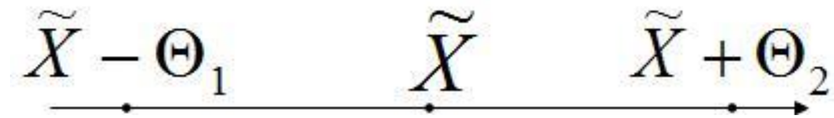
Лекция №3.

Неисключенные остатки систематической погрешности. Статистическая обработка однократных наблюдений. Случайные погрешности.

Неисключенные остатки систематической погрешности

$$[\tilde{X} - \theta_1 \div \tilde{X} + \theta_2]$$ - некий доверительный интервал



$P_{\partial} = P(\Theta_1 \leq \Delta \leq \Theta_2)$ - доверительная вероятность попадания в этот интервал

К неисключенным остаткам в случае электрических измерений можно отнести:

размытость сопротивления модели

инструментальные погрешности

личностные погрешности (погрешности оператора)

погрешности, обусловленные размытостью внутреннего сопротивления средства измерения

Анализ источников возникновения НО

$П_1$ Неисключенные остатки обьекта измерения

R = 50 кОм, точность ± 10 %

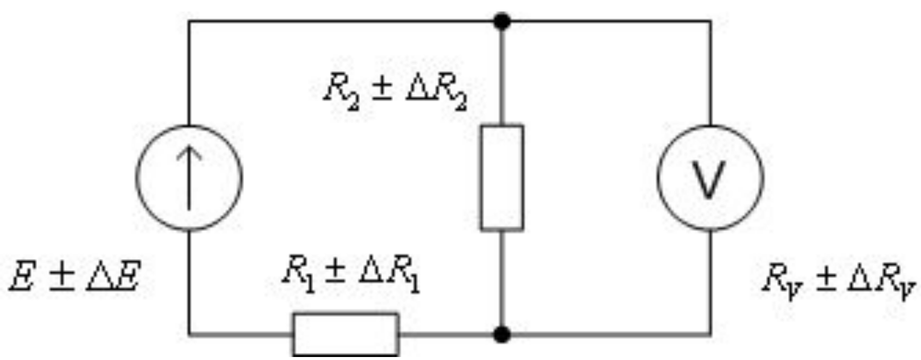
Θ_1 = 5 кОм; Θ_2 = 5 кОм

$П_2$ Неисключенные остатки источников питания

На входе трансформатора $U = 220^{+10}_{-7}$

Θ_1 = 7 В; Θ_2 = 10 В.

$П_3$ Неисключенные остатки размытости внутреннего сопротивления СИ



$П_4$ Неисключенные остатки класса точности СИ

$$\Delta_{\max} = \pm 0{,}01 X_N K_п$$

$П_5$ Неисключенные остатки личностной погрешности

$$\Delta_{лич} = \pm 0{,}5 \cdot C$$

Результирующая погрешность (композиция) неисключенных остатков определяется выражением:

$$\delta_{рез} = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i \delta_i^{\,2}}$$

где δ_i - неисключенные остатки СП по каждому источнику в относительном виде;

k – статистический коэффициент НО, зависящий от их числа и Рд;

b_i - коэффициент влияния.

Результирующее значение границ доверительного интервала:

$$\theta_{\text{рез}} = \frac{\delta_{\text{рез}} \widetilde{X}}{100}$$

Запись результата измерений:

$$РИ: \; X = \widetilde{X} \pm \Theta_{рез}, \; P_{д}$$

Общий алгоритм обработки однократных наблюдений

1. Определение методической погрешности измерений
2. Определение поправки
3. Определение оценочного значения результата измерения
4. Определение неисключенных остатков систематической погрешности
5. Определение границ доверительного интервала
6. Запись результата измерения

Случайные погрешности

Случайными называют составляющие погрешности измерений, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Вероятностный подход к описанию погрешностей

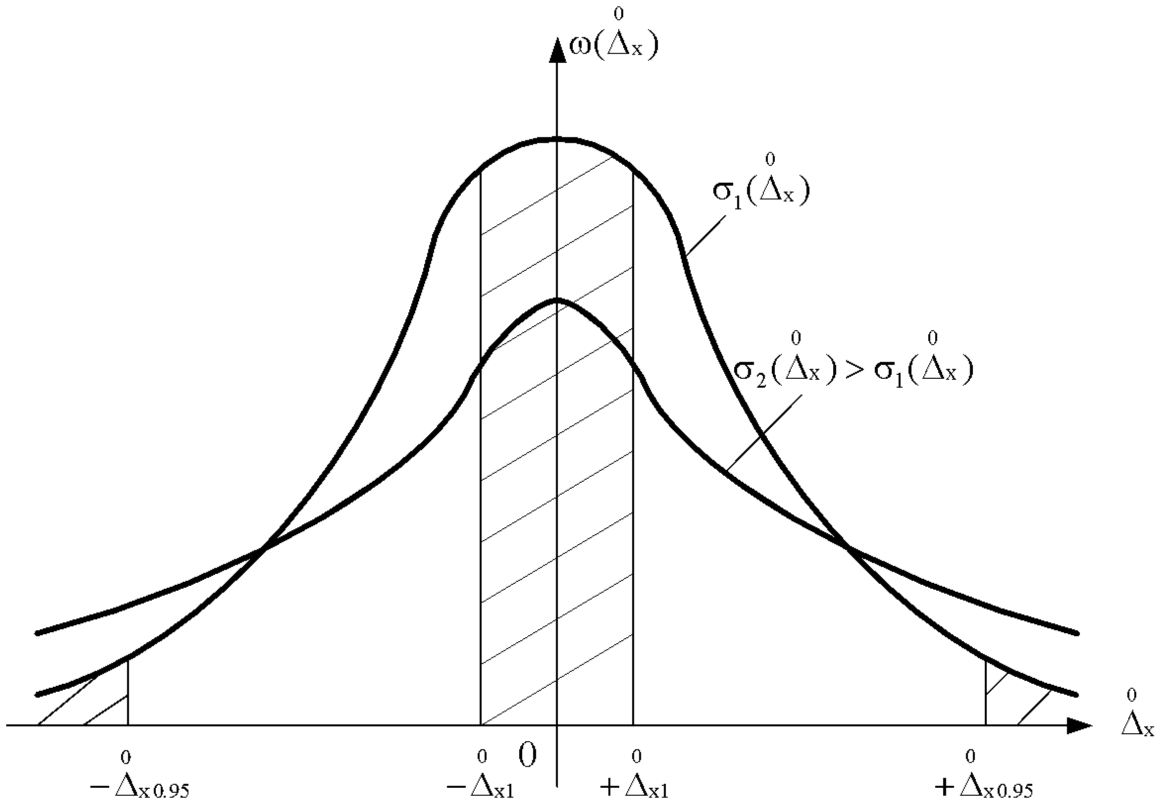
$$\omega(\overset{0}{\Delta}x) = \frac{1}{\sigma\left[\overset{0}{\Delta}_x\right]\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(\overset{0}{\Delta}_x)^2}{2\sigma^2\left[\overset{0}{\Delta}_x\right]}\right],$$

$\omega(\overset{o}{\Delta}x)$ - плотность распределения

$\overset{o}{\Delta}x$ - случайная погрешность

$\sigma(\overset{o}{\Delta}x)$ - среднее квадратическое отклонение

Нормальный закон распределения



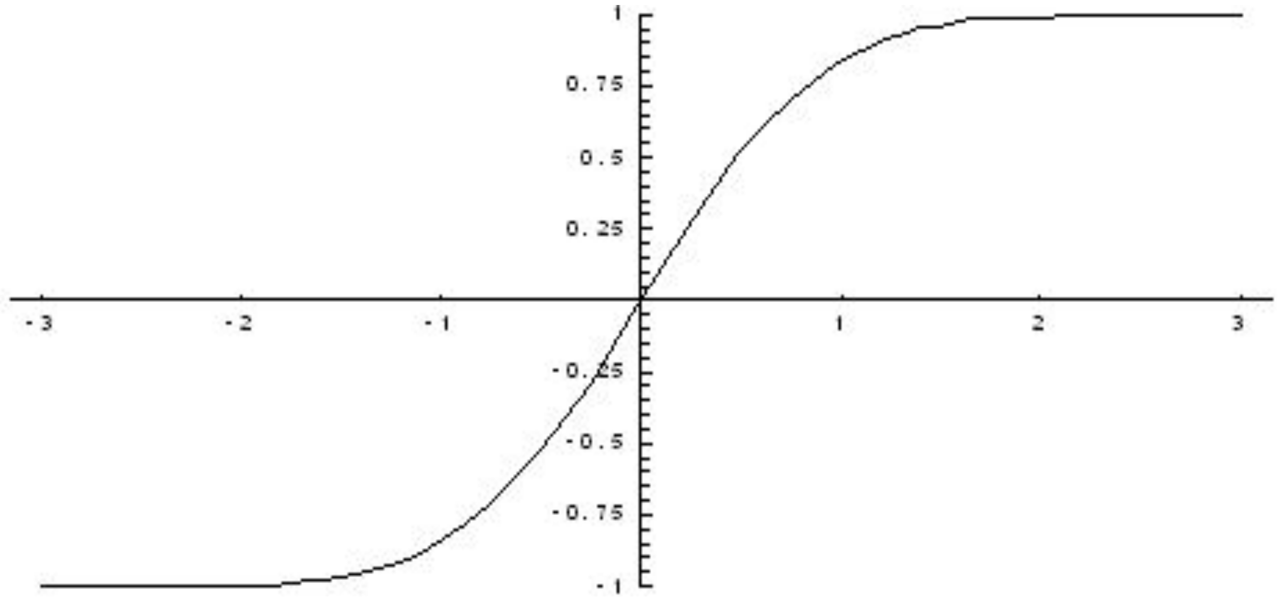
$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$P_\partial = P(-\infty \leq \overset{0}{\Delta} \leq +\infty) = 1$$

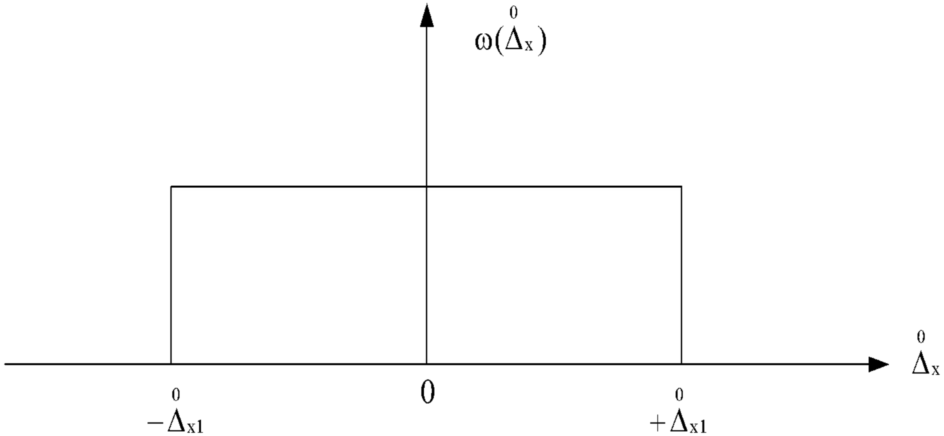
$$\alpha = 1 - P_\partial$$

Интегральная функция распределения Лапласа

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \exp\left[-0,5t^2\right] dt$$



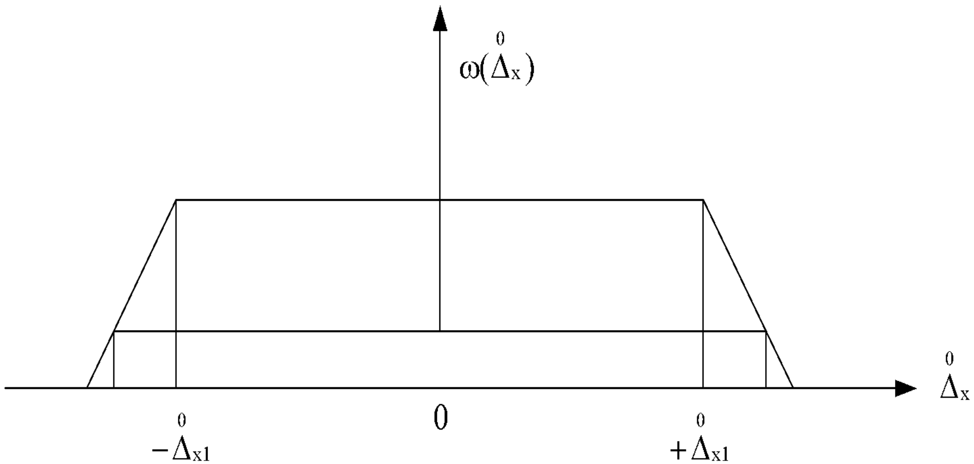
Разновидности законов распределения



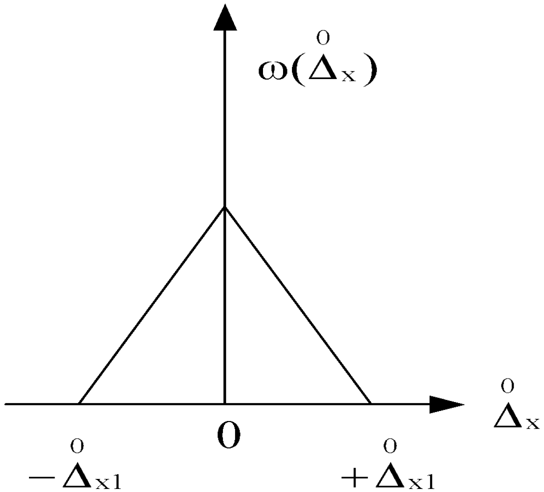
По результатам исследования электрических величин известно около 200 законов распределения. Распределения делятся на четыре группы:

1) Экспоненциальные;
2) Трапецеидальные;
3) Двухмодальные;
4) Семейство распределения Стьюдента.

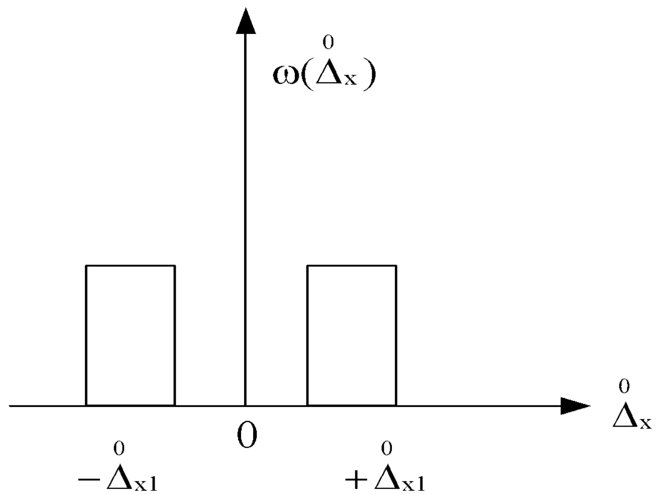
Равномерный: $\omega(\Delta x) = \dfrac{1}{2\Delta_{x1}}$



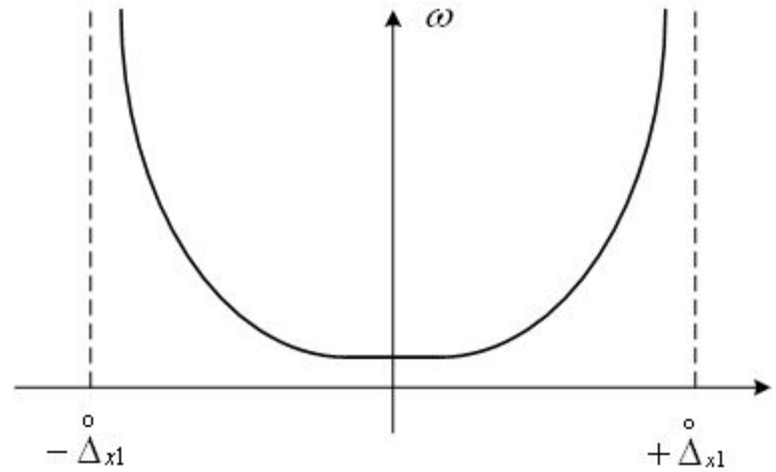
Трапецеидальный



Треугольный



Двухмодальный



Арксинусоидальный: $\omega(\Delta x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - \Delta^2}}$

Распределение Стьюдента используется, когда число измерений невелико $2 \le n < 20$

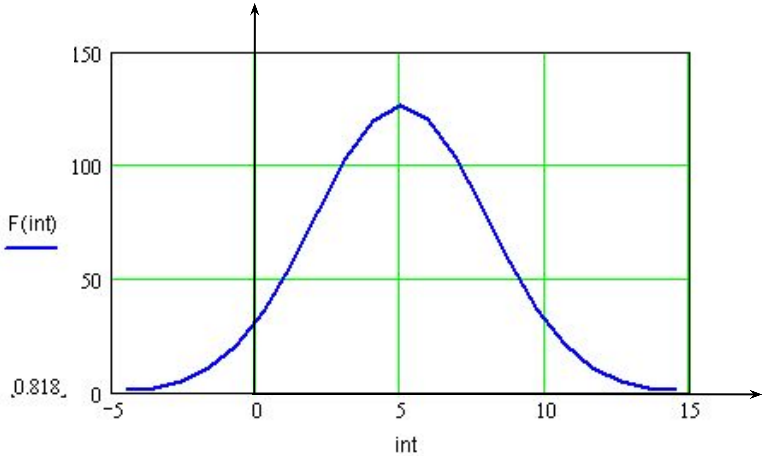
$$\omega_{cm}(\mathrm{t}_{cm}, n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi(n-1)}}\left(1 + \frac{t_{cm}^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}};$$

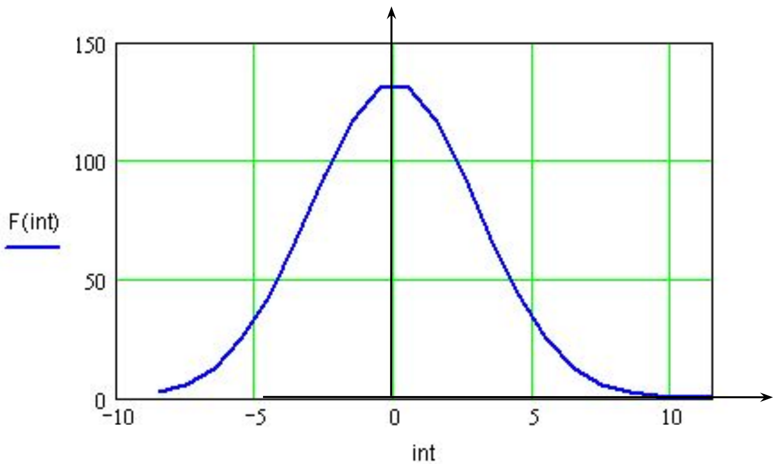
где $\Gamma(\frac{n}{2})$ - Гамма функция от аргумента числа измерений

$\Gamma(n) = (n-1)!$ $\quad\Gamma(1) = 1;$ $\quad\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$

Вероятностные оценки погрешностей

Моменты случайных величин выражают количественные характеристики законов распределений.





Центральный момент ($\Delta_c = 5$) Начальный момент ($\Delta_c = 0$)

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$ - начальный момент *k* порядка для непрерывной случайной величины;

f(*x*) – плотность распределения;

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x^k p_i$$ - начальный момент *k* порядка для дискретной случайной величины;

pi – вероятность появления дискретной величины.

1. Момент первого порядка характеризует **математическое ожидание** – неслучайную величину, относительно которой рассеиваются другие значения при повторных измерениях.

$$m_1 = M(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \cdot f(\Delta) \cdot d\Delta$$ - для непрерывной случайной величины;

$$m_1 = \bar{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{n}$$ - для дискретной случайной величины;

2. Момент второго порядка характеризует **дисперсию** – степень рассеяния (разброса) отдельных значений относительно матожидания.

$$m_2 = D(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - M(\Delta))^2 \cdot f(\Delta) \cdot d\Delta$$ - для непрерывной случайной величины;

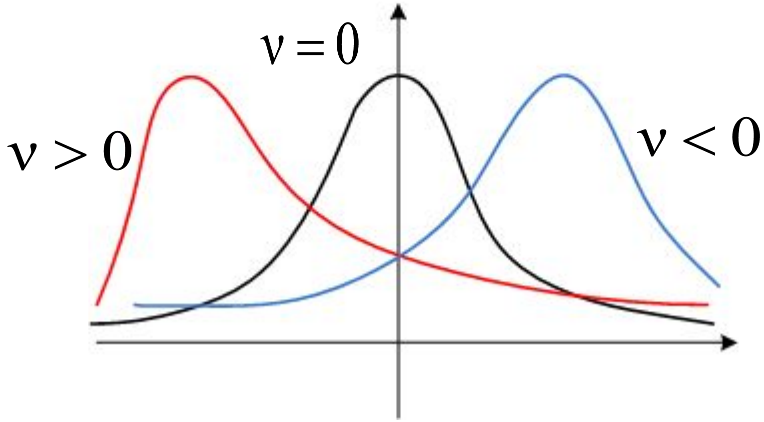
$$m_2 = D(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n-1}$$ - для дискретной случайной величины;

$$\sigma(\Delta) = \sqrt{D(\Delta)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n-1}}$$ - среднее квадратической отклонение (СКО);

3. Момент третьего порядка характеризует **асимметрию** закона распределения

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x) \cdot dx$$

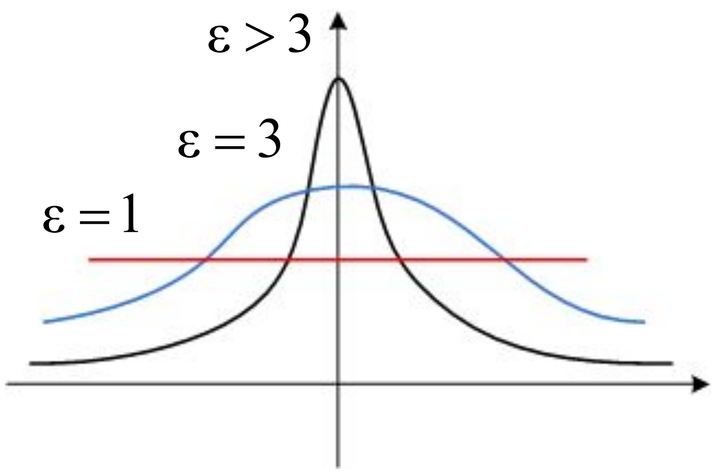
$$\nu = \frac{m_3}{\sigma^3}$$ - коэффициент асимметрии;



4. Момент четвертого порядка характеризует **плосковершинность** закона распределения

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\varepsilon = \frac{m_4}{\sigma^4}$$ - коэффициент эксцесса (плосковершинности);



Практическое применение связи между доверительной вероятностью и функциями Стьюдента и Лапласа

Если число измерений больше или равно 20

$$P_д = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_c}{\sigma_{ср}}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta_2 + \Delta_c}{\sigma_{ср}}\right)\right]$$

Если число измерений меньше 20

$$P_д = F_n\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_c}{\sigma_{ср}}\right) + F_n\left(\frac{\Delta_2 + \Delta_c}{\sigma_{ср}}\right) - 1$$

СКО среднего арифметического

$$\sigma_{cp} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Пример

Напряжение измеряется 30 раз. Среднее значение $U_{ср}$ = 12 В, $\sigma_{ср}$ = 0,2 В. Найти вероятность того, что результат измерения находится в интервале [11,5; 12,4]. Учесть влияние систематической погрешности.

Середина интервала рассеяния погрешностей:

$$U_0 = (12{,}4 + 11{,}5) / 2 = 11{,}95 \text{ В}$$

Систематическая погрешность:

$$\Delta_c = 11{,}95 - 12{,}0 = -0{,}05\text{В}$$

Найдем величины отклонений от середины интервала:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = (12{,}4 - 11{,}5) / 2 = 0{,}45 \text{ В}$$

Т.к. число измерений больше 20, воспользуемся функцией Лапласа

$$P_д = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{0{,}45 + 0{,}05}{0{,}2}\right) + \Phi\left(\frac{0{,}45 - 0{,}05}{0{,}2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(2{,}5) + \Phi(2)\right] = \frac{1}{2}\left[0{,}988 + 0{,}954\right] = 0{,}971$$