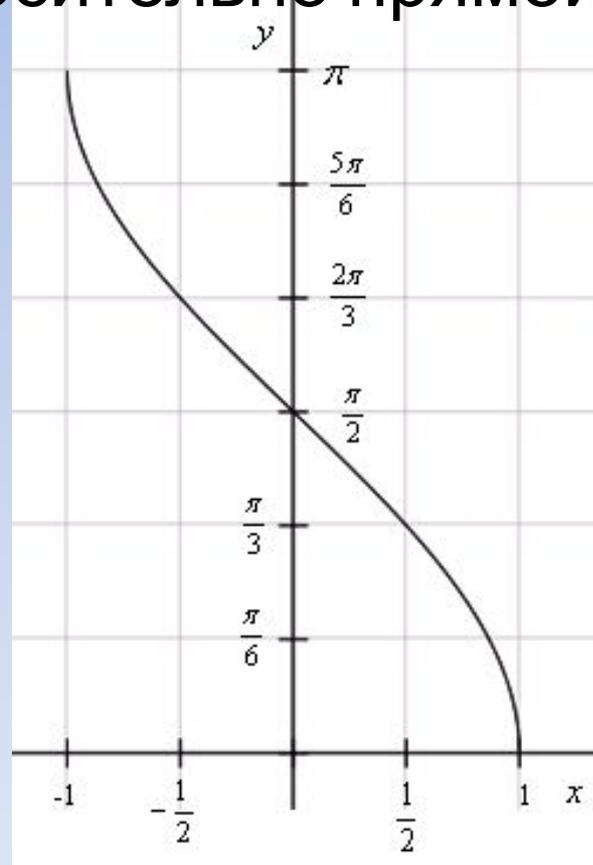
Арккотангенс ($y = \operatorname{arcctg} x$) – это функция, обратная к котангенсу ($x = \operatorname{ctg} y$), имеющая область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $0 < y < \pi$.

Графики обратных тригонометрических функций

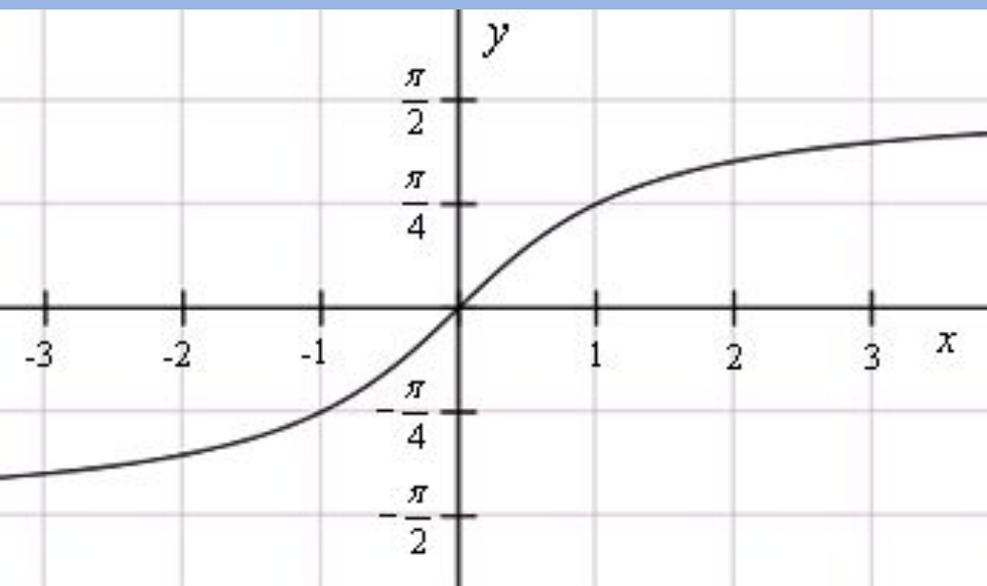
Графики обратных тригонометрических функций получаются из графиков тригонометрических функций зеркальным отражением относительно прямой $y = x$.



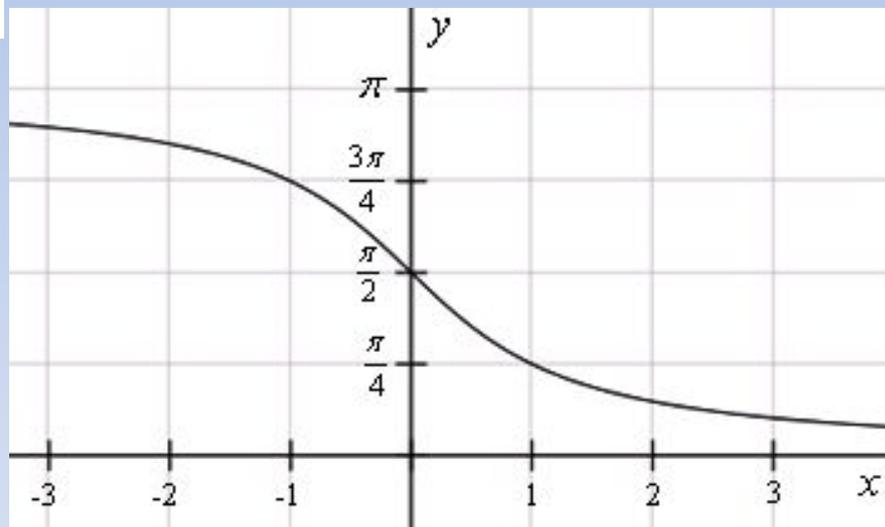
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \arctg x$



$y = \text{arcctg } x$

Основные формулы

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$$

Формулы, связывающие обратные тригонометрические функции

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Формулы суммы и разности

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)$$

при $xy \leq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)$$

при $x > 0, y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)$$

при $x < 0, y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right)$$

при $xy \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\arcsin x - \arcsin y = \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right)$$

при $x > 0, y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arcsin x - \arcsin y = -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right)$$

при $x < 0, y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right)$$

при $x + y \geq 0$

$$\arccos x + \arccos y = 2\pi - \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right)$$

при $x + y < 0$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$$

при $x > 0, xy > 1$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$$

при $x < 0, xy > 1$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$$

при $xy > -1$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$$

при $x > 0, xy < -1$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$$

при $x < 0, xy < -1$