

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ В СОВРЕМЕННОМ ШКОЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

проф. П. В. Семенов,

Издательство «Бином»,

*Отдел математического образования факультета математики
НИУ ВШЭ*

Москва, 22 ноября 2019

Исторический обзор.

Попытки радикально реформировать систему школьного, в том числе и математического, образования вовсе не есть прерогатива последних лет, или даже последних 30-50 лет. В качестве своеобразной точки отсчета может быть выбран 1899 г., когда в соответствии с циркуляром министра народного просвещения России Н. П. Боголепова была Высочайше утверждена Комиссия по вопросу о средней школе. Во многих округах (губерниях) попечители округов собрали совещания по обсуждению задач, поставленных в циркуляре.

В Московском учебном округе (попечитель проф. П. А. Некрасов) такие совещания проходили в течение 1899 - 1900 уч. года. Сохранились шесть выпусков материалов (протоколов) этого Совещания, третий из которых (см. 8, 17 и 22 ноября) был уделен естественно-научному и математическому образованию в гимназиях.

Позже, в 1911, 12 и 1915 и 16 годах состоялись Общеземский, Всероссийский, Всероссийские (преподавателей математики) съезды. Интересно, что основные споры о содержании собственно курса школьной математики в них сконцентрировались вокруг вопросов, актуальных и для нынешнего поколения учителей и преподавателей математики: изложение основ математического анализа; изложение основ теории вероятностей; начала аналитической геометрии.

Совещания, происходившие в 1899 г. в Московском учебном округе по вопросам о средней школе, вып. 1-6.

Попечитель Моск. Округа проф. П. А. Некрасов «Цель и значение преподавания математики в гимназиях»

ловъ математики. Мнѣ приходилось слышать, что теорія сочетаній и биномъ Ньютона предлагаются иногда, какъ отдѣлы, которые можно было бы сократить. Соглашаясь на другія сокращенія, выскажусь рѣшительно противъ сокращенія теоріи сочетаній. Теорія эта по особенному значенію своему принадлежитъ къ такимъ отдѣламъ, преподаваніе которыхъ въ гимназіи слѣдуетъ непременно сохранить и поставить въ лучшія условія. Теорія сочетаній представляетъ средство для развитія одной изъ важнѣйшихъ способностей ума — способности представлять явленія въ разныхъ комбинаціяхъ. Эта способность нужна въ жизни всякому, и изощреніе ея желательно. Но, кромѣ этого со-

<http://mathedu.ru/>
<http://mathedu.ru/hist-edu/>
<http://mathedu.ru/hist-edu/russia/>

Программа по алгебре, седьмой класс гимназии (16 -18 лет)

1917 г

Алгебра (1 урокъ въ первомъ полугодіи и 2 урока во второмъ).

Исслѣдованіе уравненій 1-й степени съ одной неизвѣстной величиной; задача о курьерахъ.

Исслѣдованіе системы уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными; случаи невозможности и неопредѣленности системы. Рѣшеніе неравенствъ 1-й степени съ одною неизвѣстною величиною. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ. Непрерывныя дроби и примѣненіе ихъ къ извлеченію квадратнаго корня съ даннымъ приближеніемъ изъ чиселъ и къ вычисленію логарифмовъ. Теорія соединеній. Биномъ Ньютона для положительнаго и цѣлаго показателя.

«...Подумаешь, тоже мне бином Ньютона...»

В 1925 г. для школ II ступени и рабочих факультетов вышла программа, в которую вошли следующие вероятностные вопросы: «Понятие о вероятности явлений. Сложение и умножение вероятностей. Понятие о “законе больших чисел”, его опытная проверка. Элементы математической статистики. Закон случайных ошибок».

После 1917 года соединения и бином Ньютона также постоянно входили в школьные программы, но их значимость постепенно уменьшалась. Например, в 41-м, последнем издании (1964) классического учебника «Алгебра» А.П. Киселева эти разделы составляли лишь самую

Глава 12. СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

I. Соединения		189
	155. Определение (189). 156. Размещения (189). 157. Задачи (191). 158. Перестановки (191). 159. Задачи (192). 160. Сочетания (192). 161. Другой вид формулы числа сочетаний (193). 162. Свойство сочетаний (193).	
II. Бином Ньютона		194
	163. Произведение биномов, отличающихся только вторыми членами (194). 164. Формула бинома Ньютона (196). 165. Свойства формулы бинома Ньютона (197). 166. Применение формулы бинома к многочлену (199).	
III. Исследование квадратного трёхчлена. Неравенства второй степени		221
	182. Задача (221). 183. Квадратный трёхчлен, имеющий вещественные различные корни (222). 184. Квадратный трёхчлен, имеющий равные корни (228). 185. Квадратный трёхчлен, имеющий мнимые корни (230). 186. Общий вывод (232). 187. Неравенства второй степени (234).	

В учебнике Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковых (1965 - 1971) числа C_n^k сочетаний, формально присутствуют, но вовсе не как самостоятельное понятие, а лишь как вспомогательный элемент при вычислении старших производных многочленов.

На рубеже 1970 г. при работе комиссии под рук. А. И. Маркушевича и А. Н. Колмогорова по реформированию школьного математического образования среди прочих активно обсуждалась дилемма, какое из основных направлений реформирования выбрать: усиление доли дискретной математики и методов обработки информации (как это по факту было сделано в большинстве западноевропейских стран) или же усиление доли «непрерывной» математики, связанной с производными, пределами интегралами и т.п.

Было выбрано второе направление, хотя в первых изданиях учебника А. Н. Колмогорова были и числа сочетаний (как область применения метода математической индукции), и петитом набранный параграф о простейших вероятностных задачах. Правда, уже к 1975 г. этот стохастический оттенок в учебниках был прочно забыт.

Примерно к 1995 г., попытки обновления всех аспектов государственного устройства привели и к предложениям по заметному обновлению школьного математического образования. В основном это касалось именно введения стохастической составляющей в школьный курс математики и впервые нашло отражение в УМК под. ред. Г. В. Дорофеева. Примерно тогда же впервые в образовании прозвучало магическое слово «стандарт». Применительно к высшему образованию оно было реализовано в виде серии документов примерно в 2001-2 гг., а в 2004 г. появился и стандарт школьного образования.

В. А. Болотов. Инструктивное письмо № 03-93ин/13-03 МО РФ «О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы» // Математика в школе. № 9, 2003.

[Стандарт] <http://www.school.edu.ru/attach/8/281.doc>

Множества и комбинаторика. *Множество. Элемент множества, подмножество. Объединение и пересечение множеств. Диаграммы Эйлера.* Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило умножения.

Статистические данные. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков. Средние результатов измерений. Понятие о статистическом выводе на основе выборки. Понятие и примеры случайных событий.

Вероятность. Частота события, вероятность. Равновероятные события и подсчет их вероятности. Представление о геометрической вероятности.

-
- За время, прошедшее с момента появления инструктивного письма МО РФ, см. [Болотов], авторы различных учебников весьма по-разному предложили ученикам и учителям новый стохастический материал.
 - Поляризация имеющихся позиций весьма впечатляюща: от полного отрицания самой возможности изучения стохастики в школе, см. [Ивашев-Мусатов, «...Поэтому введение теории вероятностей в средней школе - противопоказано»], до создания УМК по элементам статистики и теории вероятностей, по существу отдельных от сложившегося курса алгебры [Тюрин и

^{пр1}
В целом, к настоящему времени, стохастический материал в школьных учебниках

находится на весьма «птичьих» правах, выступая в роли, очевидно, дополнительной к имеющемуся курсу алгебры. Ученики и учителя безошибочно различают эту своеобразную чужеродность по простейшему для них признаку: условию задач. Если есть «иксы» и «игреки», уравнения, неравенства, графики функций и т.п., то это - алгебра. А вот если появляются монетки, шары в урнах, рукопожатия, Вася с Петей, восклицательные знаки после обычных значков переменных, то это - комбинаторика и вероятность.

- В общем, наибольшую актуальность при сложившемся положении дел представляют, на наш взгляд, вопросы практической сочетаемости («корреляции») нового со старым.
- А именно, то, каким конкретным образом качественно новый для подавляющего большинства учителей математики стохастический учебный материал может быть интегрирован, включен в структуру курса математики основной школы.
- Для сравнения. *Почему выпускники средних школ (пока еще) весьма надежно и уверенно решают квадратные уравнения?*
- Используя более высокий стиль, квадратные уравнения «всюду плотны» примерно на протяжении 150 недель учебной деятельности учащихся, они надежно включены, интегрированы

Если, при решении задач по элементам комбинаторики, вероятности и статистики

школьники не будут:

- выполнять преобразования числовых и буквенных выражений;
- решать линейные и другие уравнения и неравенства;
- использовать координаты точек, рисовать и исследовать графики функций;

и т.п.,

то стохастика «повиснет в воздухе», так и останется дополнением, добавком, «вкладышем» и т.д.,

к привычной математике. Верно, на мой взгляд, и утверждение противоположной

направленности. Если при:

- выполнении преобразований числовых и буквенных выражений;
- решении линейных и других уравнений и неравенств;
- использовании координат точек, исследовании графиков функций; и т.п.

ни разу не задавать вопросы типа «Сколько всего...», «В скольких случаях получится, что...»,

«Чего больше...», «Что более вероятно...», «Как распределены...», то классическая школьная

математика так и останется для стохастики не слишком дружелюбной мачехой

Разумеется, речь не идет о полной ассимиляции комбинаторики, вероятности и статистики

в курсе алгебры основной школы: это вещь невозможная и, например, поэтому ненужная. Но

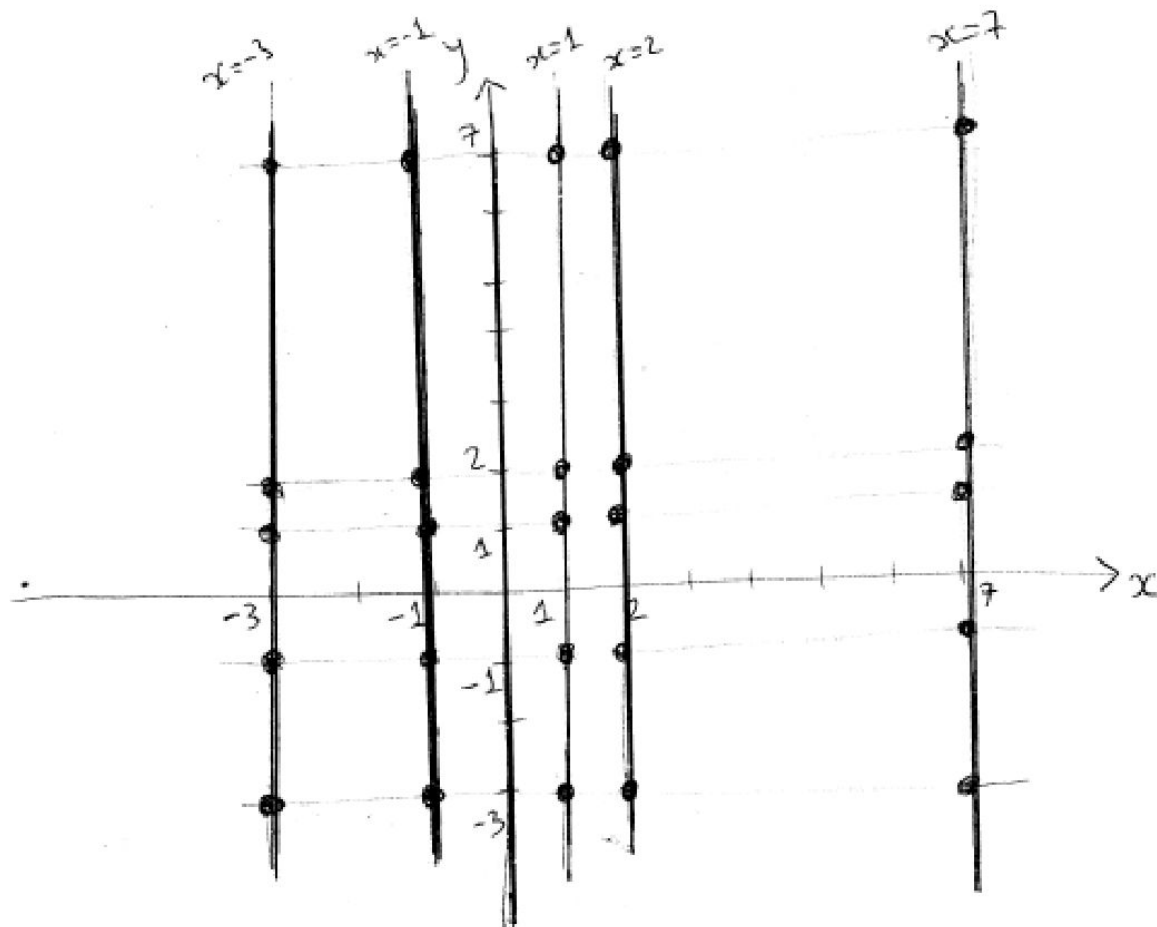
иметь по математике по **три** разных учебника (алгебра, геометрия, стохастика), иметь во всех

школах разных учителей-математиков (Иванова – по алгебре, Петрова – по геометрии, Сидоров –

по вероятности) – вещь также несбыточная и неразумная, прямо противоречащая тезису о

- *На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: -3, -1, 1, 2, 7 (повторения допускаются).*
 - *Сколько всего таких точек отмечено:*
 - *а) на плоскости;*
 - *б) левее оси ординат;*
 - *в) выше оси абсцисс;*
 - *г) в круге радиуса 5 с центром в начале координат?*

 - *а) Сначала будем выбирать абсциссу точки (первое испытание).*
 - *Есть 5 возможных исходов: абсцисса может равняться или -3, или -1, или 1, или 2. или 7.*
 - *Затем будем выбирать ординату точки (второе испытание). Также есть 5 возможных исходов.*
 - *По правилу умножения всего получается $5 \times 5 = 25$ точек.*
-



$e) \quad x^2 + y^2 \leq 25; \quad x \neq 7, \quad y \neq 7 \quad x \in \{-3; -1; 1; 2\}, \quad y \in \{-3; -1; 1; 2\}$

ОТВЕТ: $4 \times 4 = 16$

Задача по стохастике, а учебный материал – координатная плоскость

36.7. Решите неравенство:

а) $3 < k! < 10$;

б) $7 < m! < 27$;

в) $100 < n! < 200$;

г) $500 < x! < 1000$;

д) $1000 < y! < 10\,000$;

е) $10\,000 < z! < 100\,000$.

36.8. Решите уравнение:

а) $(n + 1)! = 3n!$;

б) $(k - 1)! = 4(k - 2)!$;

в) $(m - 5)! = 7(m - 6)!$;

г) $x! + 7(x - 1)! = 66$;

д) $(y - 2)! = 90(y - 4)!$;

е) $(z + 3)! = 210z!$.

36.9. На сколько нулей оканчивается число:

а) $5!$;

в) $9!$;

д) $15!$;

б) $6!$;

г) $10!$;

е) $29!$?

24.4. Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства $x(x - 6) \leq 2x + 9$ окажется решением неравенства:

а) $x \geq 0$;

в) $|x - 1| \leq 1$;

д) $\sqrt{x - 5} \leq 2$;

б) $|x - 1| \leq 0$;

г) $x^3 > x$;

е) $\frac{1}{x} \leq 4$?

24.5. В треугольнике с вершинами $A(1; 0)$; $B(3; 0)$; $C(3; 6)$ наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:

а) левее оси ординат;

б) выше оси абсцисс;

в) левее прямой $x = 2$;

г) вершиной треугольника;

д) ниже прямой $y = 2$;

е) выше прямой $y = 2x - 2$.

Принятый в 2012 г. федеральный государственный стандарт образования (ФГОС) содержит много полезных и важных утверждений и положений, но не содержит главного для практикующего учителя математики: конкретного предметного содержания и тематического наполнения этого стандарта. Для разработки такого содержания была, разумеется, образована комиссия и группы по предметам. Результат их деятельности - это ПООП, примерная общая образовательная программа. По основной школе ПООП была утверждена в апреле 2015 г.

Что касается традиционной математики, то тут содержание в целом вполне традиционно, хотя к формулировкам могут быть предъявлены различного рода претензии. Но вот что касается стохастики, то тут степень предложенного радикализма в ПООП основной и особенно старшей школы, на мой взгляд, зашкаливает. По существу, крен взят в сторону формирования отдельного и независимого изучения стохастики, причем во главу угла ставятся даже не комбинаторика или элементарная теория вероятностей, а изучение случайных величин.

Чтобы не быть голословным, я полностью процитирую стохастический раздел ПООП основной школы и ограничусь высказыванием своего мнения о том, что примеры его реализации мне неизвестны, и что я самым серьёзным образом сомневаюсь в самом существовании подобной реализации на практике.

-
- **ПООП 7-9 класс,**
 - **с сайта www.fgosreestr.ru, 10_04_2015, 5_05_2015**

- **Статистика**

- Табличное и графическое представление данных, столбиковые и круговые диаграммы, графики, применение диаграмм и графиков для описания зависимостей реальных величин, извлечение информации из таблиц, диаграмм и графиков. Описательные статистические показатели числовых наборов: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения. Меры рассеивания: размах, *дисперсия и стандартное отклонение*. Случайная изменчивость. Изменчивость при измерениях. Решающие правила. Закономерности в изменчивых величинах.
-

- **Случайные опыты и случайные события**
- Случайные опыты (эксперименты), элементарные случайные события (исходы). Вероятности элементарных событий. События в случайных экспериментах и благоприятствующие элементарные события. Вероятности случайных событий. Опыт с равновозможными элементарными событиями. Классические вероятностные опыты с использованием монет, кубиков.
- *Представление событий с помощью диаграмм Эйлера. Противоположные события, объединение и пересечение событий. Правило сложения вероятностей. Случайный выбор. Представление эксперимента в виде дерева, умножение вероятностей. Независимые события. Последовательные независимые испытания. Роль независимых событий в жизни, в частности – в технике.*

■ **Элементы комбинаторики**

- Правило умножения, перестановки, *факториал числа*. Сочетания и число сочетаний. *Формула числа сочетаний*.
- Треугольник Паскаля. Опыты с большим числом равновозможных элементарных событий.
- Вычисление вероятностей в опытах с применением комбинаторных формул. *Испытания Бернулли. Успех и неудача. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли.*

-
- **Случайные величины**
 - Знакомство со случайными величинами на примерах конечных дискретных случайных величин. Распределение вероятностей.
 - Математическое ожидание. *Свойства математического ожидания.*
 - Понятие о законе больших чисел.
 - Измерение вероятностей. Применение закона больших чисел в социологии, страховании, в здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.
-



**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
(МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ)**

П Р И К А З

« ____ » _____ 2019 г.

№ _____

Москва

**Об утверждении и введении в действие федерального государственного
образовательного стандарта основного общего образования**

В соответствии с подпунктом 4.2.30 пункта 30 Положения о Министерстве просвещения Российской Федерации, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2018 г. № 884 (Собрание законодательства Российской Федерации, 2018, № 32, ст. 5343; № 36, ст. 5634; № 53, ст. 8683; 2019, № 12, ст. 1313), и пунктом 27 Правил разработки, утверждения федеральных государственных образовательных стандартов и внесения в них изменений, утвержденных постановлением Правительства Российской Федерации от 12 апреля 2019 г. № 434 (Собрание законодательства Российской Федерации, 2019, № 16, ст. 1942), приказываю:

1. Утвердить прилагаемый федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования.

2. Ввести в действие с 1 сентября 2021 г. федеральный государственный образовательный стандарт, утвержденный настоящим Приказом.

3. Признать утратившими силу приказы Министерства образования и науки Российской Федерации:

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования

ОГЛАВЛЕНИЕ

I.	Общие положения	6
II.	Требования к структуре программы основного общего образования.....	12
III.	Требования к условиям реализации программы..... основного общего образования	23
IV.	Требования к результатам освоения программы..... основного общего образования	36
<u>Приложение 1.</u>	Требования к условиям реализации программ основного общего образования	88

оперировать понятием столбчатая диаграмма; интерпретировать, преобразовывать и использовать при решении учебных и практических задач информацию, представленную в таблицах, схемах и столбчатых диаграммах;

оперировать понятием: круговая диаграмма; вычислять среднее арифметическое; выполнять измерение величин с помощью инструментов и приборов;

пользоваться таблицами, диаграммами, графиками для представления реальных данных, описания зависимостей реальных величин и решения простых задач; понимать роль случайной изменчивости в окружающем мире, распознавать изменчивые величины, в частности, результаты измерений; пользоваться статистическими характеристиками для описания наборов значений изменчивых величин: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значение, размах;

оперировать понятиями: случайный опыт, случайное событие, вероятность случайного события; находить вероятности случайных событий в опытах с равновероятными элементарными событиями; представлять роль практически достоверных и маловероятных событий в окружающем мире и жизни; оперировать понятиями граф, вершины и ребра графа;

оперировать понятиями: объединение и пересечение событий, противоположное событие; независимость событий; решать простейшие задачи на поиск вероятностей; оценивать вероятности реальных событий в простейших ситуациях; иметь представление о случайных величинах и их числовых характеристиках и о роли закона больших чисел в природе и в жизни человека;

Президент РФ дал поручение МинПросу.

См. <http://kremlin.ru/acts/assignments/orders/61579>

2. Минпросвещения России с учётом ранее данных поручений, касающихся обновления содержания общего образования в соответствии с приоритетными направлениями научно-технологического развития Российской Федерации, предусмотреть в новом федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования положения, касающиеся изучения обучающимися математики и информатики на углублённом уровне, а также обеспечить реализацию мер, направленных на повышение доступности углублённого изучения математики и информатики при получении основного общего образования для обучающихся всех общеобразовательных организаций и на повышение соответствующей квалификации учителей.

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов,
Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева

7 АЛГЕБРА

7 КЛАСС

Состав УМК

- Алгебра. 7–9 классы. Учебные издания для общеобразовательных организаций.
Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева.
- Алгебра. 7–9 классы. Примерная рабочая программа.
Автор: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова.
- Алгебра. 7–9 классы. Методические пособия для учителя.
Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов.
- Алгебра. 7–9 классы. Рабочие тетради.
Автор: М. В. Шуркова.
- Алгебра. 7–9 классы. Контрольные работы.
Автор: М. В. Шуркова.

А. Г. Мордкович

АЛГЕБРА



Федеральное
агентство
по
образованию
и
науке
РОССИИ
Федеральное
издательство
«БИНОМ»



А. Г. Мордкович, П. В. Семенов,
Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева

8 АЛГЕБРА

8 КЛАСС

Состав УМК

- Алгебра. 7–9 классы. Учебные издания для общеобразовательных организаций.
Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева.
- Алгебра. 7–9 классы. Примерная рабочая программа.
Автор: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова.
- Алгебра. 7–9 классы. Методические пособия для учителя.
Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов.
- Алгебра. 7–9 классы. Рабочие тетради.
Автор: М. В. Шуркова.
- Алгебра. 7–9 классы. Контрольные работы.
Автор: М. В. Шуркова.

А. Г. Мордкович

АЛГЕБРА



Федеральное
агентство
по
образованию
и
науке
РОССИИ
Федеральное
издательство
«БИНОМ»



А. Г. Мордкович, П. В. Семенов,
Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева

9 АЛГЕБРА

9 КЛАСС

Состав УМК

- Алгебра. 7–9 классы. Учебные издания для общеобразовательных организаций.
Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева.
- Алгебра. 7–9 классы. Примерная рабочая программа.
Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова.
- Алгебра. 7–9 классы. Методические пособия для учителя.
Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов.
- Алгебра. 7–9 классы. Рабочие тетради.
Автор: М. В. Шуркова.
- Алгебра. 7–9 классы. Контрольные работы.
Автор: М. В. Шуркова.

А. Г. Мордкович

АЛГЕБРА



Федеральное
агентство
по
образованию
и
науке
РОССИИ
Федеральное
издательство
«БИНОМ»



Глава 7. Описательная статистика	295	—
---	-----	---

§ 39. Ряды числовых данных. Упорядочение, группировка, таблицы	296	
§ 40. Ряды нечисловых данных. Таблицы распределения частот . . .	306	
§ 41. Диаграммы распределения данных	317	
§ 42. Числовые характеристики рядов данных	330	

Итак, в главе 7	344	
<i>Вопросы</i>	344	
<i>Тест</i>	345	
<i>Дополнительные задачи</i>	347	
Из истории математики	352	

Глава 6. Вероятности случайных событий	317	
---	-----	--

§ 40. Испытания с равновозможными исходами	318	
§ 41. Случайные события. Вероятность противоположного события	326	
§ 42. Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий	334	
§ 43. Испытания с конечным числом исходов. Последовательные независимые испытания и повторения испытаний	345	

Глава 5. Нахождение вероятностей с помощью комбинаторных формул	303	
--	-----	--

§ 36. Правило умножения и основные комбинаторные формулы . . .	303	
§ 37. Вероятность суммы двух событий. Независимые события	313	
§ 38. Испытания с двумя исходами и их независимые повторения . . .	323	
§ 39. Простейшие случайные величины	333	
Итак, в главе 5	346	

Глава 6. Закон больших чисел	139
§ 52. Треугольник Паскаля и бином Ньютона	139
§ 53. Случайные события и их вероятности	148
§ 54. Математическое ожидание (среднее значение) случайных величин	158
§ 55. Частота и вероятность. Законы больших чисел	168
Глава 5. Непрерывные случайные величины	55
§ 24. Геометрические вероятности	56
§ 25. Нормальное распределение	64
§ 26. Нормальные и биномиальные распределения. Законы больших чисел	78
Глава 6. Уравнения и неравенства	103
§ 27. Равносильность уравнений	103
§ 28. Решение уравнений с одной переменной	110
§ 29. Решение систем уравнений	121
§ 30. Решение неравенств с одной переменной	132
§ 31. Уравнения и неравенства с параметрами	151
§ 32. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом	168