

Теория вероятностей



Успех и неудача.
Число успехов в
испытаниях
Бернулли.



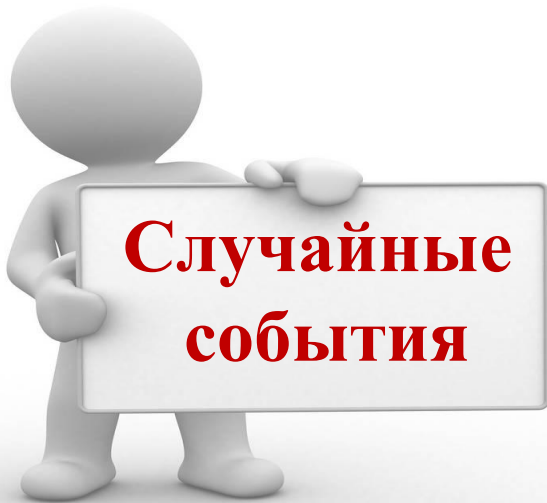


Вектор-рисунки.ру

Теория вероятностей



Формулы



1. Основные формулы комбинаторики

а) перестановки

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1) \cdot n$$

б) размещения

$$A_n^r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

в) сочетания

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}$$

Формулы



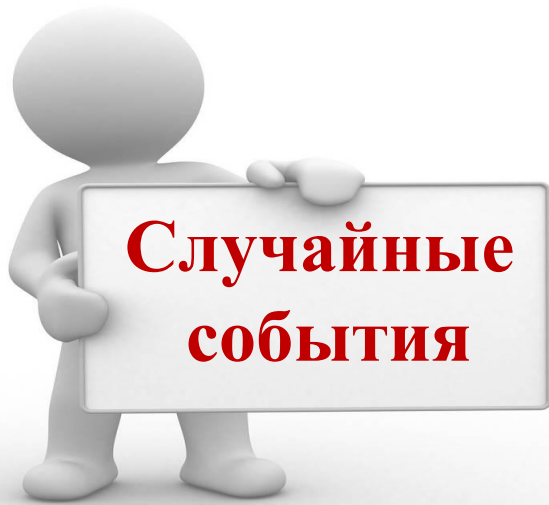
Случайные
события

2. Классическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

, где m – число благоприятствующих событию A исходов, n – число всех элементарных равновозможных исходов

Формулы



3. Вероятность суммы событий

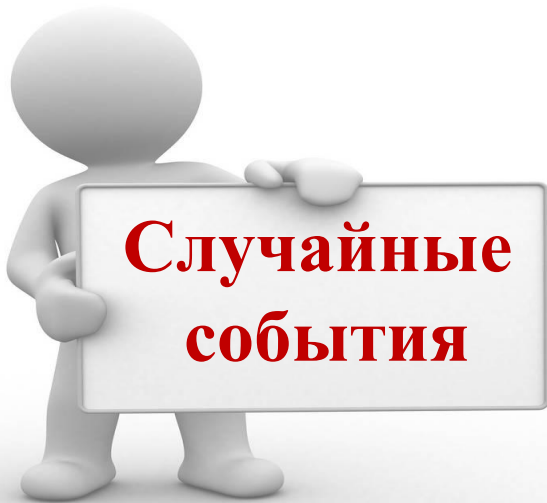
Теорема сложения вероятностей
несовместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения вероятностей
совместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Формулы



4. Вероятность произведения событий

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Сочетания

Задача. Сколькими способам можно вывезти со склада 10 ящиков на двух автомашинах, если на каждую автомашину грузят по 5 ящиков?

Решение. $n=10$, $r = 5$, порядок не важен, повторений нет.

Нужна формула: Сочетания

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Выбрать 5 ящиков, которые будут погружены на первую машину, из 10 ящиков, можно

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252 \text{ способами (сочетания из 10}$$

объектов по 5).

Тогда остальные 5 ящиков автоматически погружаем и везем во второй машине.

Итого получаем $N = 252$ способа.

Ответ: 252.



Размещения

Задача. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Решение.

$n = 11$, $r = 5$, *порядок важен* (уроки идут по порядку), *повторений нет*.

Нужна формула: Размещения

$$A_n^r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Будем считать, что уроки в течение дня не повторяются. Тогда количество вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин определим по формуле размещений:

$$A_n^r = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440 \text{ вариантов.}$$

Ответ: 55440

Перестановки

Задача. Сколькими способами 4 человека могут разместиться в четырехместном купе?

Решение.

$n = 4$, $r = 4$, *порядок важен (места в купе различны), нужно выбрать все объекты, повторений нет.*

Нужна формула: Перестановки $P_n = n!$

Значит, число различных размещений 4 человек в четырехместном купе – это число всех перестановок из 4 элементов:

$$N = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ способа.}$$

Ответ: 24.

**В ходе урока найти и записать в тетради
ответы на следующие вопросы:**

1. Формула Бернулли.
2. Определение случайной величины.
3. Определение математического ожидания.
Формула.
4. Определение дисперсии. Формула.



Независимые испытания. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется *схемой повторных независимых испытаний* или *схемой Бернулли*.

Независимые испытания. Формула Бернулли

Примеры повторных испытаний:

1) многократное извлечение из урны одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета кладется обратно в урну;



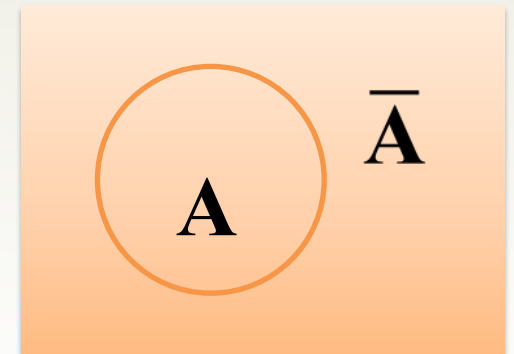
2) повторение одним стрелком выстрелов по одной и той же мишени при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле принимается одинаковой



Независимые испытания. Формула Бернулли

Пусть в результате испытания возможны два исхода: **либо** появится событие A , **либо** противоположное ему событие \bar{A} .

Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события A в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях).



Независимые испытания. Формула Бернулли

Сумма вероятностей всегда равна **1**.

Обозначим **вероятность появления события A** в единичном испытании буквой p , т.е. **$p=P(A)$** , а **вероятность противоположного события (событие A не наступило)** – буквой **$q=P(\bar{A})=1-p$** .

Тогда вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно k раз, выражается **формулой Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Распределение числа успехов (появлений события) носит название **биномиального распределения**.

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

вероятность появления события ровно k раз при n независимых испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании.

Примеры:

Пример 1. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Решение. Событие A – достали белый шар.

Тогда вероятности $\frac{20}{30}$, $\frac{10}{30}$,

По формуле Бернулли требуемая вероятность равна

$$C_4^2 \left(\frac{20}{30}\right)^2 \left(\frac{10}{30}\right)^2$$

Примеры:

Пример 2. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение.

Вероятность рождения девочки $\frac{1}{2}$, тогда $\frac{1}{2}$

Найдем вероятности того, что в семье нет девочек, родилась одна, две или три девочки:

$$\frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5}$$

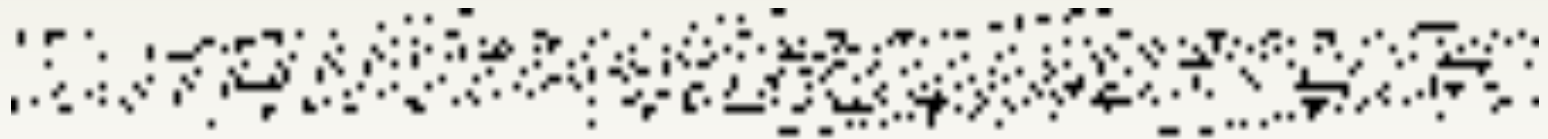
Следовательно, искомая вероятность

$$\frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{31}{32}$$

Примеры:

Пример 3. Среди деталей, обрабатываемых рабочим, бывает в среднем 4% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 30 деталей две будут нестандартными.

Решение. Здесь опыт заключается в проверке каждой из 30 деталей на качество. Событие A - «появление нестандартной детали», его вероятность $p = 0,004$, тогда $q = 0,996$. Отсюда по формуле Бернулли находим



Примеры:

Пример 4. При каждом отдельном выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,9. Найти вероятность того, что из 20 выстрелов число удачных будет не менее 16 и не более 19.

Решение. Вычисляем по формуле Бернулли:

$$P(16 \leq X \leq 19) = P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19) = \binom{20}{16} 0,9^{16} 0,1^4 + \binom{20}{17} 0,9^{17} 0,1^3 + \binom{20}{18} 0,9^{18} 0,1^2 + \binom{20}{19} 0,9^{19} 0,1 = 0,000155 + 0,000775 + 0,003101 + 0,001220 = 0,005251$$

Наивероятнейшее число успехов

Биномиальное распределение (распределение по схеме Бернулли) позволяет, в частности, установить, какое число появлений события A наиболее вероятно. Формула для наиболее вероятного числа успехов (появлений события) имеет вид:

$$k = \lfloor np + q \rfloor \text{ или } k = \lfloor np \rfloor$$

Так как $\lfloor np + q \rfloor - \lfloor np \rfloor = 1$, то эти границы отличаются на 1.

Поэтому k являющееся целым числом, может принимать либо одно значение, когда np целое число ($k=np$), то есть когда $np+q$ (а отсюда и $np-q$) нецелое число, либо два значения, когда $np-q$ целое число

Пример. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстро движущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение. Здесь $n = 50$, $p = 0,9$, $q = 1 - p = 0,1$. Поэтому имеем неравенства:

$$50 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k \leq 50 \cdot 0,9 + 0,9,$$

$$44,9 \leq k \leq 45,9.$$

Следовательно, $k = 45$.

Пример. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность попадания в отдельном выстреле составляет 0,7?

Решение. Здесь $k = 16$, $p = 0,7$, $q = 0,3$.

Составляем неравенства

$$0,7n - 0,3 \leq 16 \leq 0,7n + 0,7,$$

откуда

$$0,7n \leq 16,3, n \leq 23\frac{2}{7} \text{ и } 0,7n \geq 15,3, n \geq 21\frac{6}{7}$$

Таким образом, число всех выстрелов здесь может быть 22 или 23.

Случайные величины

Случайной **величиной** называют любую числовую величину, связанную со случайным экспериментом.

Случайной она называется потому, что до эксперимента невозможно точно предсказать то значение, которое эта величина примет в результате эксперимента - это выясняется только тогда, когда эксперимент завершен.

Случайной выборкой называют множество случайно выбранных объектов генеральной совокупности.

Поскольку каждый такой объект описывается обычно набором числовых характеристик, то выборка предстает перед нами в виде одного или нескольких числовых рядов.

Располагая понятием случайной величины, мы можем рассматривать случайную выборку как **последовательность наблюдений за одной или несколькими случайными величинами.**

Таким образом, **случайная величина** представляет собой функцию, определенную на множестве всех возможных исходов опыта: областью определения этой функции является множество всех возможных исходов W , а значениями - числа (целые или действительные).

Случайные величины

Ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	x_n
p_i	p_1	p_2	p_n

Сумма вероятностей
всегда равна **1**.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Для введения дисперсии можно привести следующий **пример**.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайно величины вокруг ее среднего значения.

Например, в **артиллерии** важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена. Именно такие задачи решает дисперсия.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания.

Математическое ожидание случайной величины

Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

вероятность появления события ровно k раз при n независимых испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании.

Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим случайную величину X . Ее математическое ожидание обычно обозначают $E(X)$.

Пусть распределение вероятностей случайной величины X задано таблицей:

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины X называют число

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание $E(X)$ называют также *ожидаемым значением* случайной величины X , *средним значением* случайной величины X .

Если значения случайной величины измеряются в каких-либо единицах (например, рост — в сантиметрах, температура — в градусах), то ее математическое ожидание измеряется в этих же единицах (средний рост — в сантиметрах, средняя температура — в градусах).

Математическое ожидание случайной величины

Пример. Возьмем в качестве случайной величины X число очков, выпавших на одной игральной кости. Вероятности выпадения каждой грани одинаковы и равны $\frac{1}{6}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5. \end{aligned}$$

Этот пример показывает, что если все значения случайной величины равновероятны, то математическое ожидание — это просто среднее арифметическое значений.

Дисперсия случайной величины

$$D(X) = M\left(\left[X - M(X)\right]^2\right) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i\right)^2$$

Распределения случайных величин

- **Биномиальное распределение (дискретное)**

X - количество «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» в каждом из них равна $p \cdot q = 1 - p$.

Закон распределения X имеет вид:

x_k	0	1	k	n
P_k	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$		$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$		p^n

Здесь вероятности находятся по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Характеристики: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$

Задание на самоподготовку:

п. 49-52,
стр. 192 № 2, 3, 4



Ссылки:

1. <http://www.matburo.ru/>
2. http://www.zhaba.ru/site_data/10667/objects_images/c/8/d/original/c8de6924b2c95f28b69b8532abd50a5e_57512.jpg
3. http://legalpaper.com.ua/wp-content/uploads/2012/09/klipart_chelovek_kniga_ogromnyy_chtenie_znanie_19519_1280x1024.jpg
4. http://nevseboi.com.ua/uploads/posts/2010-03/thumbs/1267705874_3d-humans-3.jpg
5. 11 класс. МКОУ «Усть-Мосихинская СОШ». Новосёлова Е.А.
6. Шабалина Надежда Ивановна chabalina7@mail.ru

