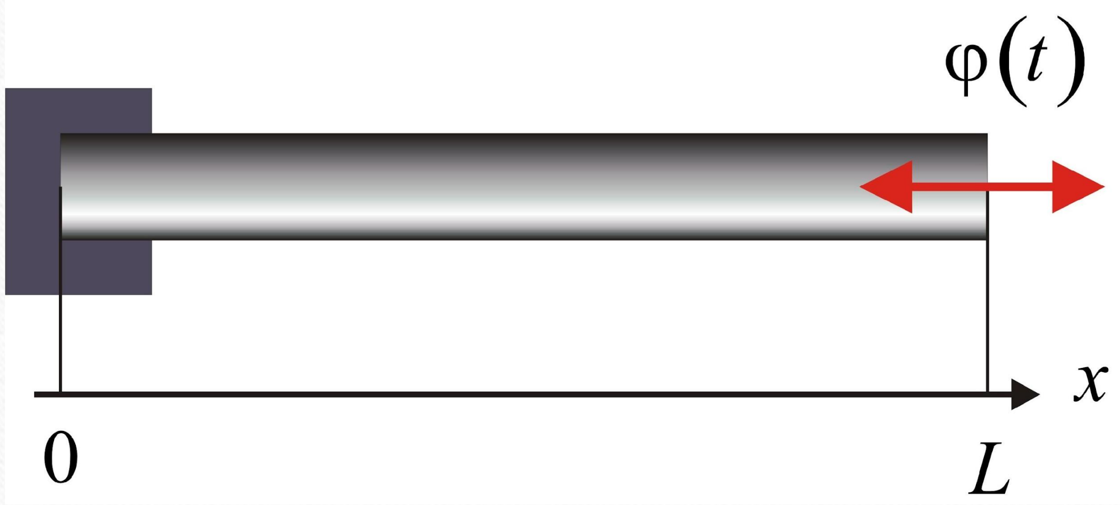
Упругие колебания стержня с закрепленным концом

Деревич И.В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2021

Постановка задачи



Уравнение упругих колебаний

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$$

Начальные условия:

$$U(x,t)\Big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = 0$$

Граничные условия:

$$U(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \qquad U(x,t)\Big|_{x=L} = -\varphi(t)$$

Преобразование функции решения

$$U(x,t) = U_1(x,t) - \frac{x}{L}\varphi(t)$$

новая функция $U_1(x)$ с нулевыми граничными условиями

$$\boxed{U_1(x,t)\Big|_{x=0} = U_1(x,t)\Big|_{x=L} = 0}$$

Неоднородное уравнение для новой функции $U_1(x)$

$$\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{x}{L}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2}}_{g(x,t)}$$

Начальные условия и метод решения

$$\varphi(0) = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

начальные условия (гладкое включение) внешнего воздействия

$$U(x,t)\big|_{t=0} = U_1(x,t)\big|_{t=0} - \frac{x}{L}\varphi(t)\big|_{t=0}$$

$$\boxed{U_1(x,t)\big|_{t=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0}$$

Метод решения

$$U_1(x,t) = \underbrace{U_1'(x,t)}_{\text{общее решение однородного уравнения}} + \underbrace{U_1''(x,t)}_{\text{частное решение неоднородного уравнения}}$$

Решение однородного уравнения

Метод разделения переменных

Решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 U'(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U'(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\boxed{U'(x,t) = X(x)T(t)}$$

$$\frac{1}{a^2 T(t)} \frac{\mathrm{d}^2 T(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda^2$$

константа разделения

Уравнение по времени

$$\frac{\mathrm{d}^2 T(t)}{\mathrm{d}t^2} + (a\lambda)^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = \begin{cases} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{cases}$$

$$\Omega = a\lambda$$

Задача Штурма - Лиувилля

Уравнение по пространственной переменной

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} + \lambda_n^2 X_n(x) = 0 \qquad X_n(0) = 0 \qquad X_n(L) = 0$$

Собственные функции и собственные значения задачи

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x) \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 0, 1, 2\dots$$

$$\boxed{\int_0^L X_{n'}(x) X_{n''}(x)\,dx = \|X_{n'}\|^2 \delta_{n',n''} = \frac{L}{2}\delta_{n',n''}}$$

условие ортогональности собственных функций

Общий вид решения

$$U'(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\sin(\Omega_n t)+B_n\cos(\Omega_n t)\right]\sin(\lambda_n x)\qquad \Omega_n=\frac{n\pi a}{L}$$

Расчет констант из начальных условий

$$U'(x,0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\sin(\lambda_n x)\qquad B_n=\frac{2}{L}\int_0^L U'(x,t)\Big|_{t=0}\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\mathrm{d}x$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U'(x,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n A_n\sin(\lambda_n x)\quad A_n=\frac{2}{L\Omega_n}\int_0^L\left.\frac{\mathrm{d}U'(x,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\mathrm{d}x$$

Частное решение неоднородного уравнения

Разложение по собственным функциям

Уравнение и начальные условия

$$\boxed{\frac{\partial^2 U''(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U''(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t)} \qquad \boxed{U''(x,t)\Big|_{t=0} = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial U''(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = 0}$$

Разложение по собственным функциям

$$U''(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x)$$

разложение искомого решения $C_n(t) - ?$

разложение силы

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(t) X_n(x) \qquad \Gamma_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^L g(x,t) X_n(x) \mathrm{d}x$$

Система ОДУ. Колебания осциллятора

Уравнение и начальные условия для амплитуды

$$\frac{d^2 C_n(t)}{dt^2} + \Omega_n^2 C_n(t) = \Gamma_n(t) \qquad C_n(0) = 0, \quad \left.\frac{dC_n(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Частное решение неоднородного уравнения упругих колебаний

$$C_n(t) = \frac{1}{\Omega_n}\int_0^t \Gamma_n(s)\sin\left[\Omega_n(t-s)\right]ds \qquad U''(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x)$$

Численные примеры решения задачи

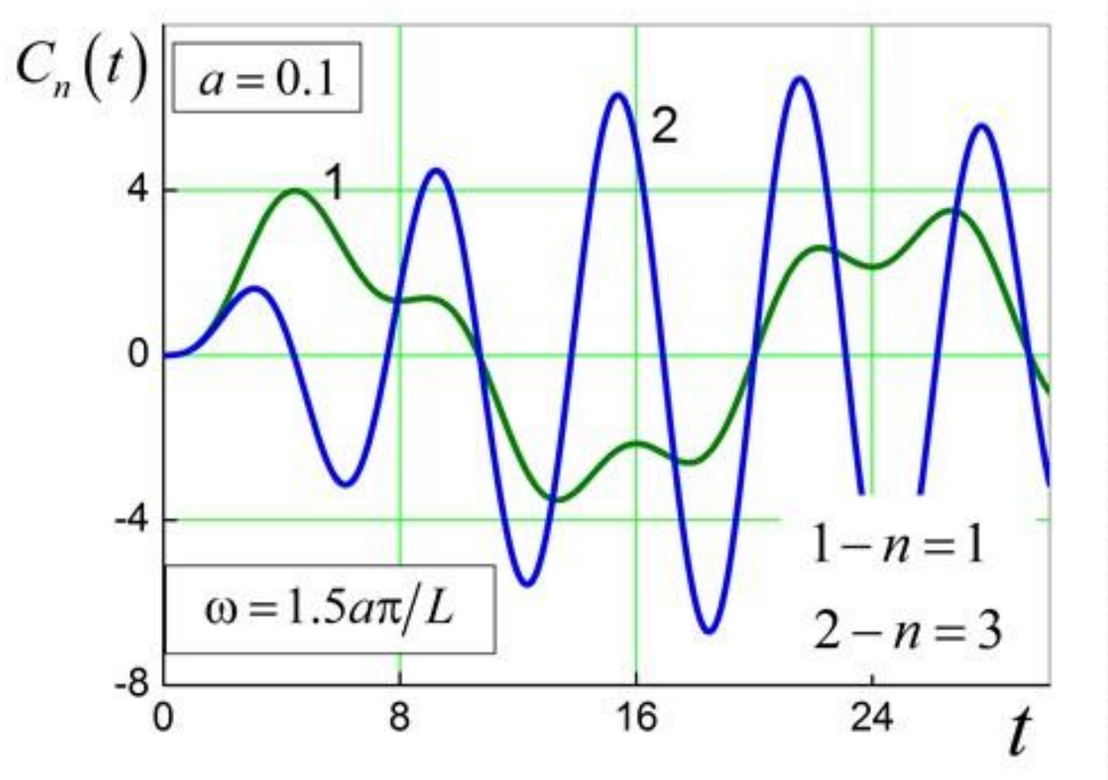
Упругие колебания с внешней силой

Периодическое внешнее воздействие

$$\Gamma_n(t) = Z_n \sin(\omega_n t)$$

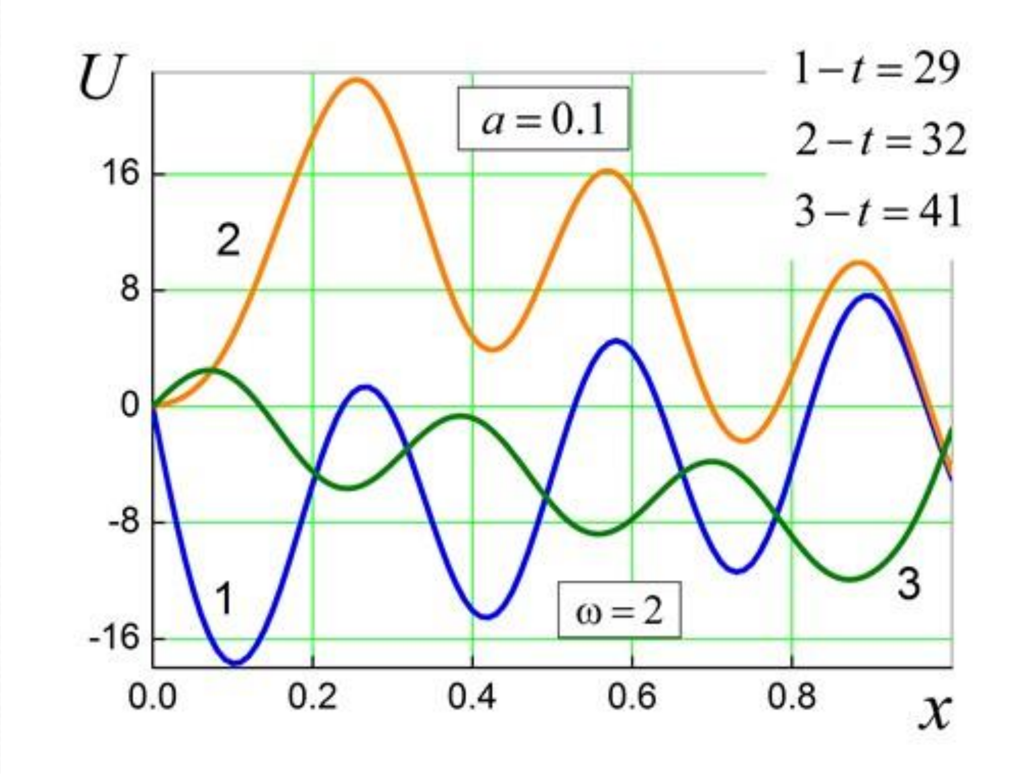
$$C_n(t) = Z_n \frac{\omega \sin(\Omega_n t) - \Omega_n \sin(\omega t)}{\Omega_n(\omega^2 - \Omega_n^2)}$$

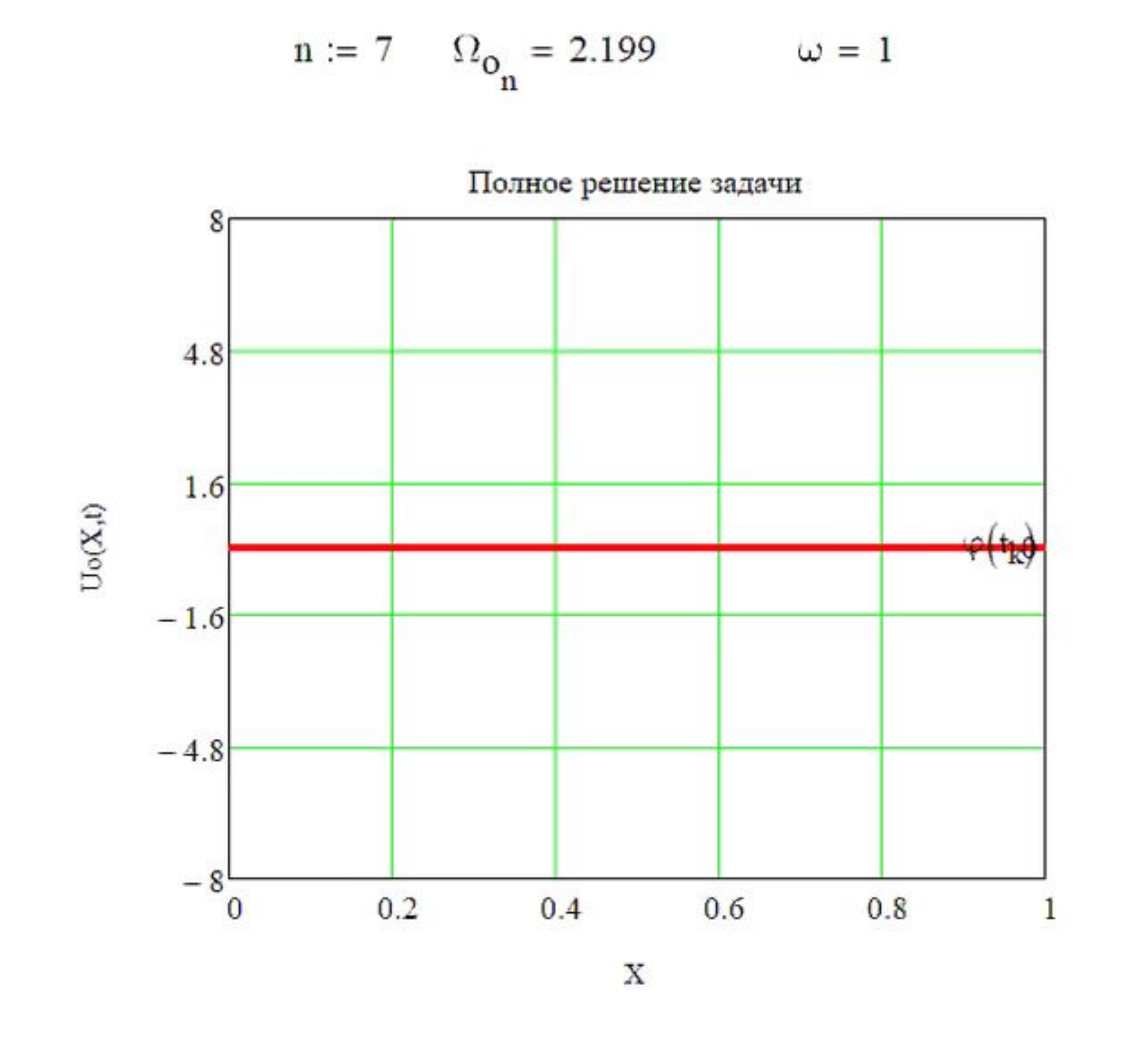
Колебания без резонанса



Колебания в стержне без резонанса

Профили деформации без резонанса



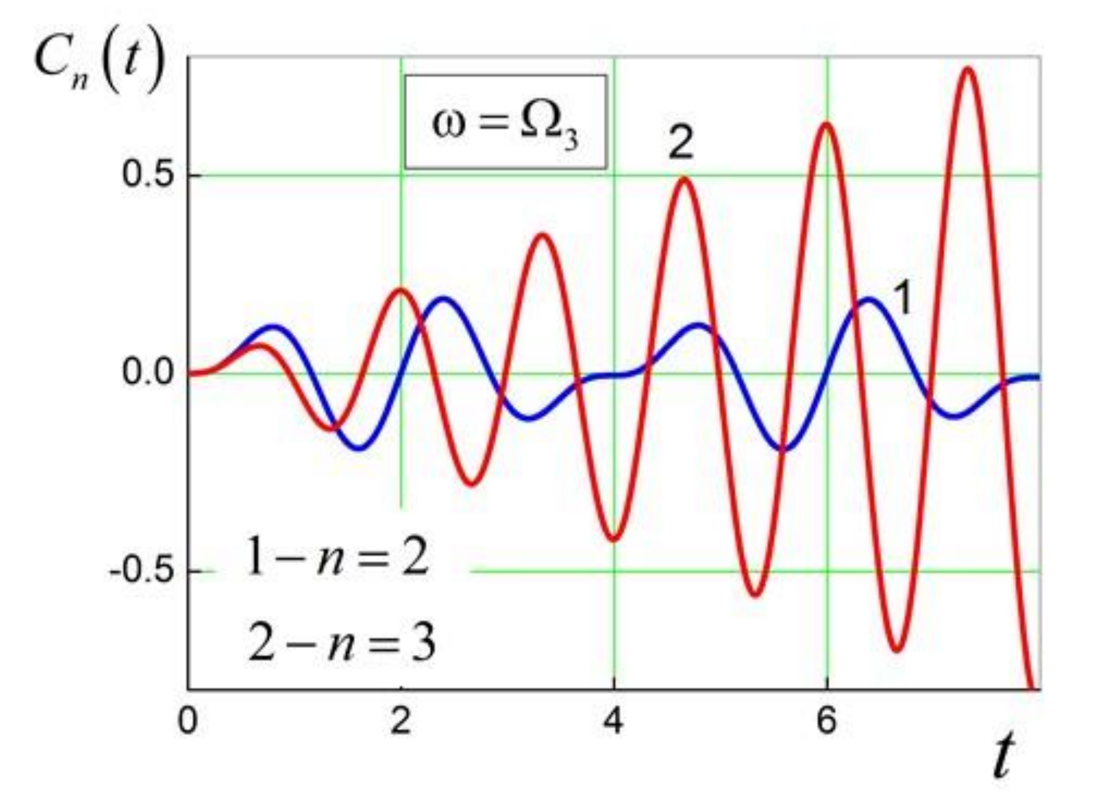


Резонанс упругих колебаний в стержне

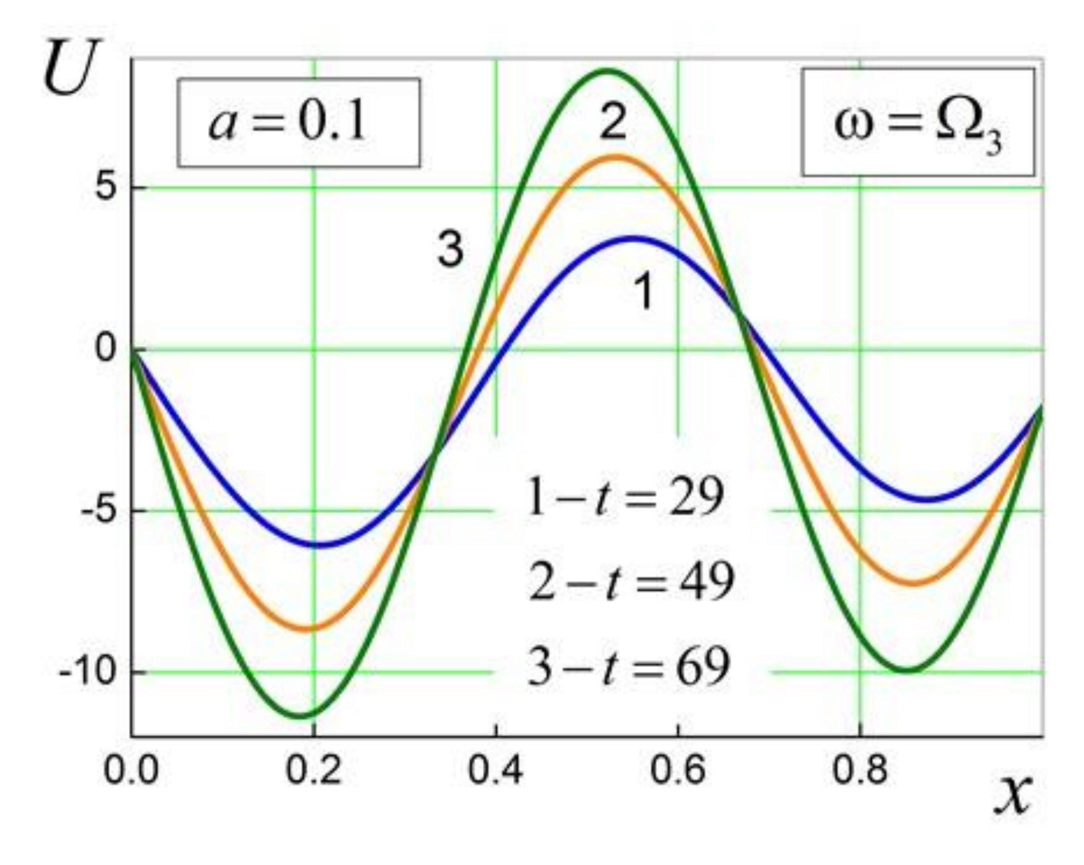
$\boxed{\omega \to \Omega_n}$ условие резонанса

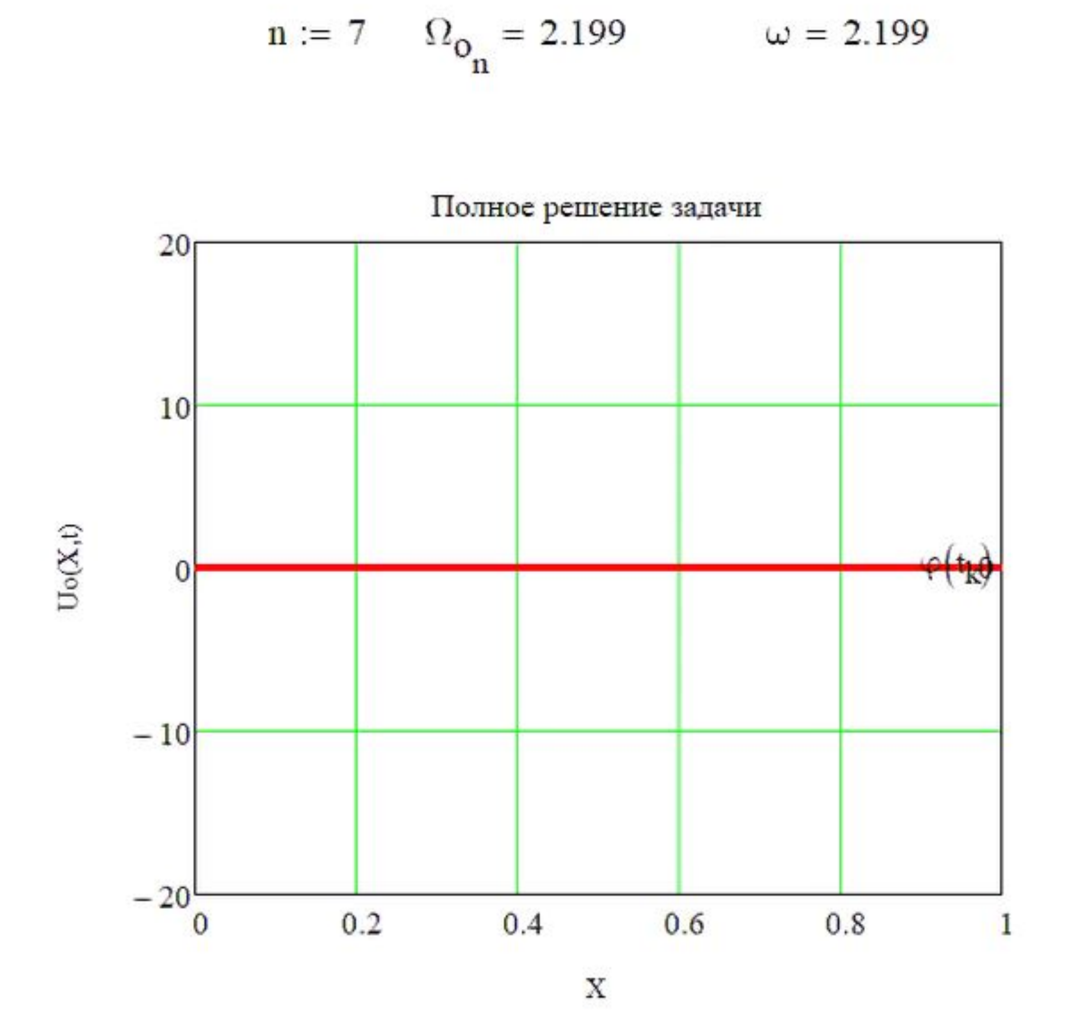
Амплитуда колебаний при резонансе

$$C_n(t) = Z_n \frac{\sin(\omega t) - (\omega t)\cos(\omega t)}{2\omega^2}$$



Резонанс в стержне с закрепленным концом





Resume

Получили аналитическое решение задачи об упругих колебаниях в стержне с одним закрепленным концом и вторым, перемещающимся по заданному закону

- ✔ Познакомились с методом решения задач с неоднородными граничными условиями
- ✔ Получили и решили задачу Штурма – Лиувилля на собственные функции и собственные значения
- ✔ Научились решать однородные и неоднородные уравнения упругих колебаний в стержне
- ✔ Численно исследовали возникновение резонанса в упругом стержне при заданном перемещении одного из концов