Матрицы и определители

Основные понятия и определения

Понятие матрицы

- **Матрицей** размера m×n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.
- Обозначение матриц: A, B, C, …

- Числа, составляющие матрицу, называются **элементами** матрицы.
- Обозначение элементов: a_{ij}

  где i – номер строки, j – номер столбца

Запись матриц

- В общем виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{m\times n}$$

- В сокращенной форме

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, \qquad i = \overline{1,m} \qquad j = \overline{1,n}$$

Пример

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{13} = 1, \qquad a_{22} = -1$$

Виды матриц

- Определение: Матрица любого размера называется **нулевой** или **нуль-матрицей**, если все ее элементы равны нулю.
- Обозначение: **О**
- Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Виды матриц

Матрица, размерности:

- 1×n называется **матрицей-строкой** или **вектором-строкой**

$$B = (b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1n})$$

- m×1 называется **матрицей-столбцом** или **вектором-столбцом**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \ldots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

Виды матриц

- Матрица размерности n×n называется **квадратной порядка n**

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица второго порядка

Диагональ матрицы

- Элементы матрицы, у которых номер столбца равен номеру строки ($i=j$), называются **диагональными** и составляют **главную диагональ** матрицы.
- Сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы называется её **следом**. Обозначается **trA**.

Виды квадратных матриц

- Квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю, называется **диагональной матрицей.**
- Пример:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- диагональная матрица второго порядка

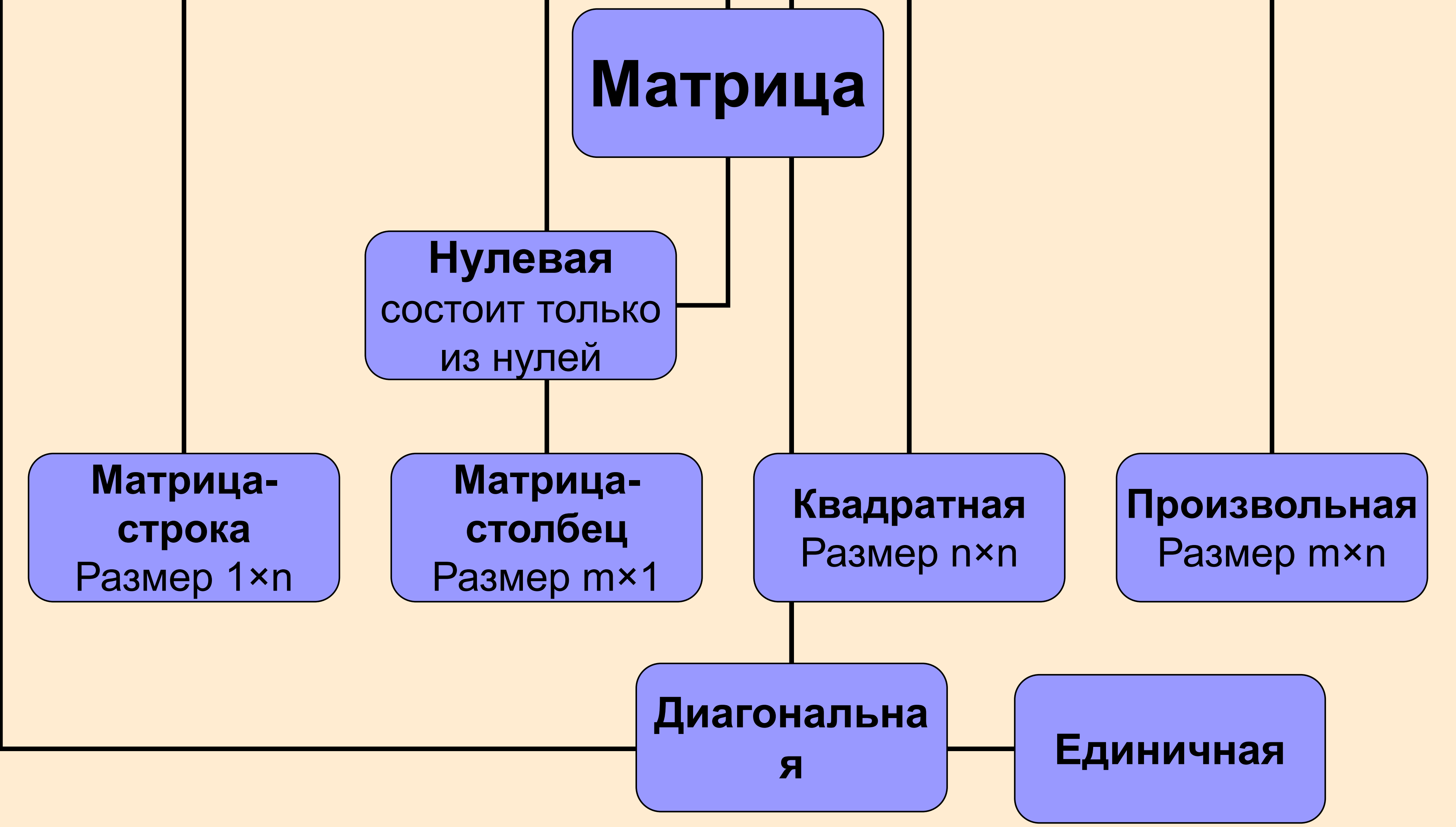
Виды квадратных матриц

- Если у диагональной матрицы порядка n все диагональные элементы равны 1, матрица называется **единичной порядка n.**
- Обозначение E_n
- Пример

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- единичная матрица третьего порядка

Виды матриц


Матрица
Нулевая
состоит только из нулей
Матрица-строка
Размер 1×n
Матрица-столбец
Размер m×1
Квадратная
Размер n×n
Произвольная
Размер m×n
Диагональная
Единичная

Операции
над матрицами

Операции над матрицами

- Умножение матрицы на число
- Сложение матриц
- Вычитание матриц
- Умножение матриц
- Возведение в степень
- Транспонирование матрицы

Умножение матрицы на число

- Выполнимо для любых матриц и любых чисел
- Производится поэлементно
- Правило: $C_{m\times n} = \lambda \cdot A_{m\times n} \Leftrightarrow C = (c_{ij}),\ c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$
- Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц

- Выполнимо только для матриц одинаковой размерности
- Производится поэлементно
- Правило: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n} \Leftrightarrow C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Пример:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+1 \\ -2+3 & 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычитание матриц

- Выполнимо только для матриц одинаковой размерности
- Производится поэлементно
- Правило: $A - B = A + (-1) \cdot B$

или $A_{m\times n} - B_{m\times n} = C_{m\times n} \Leftrightarrow C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

- Пример:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-1 \\ -2-3 & 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

- Выполнимо если число столбцов первого множителя равно числу строк второго
- Правило:

$$A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=C_{m\times n}\Leftrightarrow C=(c_{ij}),\quad c_{ij}=\overline{a}_i\cdot\overline{b}_j=\sum_{s=1}^{k}a_{is}\cdot b_{sj}$$

- Примеры:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\qquad (2\times 3)\cdot(2\times 3)\_\text{не}\_\text{выполнимо}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+0\cdot1\\ 1\cdot1+(-1)\cdot0 & 1\cdot0+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$(2\times 2)\cdot(2\times 3)\xrightarrow{\text{выполнимо}}(2\times 3)$$

Возведение в степень

- Выполнимо для квадратных матриц
- Правила:

$$A^0 = E, \qquad A^1 = A, \qquad A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p\_раз}$$

- Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Транспонирование

- Выполнимо для любой матрицы
- Обозначение: A^T или A'
- Правило: поменять строки на столбцы с сохранением порядка.
- Пример:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Определители квадратных матриц

Определитель матрицы

- Любой квадратной матрице ставится в соответствие по определенному закону некоторое число, называемое **определителем** или **детерминантом.**

- Обозначение:

  det A или **|A|** или Δ**A** или Δ_n или Δ

- Определитель матрицы – это число.
- Определитель существует только для квадратных матриц.

Определитель второго порядка

- Определяется формулой:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Определитель третьего порядка

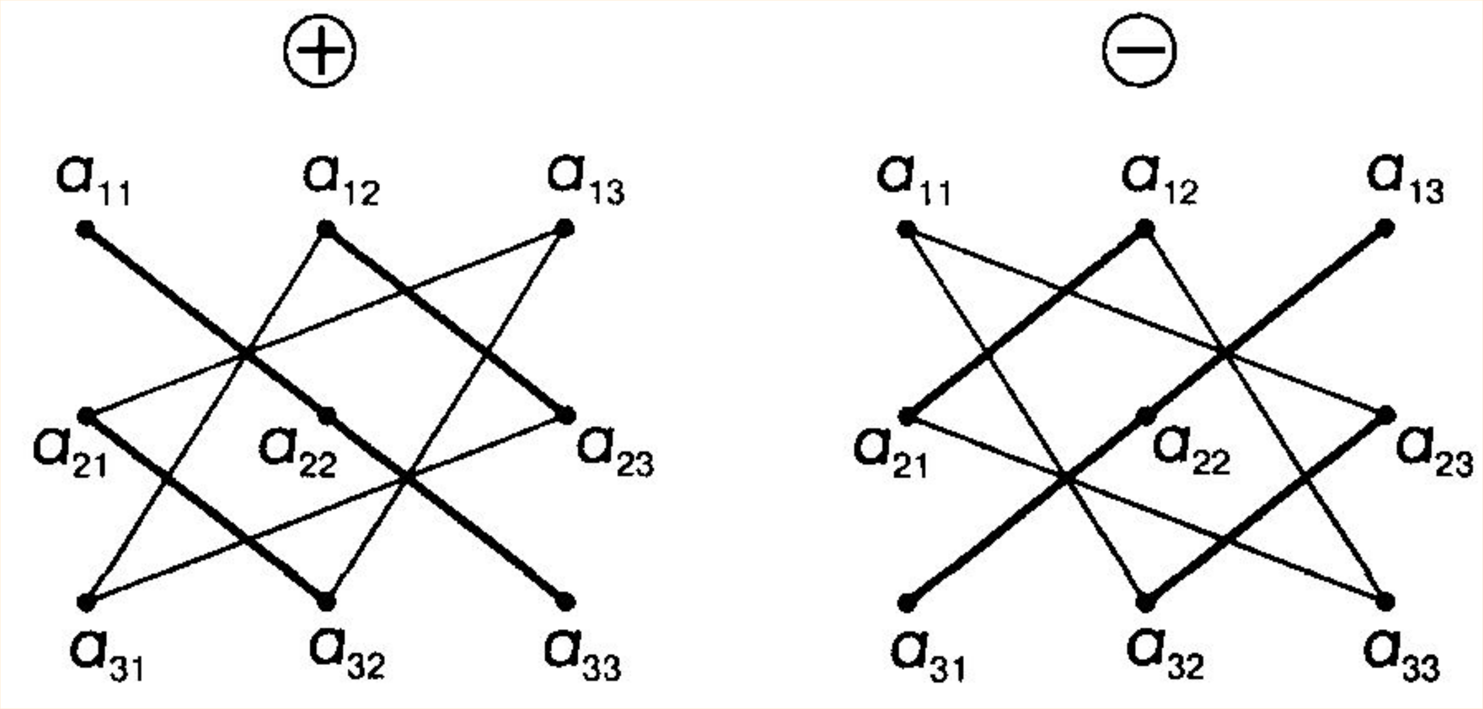
- Определяется формулой

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определитель третьего порядка

- Знаки произведений определяются с помощью **правила треугольников** или **правила Саррюса**:



Определитель n-го порядка

- **Определителем** матрицы A **n-го порядка** называется алгебраическая сумма n! произведений n-го порядка элементов этой матрицы, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы

Минор

- Рассмотрим квадратную матрицу A_n
- **Минором** M_{ij} называется определитель (n-1)-го порядка, полученный вычеркиваем из матрицы A i-й строки и j-го столбца.
- Пример:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 36 + 30 - 12 - 6 = 48.$$

Алгебраическое дополнение

- **Алгебраическим дополнением** A_{ij} называется минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

- Пример

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot 48 = -48.$$

- Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы А, называется **присоединенной** матрицей и обозначается $\widetilde{A}$

Теорема Лапласа

- Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

- разложение определителя по элементам i-й строки

- Используется для вычисления определителей порядка выше третьего.

Теорема Лапласа (пример)

- Вычислить $$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Решение:

$$\Delta_4 = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3+14+48-126-2-8)+2(4+24+36-48-9-4) = -207.$$

Свойства определителей

- При транспонировании Δ не меняется.
- При перестановке двух строк Δ меняет знак.
- $\Delta=0$ если:
  - содержит нулевую строку (столбец);
  - содержит две одинаковые строки;
  - содержит две пропорциональные строки.
- Если все элементы строки умножить на число λ, то Δ увеличится в λ раз; общий множитель строки можно вынести за знак Δ.
- Если к элементам строки прибавить элементы другой строки, умноженной на число $\neq 0$, то Δ не меняется.

Свойства определителей

- Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.
- Определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов

Способы вычисления определителей

- Перебором всевозможных произведений (по определению);
- Разложением по строке или столбцу (по теореме Лапласа);
- С использованием свойств определителей;
- Сочетание способов.

Обратная матрица

- Обозначение: A^{-1}–обратная для матрицы А
- Определение: Матрицей A^{-1}, **обратной** к данной квадратной матрице А, называется такая, что выполняется равенство:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$$

- Пример: $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ -обратна матрице $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

т.к.

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратимость матрицы

- Если определитель квадратной матрицы равен нулю ($\Delta A=0$), матрица называется **вырожденной**.
- Если определитель отличен от нуля ($\Delta A\neq 0$), матрица называется **невырожденной.**

- Критерий обратимости матрицы**:**

  А имеет обратную ↔ А – невырожденная

- Обратную матрицу можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \widetilde{A}^{T}$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы

- Вычислить ΔA. Если ΔA=0, то A^{-1} не существует.
- Если ΔA≠0, найти алгебраические дополнения всех элементов. Составить $\widetilde{A}$
- Транспонировать матрицу $\widetilde{A}$
- Выполнить умножение $\widetilde{A}^T$ на $\dfrac{1}{\Delta A}$
- Выполнить проверку равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Нахождение обратной матрицы (пример)

- Найти матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Решение:

1. $\Delta A = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -1 \neq 0 \rightarrow A^{-1}$ существует.

2. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 0 = 0$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1$

Итак, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Нахождение обратной матрицы (пример)

4. $$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ответ: $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы

- Определение: **Рангом матрицы** называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.
- Обозначение: **rang A** или **r(A)**.
- Ранг матрицы показывает число ее линейно независимых строк (столбцов).

Основные свойства ранга

- Ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров:

  для $A_{m \times n}$ $r(A) \leq \min\{m, n\}$;
- Ранг матрицы равен нулю только для нулевой матрицы:

  $r(A)=0 \leftrightarrow A=\mathbf{O}$;
- Ранг квадратной матрицы равен ее порядку только для невырожденной матрицы:

  для A_n $r(A)=n \leftrightarrow A$ – невырожденная;
- Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над её строками (столбцами).