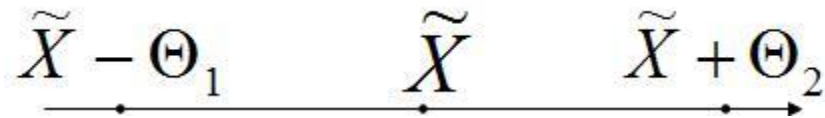


## Лекция №3.

Неисключенные остатки  
систематической погрешности.  
Статистическая обработка  
однократных наблюдений.  
Случайные погрешности.

# Неисключенные остатки систематической погрешности

$[\tilde{X} - \theta_1 \div \tilde{X} + \theta_2]$  - некий доверительный интервал



$P_\delta = P(\Theta_1 \leq \Delta \leq \Theta_2)$  - доверительная вероятность попадания в этот интервал

**К неисключенным остаткам в случае электрических измерений  
можно отнести:**

размытость сопротивления модели

инструментальные погрешности

личностные погрешности (погрешности оператора)

погрешности, обусловленные размытостью  
внутреннего сопротивления средства измерения

# Анализ источников возникновения НО

П Неисключенные остатки объекта измерения

<sup>1</sup>  $R = 50 \text{ кОм}$ , точность  $\pm 10 \%$

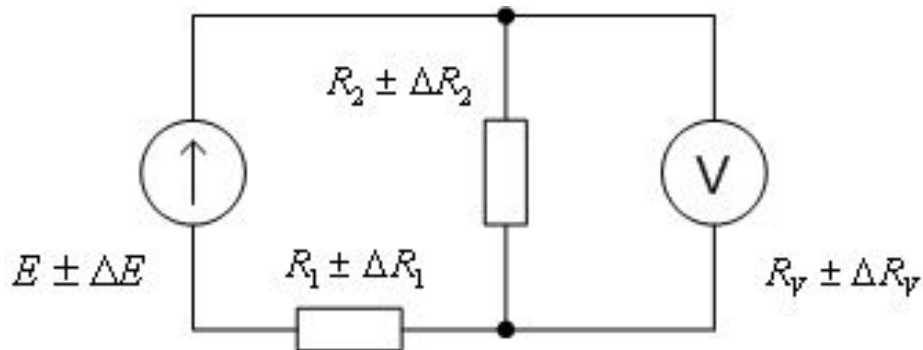
$\Theta_1 = 5 \text{ кОм}$ ;  $\Theta_2 = 5 \text{ кОм}$

П Неисключенные остатки источников питания

<sup>2</sup> На входе трансформатора  $U = 220_{-7}^{+10}$

$\Theta_1 = 7 \text{ В}$ ;  $\Theta_2 = 10 \text{ В}$ .

П Неисключенные остатки размытости  
<sup>3</sup> внутреннего сопротивления СИ



П Неисключенные  
<sup>4</sup> остатки класса  
точности СИ

$$\Delta_{\max} = \pm 0,01 X_N K_{\Pi}$$

П Неисключенные остатки  
<sup>5</sup> личностной  
погрешности

$$\Delta_{\text{лич}} = \pm 0,5 \cdot C$$

Результирующая погрешность (композиция) неисключенных остатков определяется выражением:

$$\delta_{рез} = k \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i \delta_i^2}$$

где  $\delta_i$  - неисключенные остатки СП по каждому источнику в относительном виде;

$k$  – статистический коэффициент НО, зависящий от их числа и  $P_d$ ;

$b_i$  - коэффициент влияния.

Результирующее значение границ доверительного интервала:

$$\theta_{рез} = \frac{\delta_{рез} \tilde{X}}{100}$$

Запись результата измерений:

$$PI: X = \tilde{X} \pm \Theta_{рез}, P_d$$

# Общий алгоритм обработки однократных наблюдений

1. Определение методической погрешности измерений
2. Определение поправки
3. Определение оценочного значения результата измерения
4. Определение неисключенных остатков систематической погрешности
5. Определение границ доверительного интервала
6. Запись результата измерения

# Случайные погрешности

*Случайными* называют составляющие погрешности измерений, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

## Вероятностный подход к описанию погрешностей

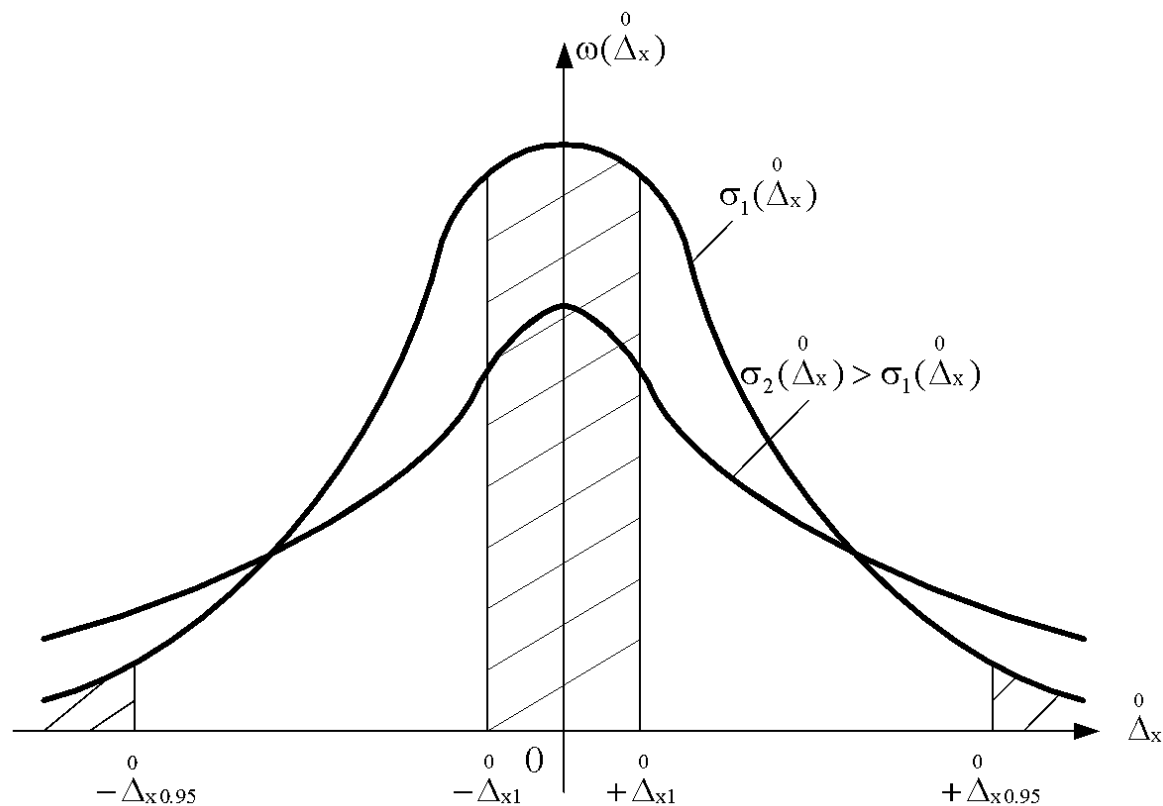
$$\omega(\Delta x) = \frac{1}{\sigma \left[ \Delta_x \right] \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[ -\frac{(\Delta_x)^2}{2\sigma^2 \left[ \Delta_x \right]} \right],$$

$\omega(\Delta x)$  - плотность  
распределения

$\Delta x$  - случайная погрешность

$\sigma(\Delta x)$  - среднее квадратическое  
отклонение

## Нормальный закон распределения



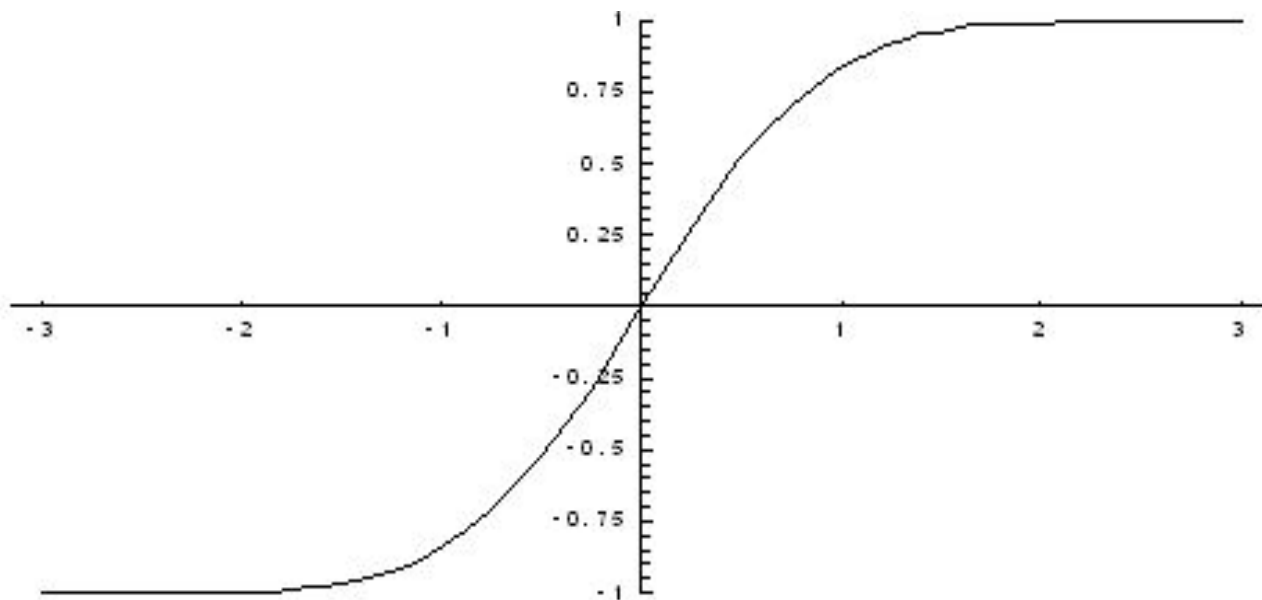
$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$P_\delta = P(-\infty \leq \Delta \leq +\infty) = 1$$

$$\alpha = 1 - P_\delta$$

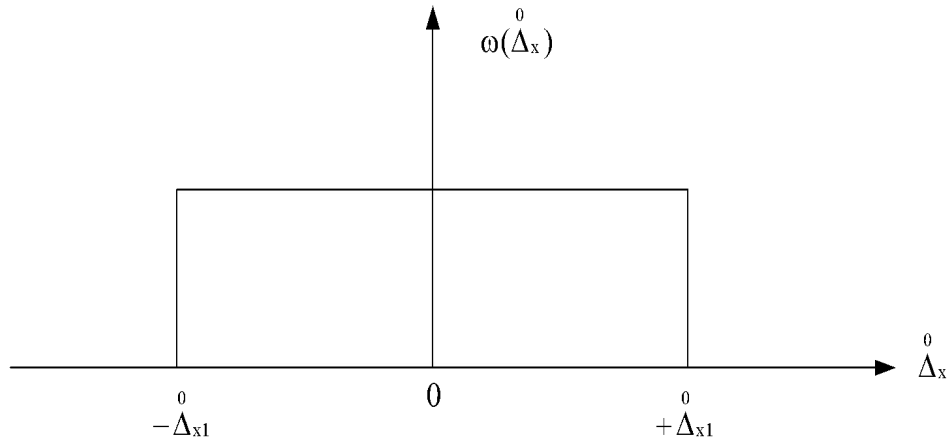
## Интегральная функция распределения Лапласа

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \exp[-0,5t^2] dt$$



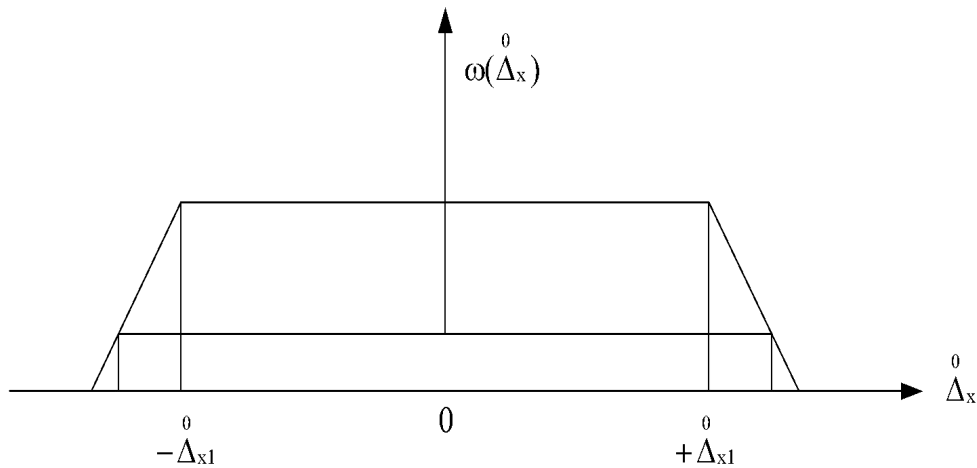


## Разновидности законов распределения



Равномерный:

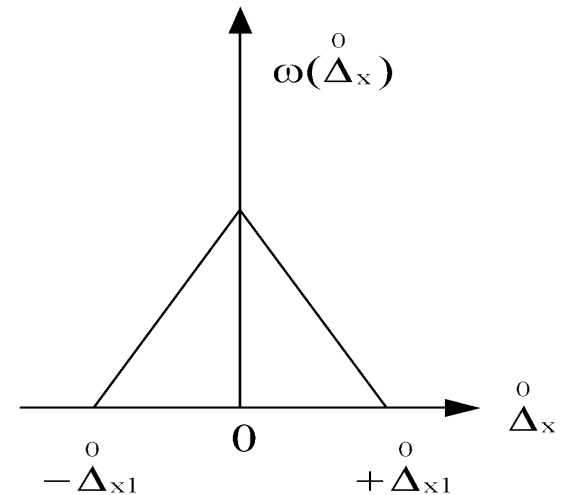
$$\omega(\Delta x) = \frac{1}{2\Delta_{x1}}$$



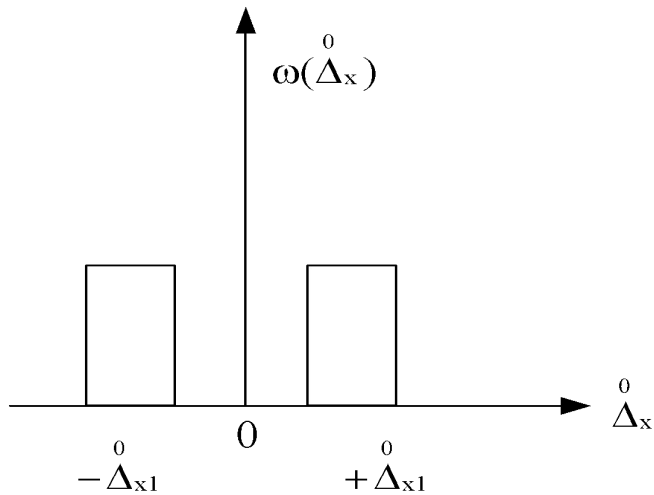
Трапецеидальный

По результатам исследования электрических величин известно около 200 законов распределения. Распределения делятся на четыре группы:

- 1) Экспоненциальные;
- 2) Трапецеидальные;
- 3) Двухмодальные;
- 4) Семейство распределения Стьюдента.

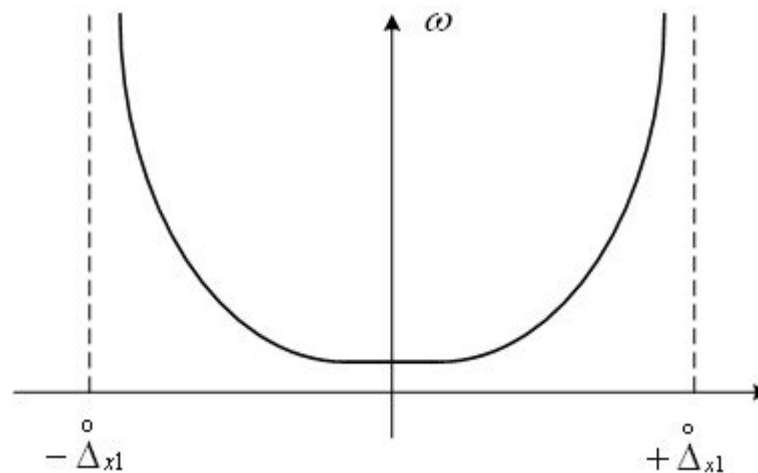


Треугольный



Двухмодальный

Распределение  
Стьюдента  
используется, когда  
число измерений  
невелико  $2 \leq n < 20$



Арксинусоидальный:  $\omega(\Delta x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - \Delta^2}}$

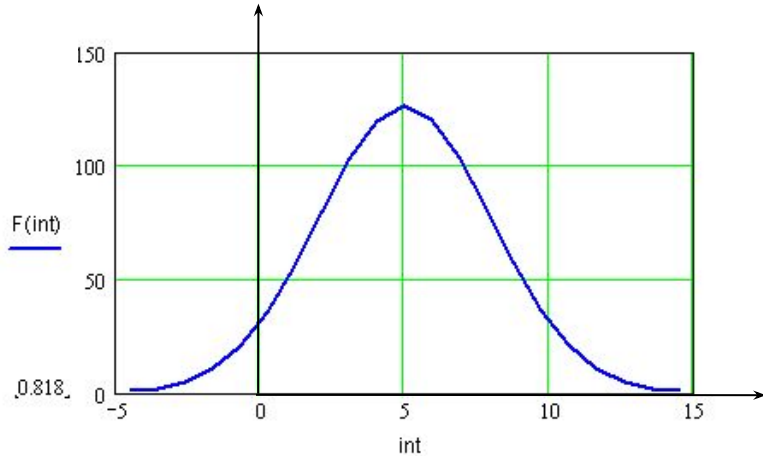
$$\omega_{cm}(t_{cm}, n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \sqrt{\pi(n-1)}} \left(1 + \frac{t_{cm}^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}};$$

где  $\Gamma(\frac{n}{2})$  - Гамма функция от аргумента  
числа измерений

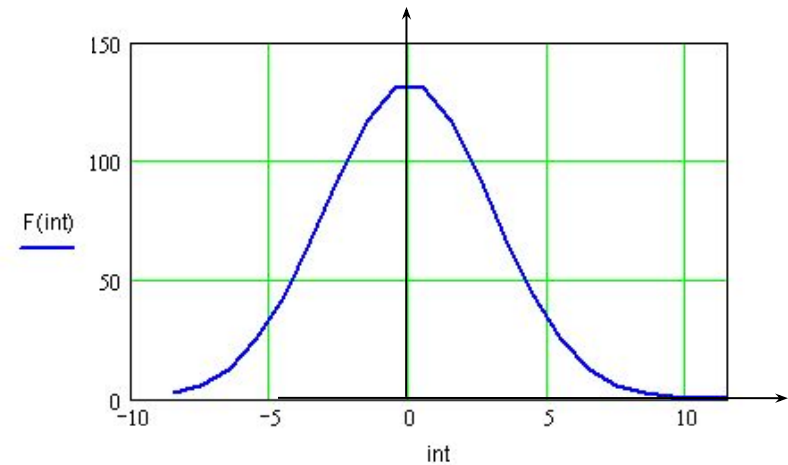
$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$$

# Вероятностные оценки погрешностей

Моменты случайных величин выражают количественные характеристики законов распределений.



Центральный момент ( $\Delta_c = 5$ )



Начальный момент ( $\Delta_c = 0$ )

$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$  - начальный момент  $k$  порядка для непрерывной случайной величины;

$f(x)$  – плотность распределения;

$m_k = \sum_{i=1}^n x^k p_i$  - начальный момент  $k$  порядка для дискретной случайной величины;

$p_i$  – вероятность появления дискретной величины.

1. Момент первого порядка характеризует **математическое ожидание** – неслучайную величину, относительно которой рассеиваются другие значения при повторных измерениях.

$$m_1 = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad \text{- для непрерывной случайной величины;}$$

$$m_1 = \bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \quad \text{- для дискретной случайной величины;}$$

2. Момент второго порядка характеризует **дисперсию** – степень рассеяния (разброса) отдельных значений относительно математического ожидания.

$$m_2 = D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx \quad \text{- для непрерывной случайной величины;}$$

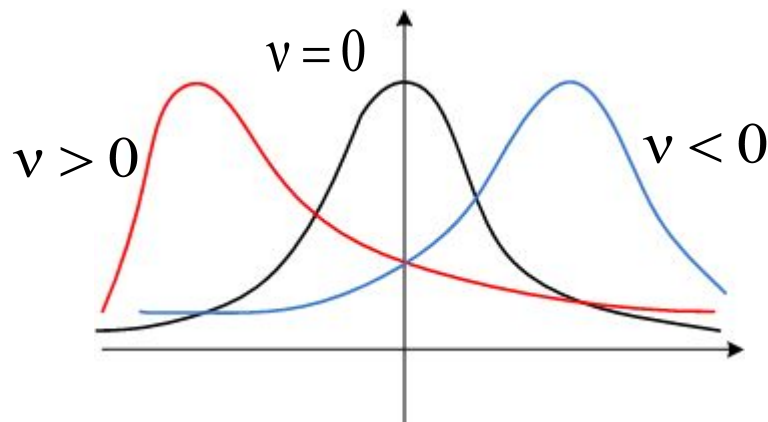
$$m_2 = D(X) = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad \text{- для дискретной случайной величины;}$$

$$\sigma(X) (\sigma = \sqrt{D}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad \text{- среднее квадратическое отклонение (СКО);}$$

3. Момент третьего порядка характеризует **асимметрию** закона распределения

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x) \cdot dx$$

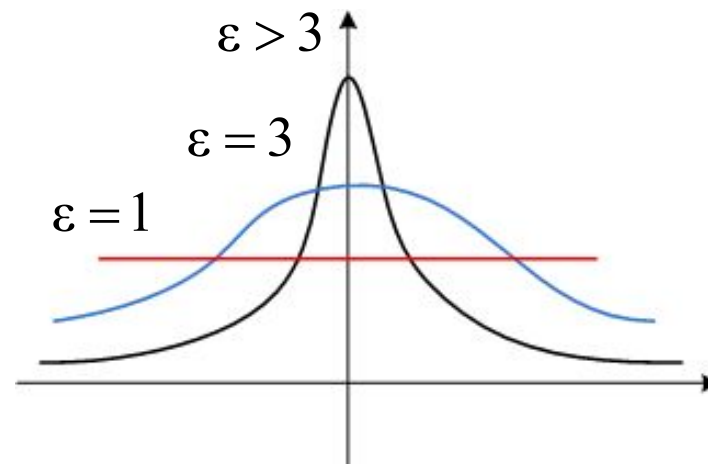
$$v = \frac{m_3}{\sigma^3} - \text{коэффициент асимметрии;}$$



4. Момент четвертого порядка характеризует **плосковершинность** закона распределения

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\varepsilon = \frac{m_4}{\sigma^4} - \text{коэффициент эксцесса (плосковершинности);}$$



## Практическое применение связи между доверительной вероятностью и функциями Стьюдента и Лапласа

Если число измерений больше или равно 20

$$P_d = \frac{\Delta}{\sigma} \left[ -\Phi \left( \frac{\Delta_1 - \Delta_c}{\sigma_{cp}} \right) + \Phi \left( \frac{\Delta_2 + \Delta_c}{\sigma_{cp}} \right) \right]$$

Если число измерений меньше 20

$$P_d = F_n \left( \frac{\Delta_1 - \Delta_c}{\sigma_{cp}} \right) + F_n \left( \frac{\Delta_2 + \Delta_c}{\sigma_{cp}} \right) - 1$$

СКО среднего арифметического

$$\sigma_{cp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

## Пример

Напряжение измеряется 30 раз. Среднее значение  $U_{\text{ср}} = 12 \text{ В}$ ,  $\sigma_{\text{ср}} = 0,2 \text{ В}$ . Найти вероятность того, что результат измерения находится в интервале  $[11,5; 12,4]$ . Учесть влияние систематической погрешности.

Середина интервала рассеяния погрешностей:

$$U_0 = (12,4 + 11,5) / 2 = 11,95 \text{ В}$$

Систематическая погрешность:

$$\Delta_c = 11,95 - 12,0 = -0,05 \text{ В}$$

Найдем величины отклонений от середины интервала:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = (12,4 - 11,5) / 2 = 0,45 \text{ В}$$

Т.к. число измерений больше 20, воспользуемся функцией Лапласа

$$P_d = \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{0,45 + 0,05}{0,2} \right) + \Phi \left( \frac{0,45 - 0,05}{0,2} \right) \right] = \frac{1}{2} [\Phi(2,5) + \Phi(2)] = \frac{1}{2} [0,988 + 0,954] = 0,971$$