

# Упругие колебания стержня с закрепленным концом

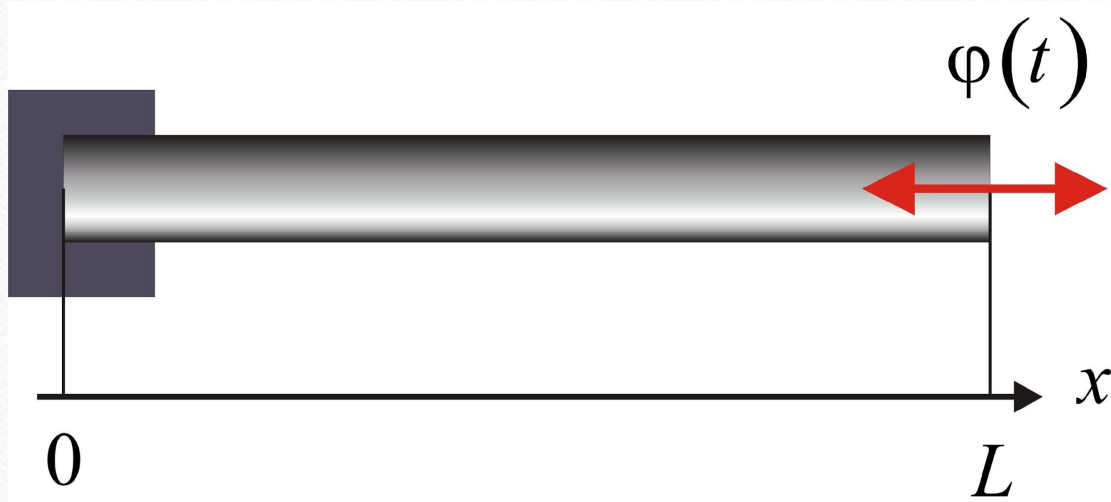
---

Деревич И.В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2021



## Постановка задачи



Уравнение упругих колебаний

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$$

Начальные условия:

$$U(x, t)|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Граничные условия:

$$U(x, t)|_{x=0} = 0 \quad U(x, t)|_{x=L} = -\varphi(t)$$

## Преобразование функции решения

$$U(x, t) = U_1(x, t) - \frac{x}{L} \varphi(t)$$

новая функция  $U_1(x)$  с нулевыми граничными условиями

---

$$U_1(x, t)|_{x=0} = U_1(x, t)|_{x=L} = 0$$

Неоднородное уравнение для новой функции  $U_1(x)$

$$\frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{x}{L} \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}$$

$g(x, t)$



## Начальные условия и метод решения

$$\varphi(0) = \left. \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

начальные условия (гладкое включение)  
внешнего воздействия

$$U(x, t)|_{t=0} = U_1(x, t)|_{t=0} - \frac{x}{L} \varphi(t)|_{t=0}$$
$$U_1(x, t)|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

### Метод решения

$$U_1(x, t) = \underbrace{U'_1(x, t)} + \underbrace{U''_1(x, t)}$$

общее решение  
однородного  
уравнения

частное решение  
неоднородного  
уравнения

---

# Решение однородного уравнения



# Метод разделения переменных

## Решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 U'(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U'(x,t)}{\partial x^2}$$

$$U'(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{1}{a^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda^2$$

константа  
разделения

## Уравнение по времени

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + (a\lambda)^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = \begin{cases} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{cases} \quad \Omega = a\lambda$$

# Задача Штурма - Лиувилля

Уравнение по пространственной переменной

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n(x) = 0 \quad X_n(0) = 0 \quad X_n(L) = 0$$

Собственные функции и собственные значения задачи

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x) \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^L X_{n'}(x) X_{n''}(x) dx = \|X_{n'}\|^2 \delta_{n',n''} = \frac{L}{2} \delta_{n',n''}$$

**условие  
ортогональности  
собственных  
функций**



## Общий вид решения

$$U'(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \sin(\Omega_n t) + B_n \cos(\Omega_n t) \right] \sin(\lambda_n x) \quad \Omega_n = \frac{n\pi a}{L}$$

### Расчет констант из начальных условий

$$U'(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \sin(\lambda_n x) \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L U'(x, t) \Big|_{t=0} \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

$$\frac{dU'(x, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n A_n \sin(\lambda_n x) \quad A_n = \frac{2}{L\Omega_n} \int_0^L \frac{dU'(x, t)}{dt} \Big|_{t=0} \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$



---

# Частное решение неоднородного уравнения

# Разложение по собственным функциям

## Уравнение и начальные условия

$$\frac{\partial^2 U''(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U''(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t) \quad U''(x,t)|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial U''(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

## Разложение по собственным функциям

$$U''(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x) \quad \text{разложение искомого решения } C_n(t) - ?$$

разложение силы

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(t) X_n(x) \quad \Gamma_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^L g(x,t) X_n(x) dx$$



# Система ОДУ. Колебания осциллятора

Уравнение и начальные условия для амплитуды

$$\frac{d^2 C_n(t)}{dt^2} + \Omega_n^2 C_n(t) = \Gamma_n(t) \quad C_n(0) = 0, \quad \left. \frac{dC_n(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Частное решение неоднородного уравнения упругих колебаний

$$C_n(t) = \frac{1}{\Omega_n} \int_0^t \Gamma_n(s) \sin[\Omega_n(t-s)] ds \quad U''(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x)$$

---

# Численные примеры решения задачи



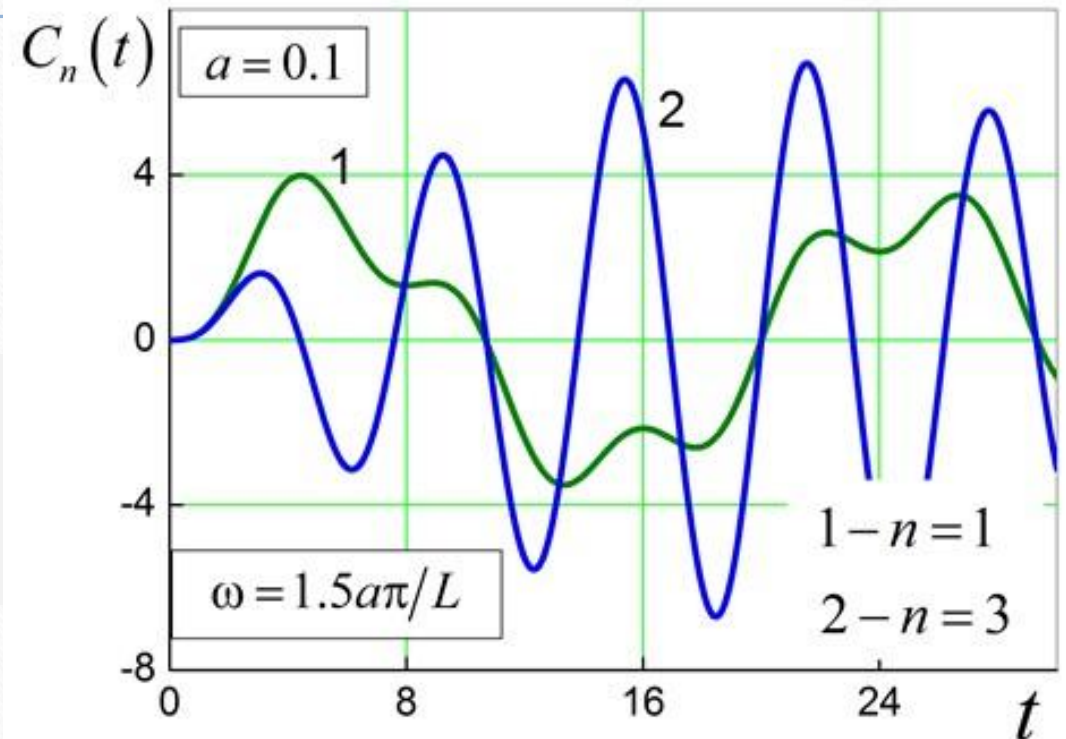
# Упругие колебания с внешней силой

## Периодическое внешнее воздействие

### Колебания без резонанса

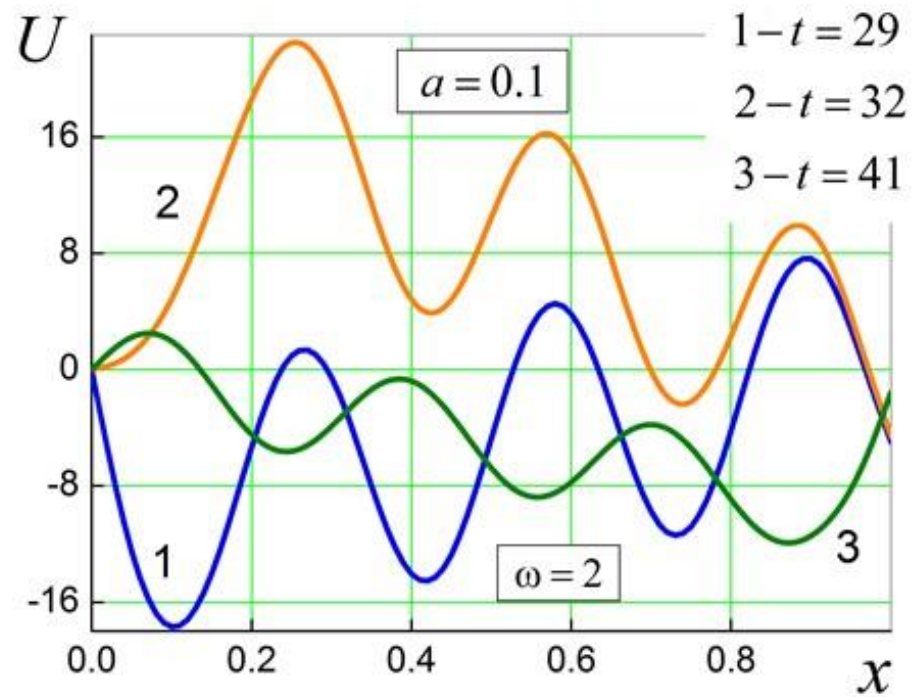
$$\Gamma_n(t) = Z_n \sin(\omega_n t)$$

$$C_n(t) = Z_n \frac{\omega \sin(\Omega_n t) - \Omega_n \sin(\omega t)}{\Omega_n (\omega^2 - \Omega_n^2)}$$



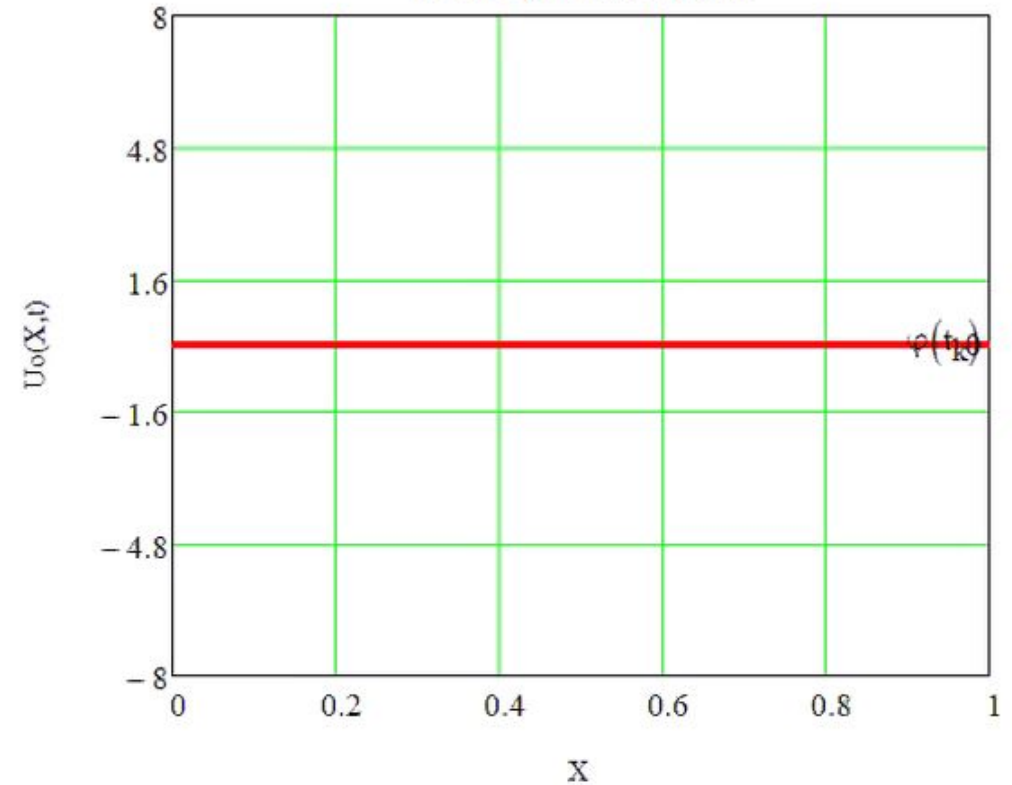
# Колебания в стержне без резонанса

Профили деформации без резонанса



$$n := 7 \quad \Omega_{0_n} = 2.199 \quad \omega = 1$$

Полное решение задачи





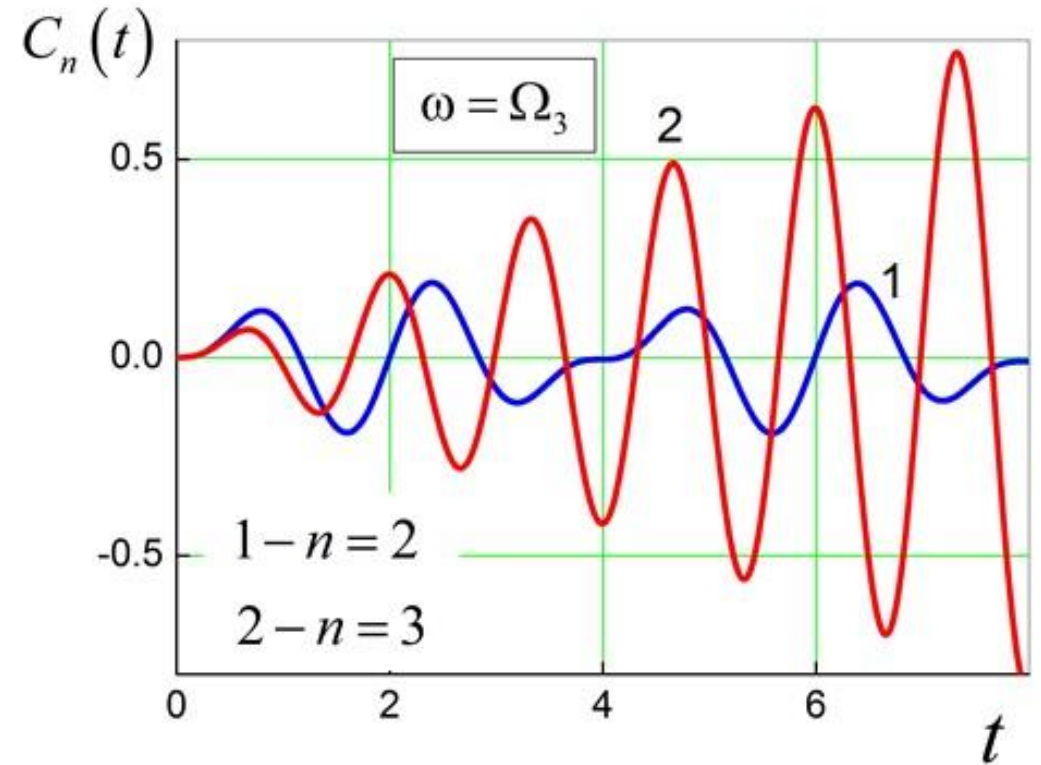
# Резонанс упругих колебаний в стержне

$$\omega \rightarrow \Omega_n$$

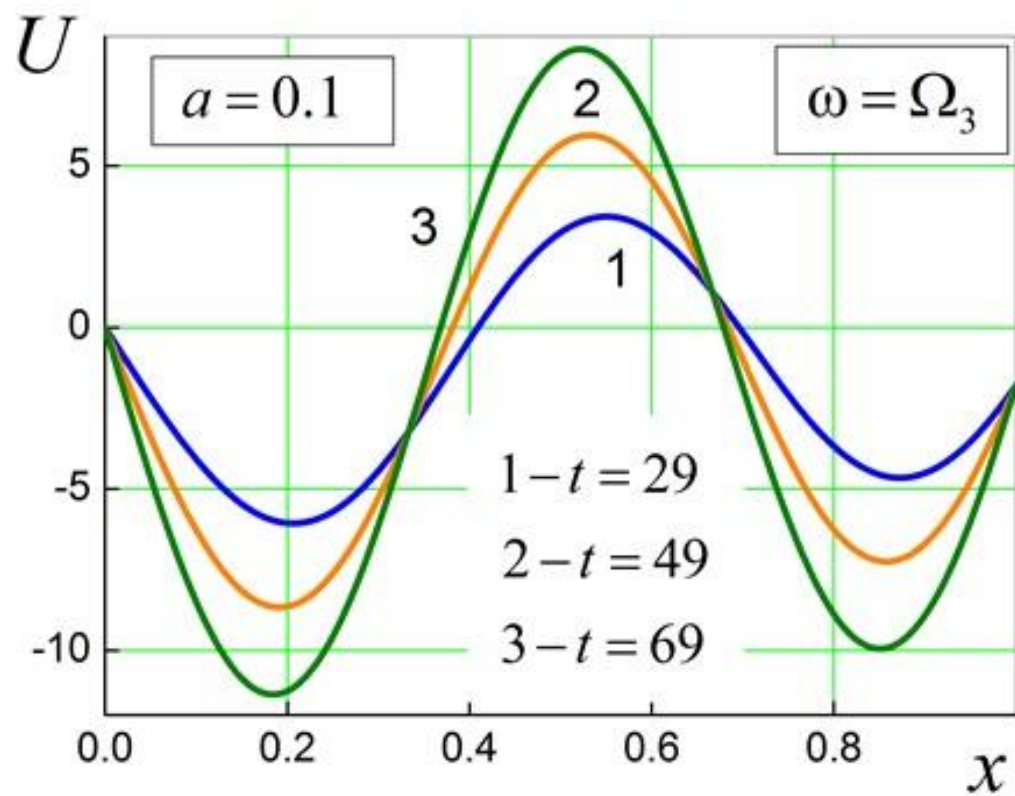
условие резонанса

Амплитуда колебаний при резонансе

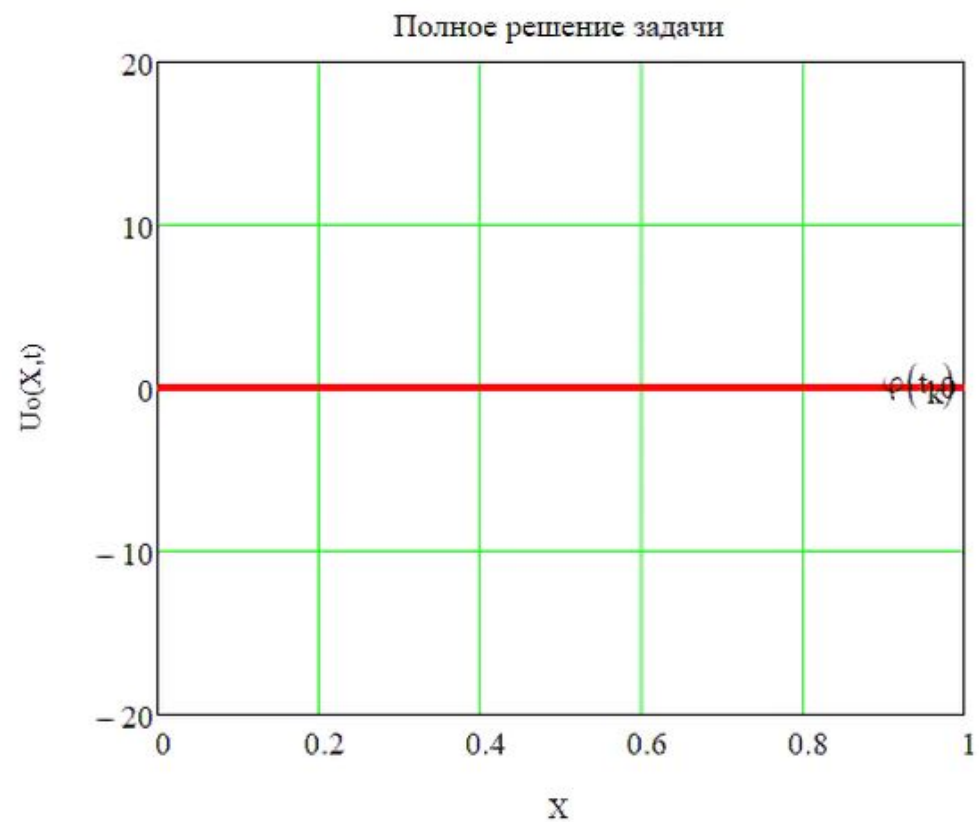
$$C_n(t) = Z_n \frac{\sin(\omega t) - (\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega^2}$$



# Резонанс в стержне с закрепленным концом



$$n := 7 \quad \Omega_{0_n} = 2.199 \quad \omega = 2.199$$





# Resume

Получили аналитическое решение задачи об упругих колебаниях в стержне с одним закрепленным концом и вторым, перемещающимся по заданному закону

- ✓ Познакомились с методом решения задач с неоднородными граничными условиями
- ✓ Получили и решили задачу Штурма – Лиувилля на собственные функции и собственные значения
- ✓ Научились решать однородные и неоднородные уравнения упругих колебаний в стержне
- ✓ Численно исследовали возникновение резонанса в упругом стержне при заданном перемещении одного из концов