Здравствуйте!

Лекция №4

Теорема 2. Пусть $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ **есть правильная рациональная дробь и** b есть **комплексный корень полинома** $P_n(x)$ **кратности** λ**, то есть** $P_n(x)=(x^2+px+q)^\lambda \varphi(x)$**. Тогда имеет место разложение**

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-s}\varphi(x)},$$

где $s \geq 1$**, а** $\psi(x)$ **– полином такой степени, что второе слагаемое есть правильная рациональная дробь.**

Доказательство.

Рассмотрим

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}=\frac{Q_m(x)}{(x^2+px+q)^\lambda\varphi(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}=$$

$$=\frac{Q_m(x)-(Mx+N)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^\lambda\varphi(x)}$$

и постараемся подобрать M и N так, чтобы выполнилось условие $Q_m(b)-(Mb+N)\varphi(b)=0$.

Так как b есть **комплексный корень,** то $b=u+iv$ и $v\neq 0$. Тогда из нашего условия получим

$$Mb+N=Mu+iMv+N=\frac{Q_m(b)}{\varphi(b)}.$$

Приравнивая мнимые части этих выражений, получим

$$Mv = \operatorname{Im}\left(\frac{Q_m(b)}{\varphi(b)}\right),$$

откуда однозначно определяется M

$$M = \frac{1}{v}\operatorname{Im}\left(\frac{Q_m(b)}{\varphi(b)}\right).$$

Приравнивая действительные части этих выражений, получим

$$Mu + N = \operatorname{Re}\left(\frac{Q_m(b)}{\varphi(b)}\right),$$

откуда, зная M, можно однозначно определить и N:

$$N = \operatorname{Re}\left(\frac{Q_m(b)}{\varphi(b)}\right) - Mu.$$

Таким образом, M и N определяются **однозначно.**

Но теперь у полинома $Q_m(x)-(Mx+N)\varphi(x)$ будет пара комплексно сопряженных корней b и $\overline{b}$ некоторой кратности s. Поэтому

$$Q_m(x)-(Mx+N)\varphi(x)=(x^2+px+q)^s\psi(x)$$

и мы получим

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}=\frac{(x^2+px+q)^s\psi(x)}{(x^2+px+q)^\lambda\varphi(x)}=\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-s}\varphi(x)},$$

что и требовалось доказать.

Следствие.

Продолжая разложение дальше, получим

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{M_{\lambda-1}x+N_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

Опять таки, **некоторые** из $M_1,M_2,\ldots,M_\lambda$ и $N_1,N_2,\ldots,N_\lambda$ **могут быть** равны нулю.

Общий вид разложения.

Пусть $P_n(x) = a_0 \cdot \prod_{j=1}^{m} (x - b_j)^{k_j} \cdot \prod_{s=1}^{r} (x^2 + p_s x + q_s)^{\lambda_s}$ и $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ есть правильная рациональная дробь. Тогда имеет место разложение

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{k_j} \frac{A_{js}}{(x - b_j)^s} + \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=1}^{\lambda_s} \frac{M_{sl} x + N_{sl}}{(x^2 + p_s x + q_s)^l}.$$

Это представление называется **разложением правильной рациональной дроби на простейшие.**

Заметим в заключение, что **некоторые** из коэффициентов A_{js}, M_{sl} и N_{sl} **могут быть** равны нулю.

Нахождение коэффициентов в разложении правильной рациональной дроби на простейшие

Метод неопределенных коэффициентов

Мы разберем этот метод на примере.

Разложить на простейшие следующую рациональную дробь

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Шаг 1. Пишется разложение рациональной дроби на простейшие с **неопределенными** коэффициентами.

В данном случае, в полиноме, стоящем в знаменателе, имеется вещественный корень 1 кратности 2, и пара комплексно сопряженных корней кратности 1. Поэтому

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}=.$$

Шаг 2. Написанное выражение **привести к общему знаменателю**

$$=\frac{A_2(x^2+x+1)+A_1(x-1)(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=.$$

Шаг 3. В числителе раскрыть скобки так, чтобы неизвестные коэффициенты стояли бы перед некоторыми полиномами от x:

$$=\frac{A_2(x^2+x+1)+A_1(x^3-1)+M(x^3-2x^2+x)+N(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Шаг 4. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в полиноме, стоящем в числителе исходного выражения, и в полиноме, стоящем в числителе полученного выражения. Имеем:

$$
\begin{array}{l|ll}
\text{при } x^3 & A_1 + M & = 2, \\
\text{при } x^2 & A_2 - 2M + N & = 4, \\
\text{при } x^1 & A_2 + M - 2N & = 1, \\
\text{при } x^0 & A_2 - A_1 + N & = 2.
\end{array}
$$

Шаг 5. Решить получившуюся систему линейных алгебраических уравнений (как это делать – учат и в школе и в курсе алгебры) В данном случае, решение дает

$$A_1 = 2;\ A_2 = 3;\ M = 0;\ N = 1,$$

так что окончательно

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Метод вычеркивания

Вспомним еще раз теорему 1. Там было

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q_m(x)}{(x-b)^k\varphi(x)}=\frac{A}{(x-b)^k}+\frac{\psi(x)}{(x-b)^{k-s}\varphi(x)}$$

и, в частности, была явная формула для коэффициента A:

$$A=\frac{Q_m(b)}{\varphi(b)}.$$

Именно эта формула и дала название «метод вычеркивания». Ее формулируют обычно так: чтобы найти коэффициент при $\dfrac{1}{(x-b)^k}$ надо в исходном выражении **вычеркнуть** в знаменателе сомножитель $(x-b)^k$ и в оставшемся выражении заменить x на b.

Пример.

Разложить на простейшие

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x}.$$

Согласно сформулированному правилу имеем

$$A=\left.\frac{x+1}{\cancel{(x-1)}(x-2)x}\right|_{x=1}=\frac{2}{(-1)\cdot 1}=-2;$$

$$B=\left.\frac{x+1}{(x-1)\cancel{(x-2)}x}\right|_{x=2}=\frac{3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2};$$

$$C=\left.\frac{x+1}{(x-1)(x-2)\cancel{x}}\right|_{x=0}=\frac{1}{(-1)\cdot(-2)}=\frac{1}{2},$$

так что

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)x}=-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{2(x-2)}+\frac{1}{2x}.$$

Комбинирование

Рекомендуется комбинировать метод вычеркивания и метод неопределенных коэффициентов и часть коэффициентов находить методом вычеркивания, а оставшиеся – методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим это на том примере, который мы рассматривали в методе неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Здесь коэффициент A_2 можно найти методом вычеркивания

$$A_2=\left.\frac{2x^3+4x^2+x+2}{\cancel{(x-1)^2}(x^2+x+1)}\right|_{x=1}=\frac{9}{3}=3.$$

Оставшиеся коэффициенты надо находить методом неопределенных коэффициентов. Знание A_2 приведет к тому, что нам надо будет решать систему только из трех уравнений, а не четырех, причем из получающейся системы четырех уравнений мы можем выбрать любые три по нашему вкусу.

Интегрирование дробно рациональных функций

Если под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь, то, после разложения ее на простейшие, мы получим интегралы следующих четырех типов:

$\int \frac{dx}{x-b}$ (тип I), $\int \frac{dx}{(x-b)^k}$ (тип II), $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ (тип III), и

$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}dx$ (тип IV),

и если мы научимся вычислять эти интегралы, мы сможем найти интегралы от любых дробно рациональных функций.

Тип I. Делая замену переменных $t = x - b$, $dt = dx$, получим:

$$\int \frac{dx}{x-b} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|x-b|.$$

Тип II. Делая замену переменных $t = x - b$, $dt = dx$, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-b)^k} = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{(k-1)(x-b)^{k-1}}.$$

Тип III.

Имеем $I = \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$.

Выделим в знаменателе полный квадрат

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

где $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Тогда получаем

$$I = \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{M\left(x + \frac{p}{2}\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx =$$

$$= M\int \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}.$$

В первом интеграле сделаем замену переменных $t = x+\frac{p}{2}$. Тогда

$$\int \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx = \int \frac{tdt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) = \frac{1}{2}\ln(x^2+px+q).$$

Во втором интеграле, после той же замены переменных, получим

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}.$$

Сводя все вместе и упрощая, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}},$$

что и дает явное выражение для интеграла третьего типа.