

Математические
аспекты КГ.

Аффинная и

перспективная

геометрия

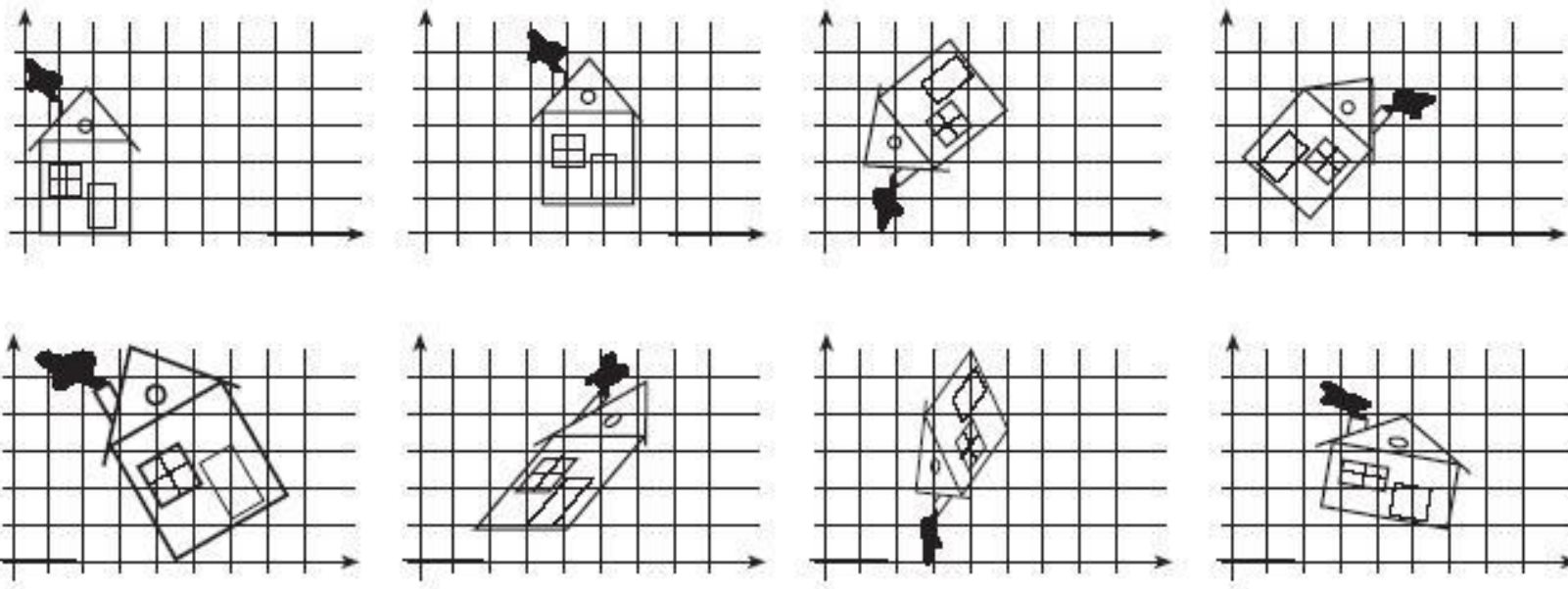
Аффинные преобразования

Преобразование плоскости называется **аффинным**, если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая. Преобразование называется **взаимно однозначным**, если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.

Движения — это такие преобразования, которые сохраняют расстояние между любыми двумя точками неизменным, а именно параллельные переносы, повороты, различные симметрии и их комбинации.

Аффинные преобразования

Множество движений есть подмножество множества аффинных преобразований.



Аффинные преобразования

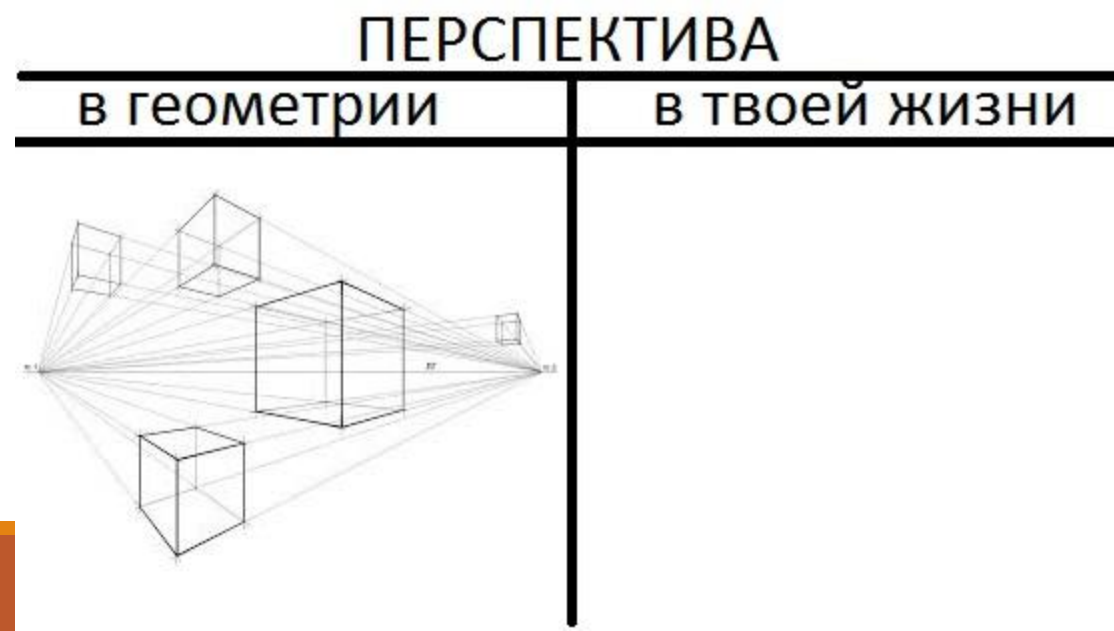
Аффинное преобразование является комбинацией линейных преобразований, сопровождаемых переносом изображений.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

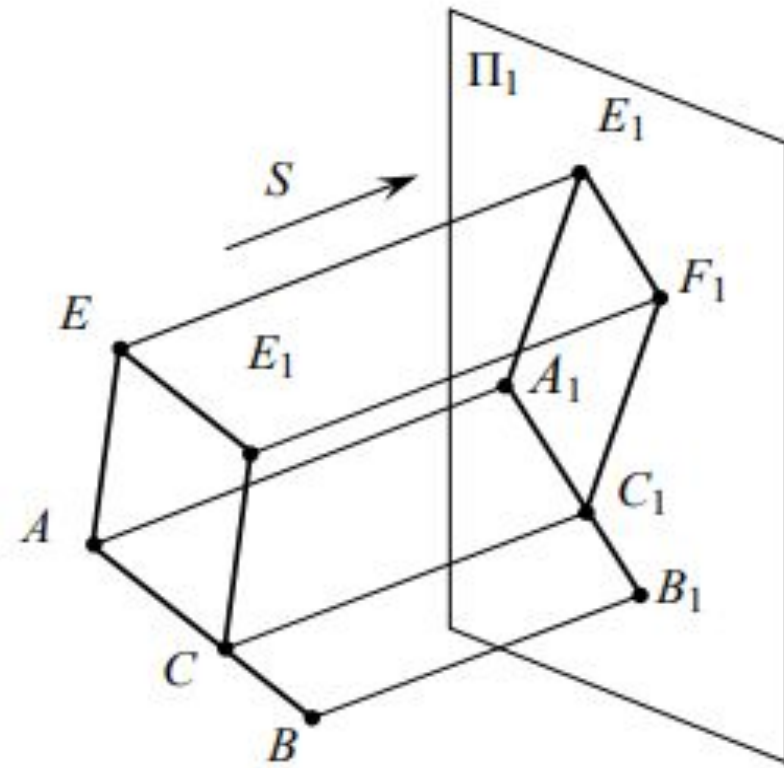
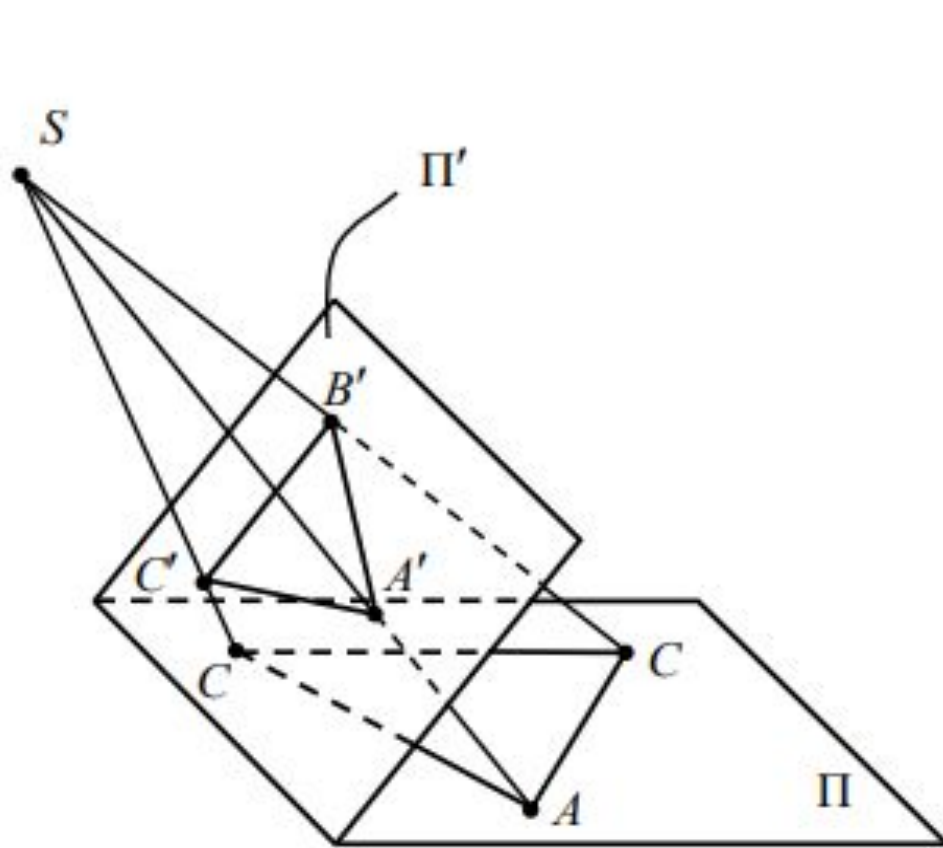
Перспективные преобразования

В перспективной геометрии нет двух линий, параллельных друг другу.

Перспективное преобразование имеет место в случае, когда последний столбец обобщенной матрицы преобразования 4×4 ненулевой.



Проецирование: центральное и параллельное





Ортогографические проекции

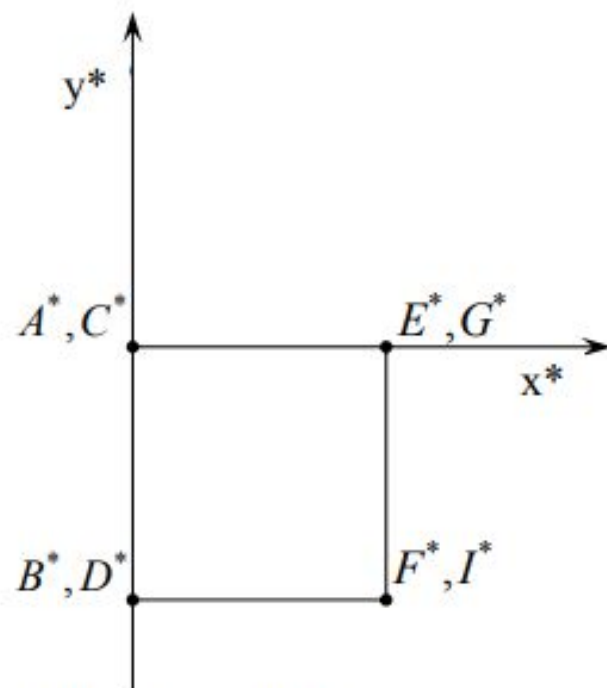
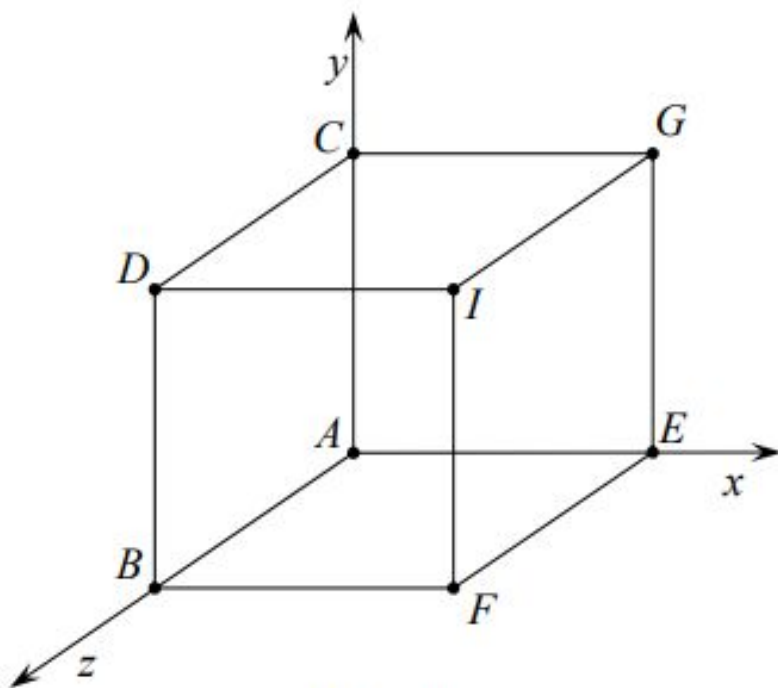
$$T_{\text{опт}}(x=0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\text{опт}}(y=0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\text{опт}}(z=0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\text{опт}}(z=n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix}$$

Ортографические проекции



$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \\ G^* \\ I^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АксонOMETрические проекции

АксонOMETрическая проекция получается с помощью аффинного преобразования, определитель которого равен нулю.

- изометрия – в плоскости проекции углы между каждой парой осей равны
- диметрия – в плоскости проекции равны между собой два угла между осями
- триметрия – в плоскости проекции все три угла между осями различны.

АксонOMETрические проекции: пример 0

$$[XYZH] = [xyz 1] \times \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & -\sin\Phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [xyz 1] \begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \sin\theta & -\sin\Phi \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\Phi & -\cos\Phi \sin\theta & \cos\Phi \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Единичный вектор оси X, равный [1 0 0 1], преобразуется к

$$[\overline{X} \overline{Y} \overline{Z} \overline{H}] = [\cos\Phi \quad \sin\Phi \sin\theta \quad -\sin\Phi \cos\theta \quad 1]$$

Единичный начальный вектор оси X будет иметь

$$\sqrt{x^{*2} + y^{*2}} = \sqrt{\cos^2 \Phi + (\sin \Phi \sin \theta)^2}$$

АксонOMETрические проекции: пример 0

Для единичного вектора по оси Y [0 1 0 1]

$$[XYZH] = [0 \quad \cos\theta \quad \sin\theta \quad 1] \quad \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|$$

Для того чтобы создать диметрическую проекцию, значения двух преобразованных единичных векторов сокращают в равное число раз.

$$\cos^2\Phi + \sin^2\Phi \sin^2\theta = \cos^2\theta \quad \sin^2\Phi = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$$

Если выбранное значение угла Φ удовлетворяет уравнению, с помощью матрицы выполняют **диметрическое** проецирование.

АксонOMETрические проекции: пример 1

Для изометрического преобразования нужно в одинаковое число раз сократить все три оси. Для этого необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \Phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \Phi = \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$



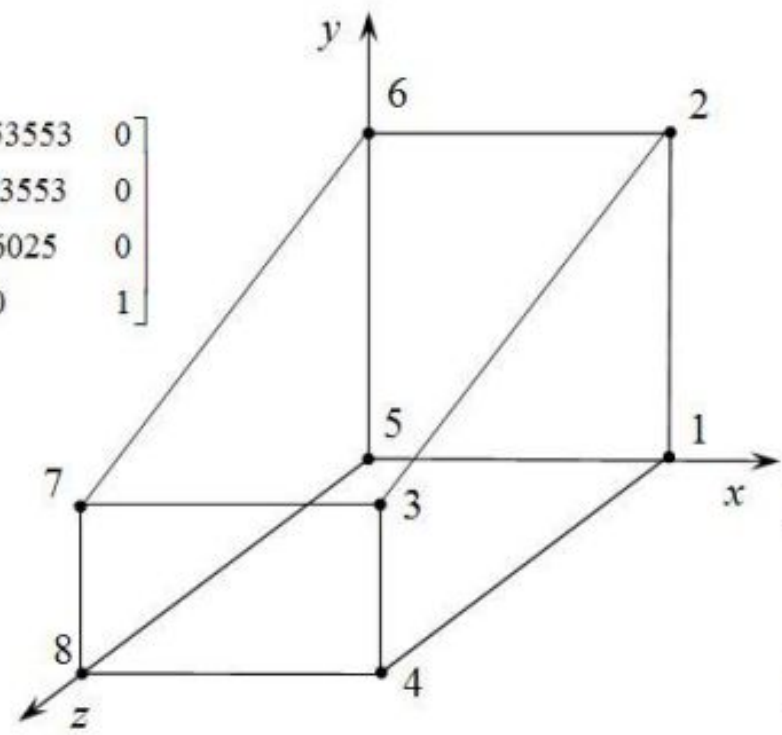
АксонOMETрические проекции: пример 1

Угол, который проекционная ось X составляет с горизонталью, определяется соотношением

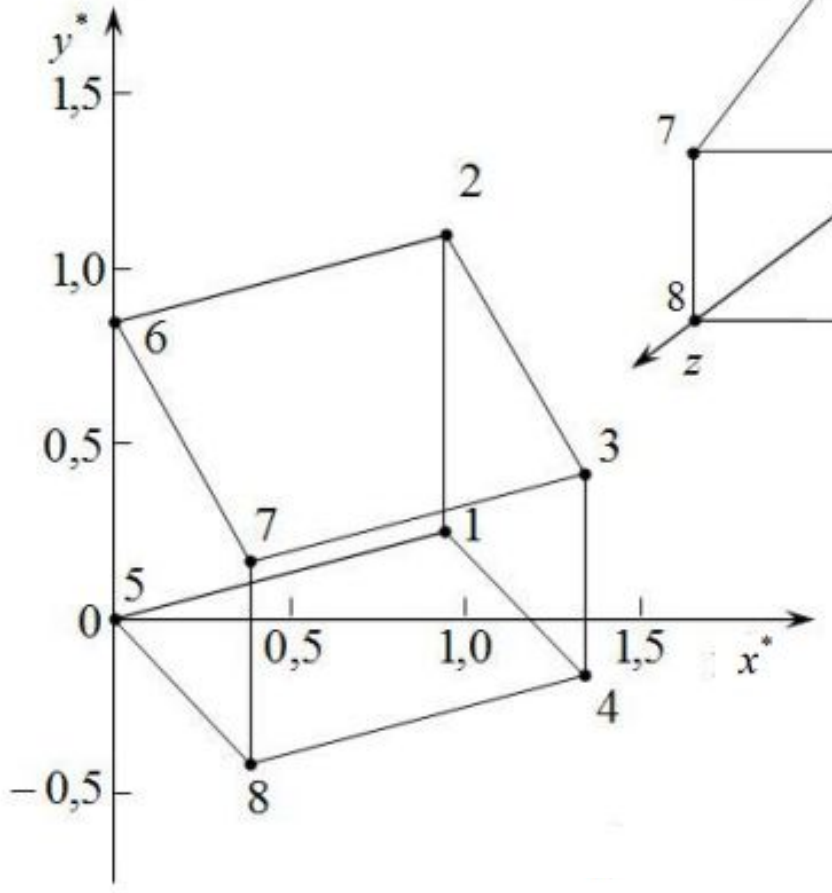
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \Theta \sin \Phi}{\cos \Phi}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 30^\circ$$

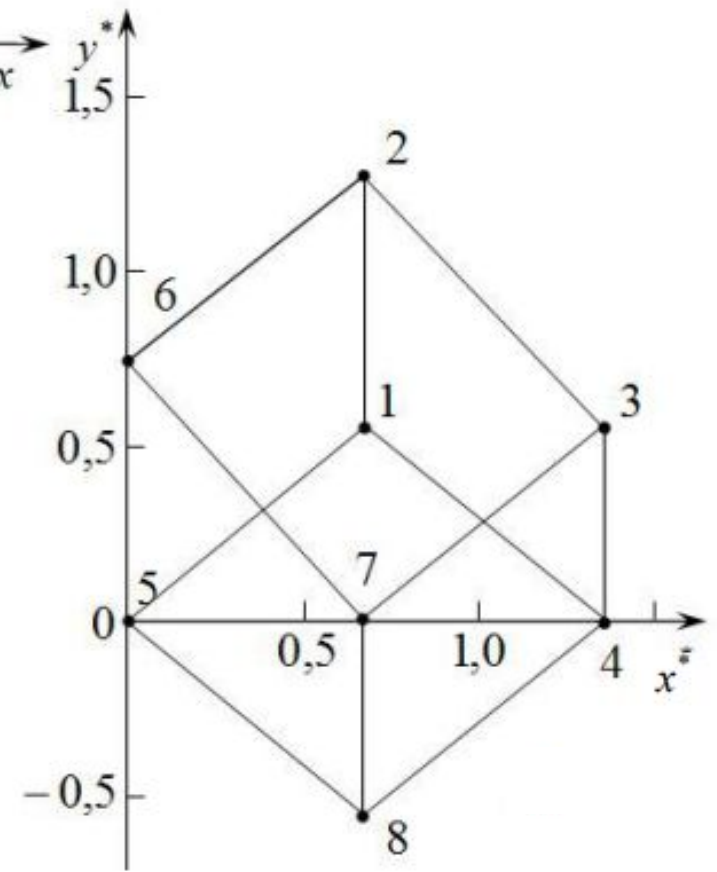
$$\begin{bmatrix} 0,925820 & 0,133631 & -0,353553 & 0 \\ 0 & 0,935414 & 0,3553553 & 0 \\ 0,377964 & -0,327321 & 0,866025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0,707107 & 0,133631 & -0,577353 & 0 \\ 0 & 0,816597 & 0,577345 & 0 \\ 0,707107 & -0,408248 & 0,577353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



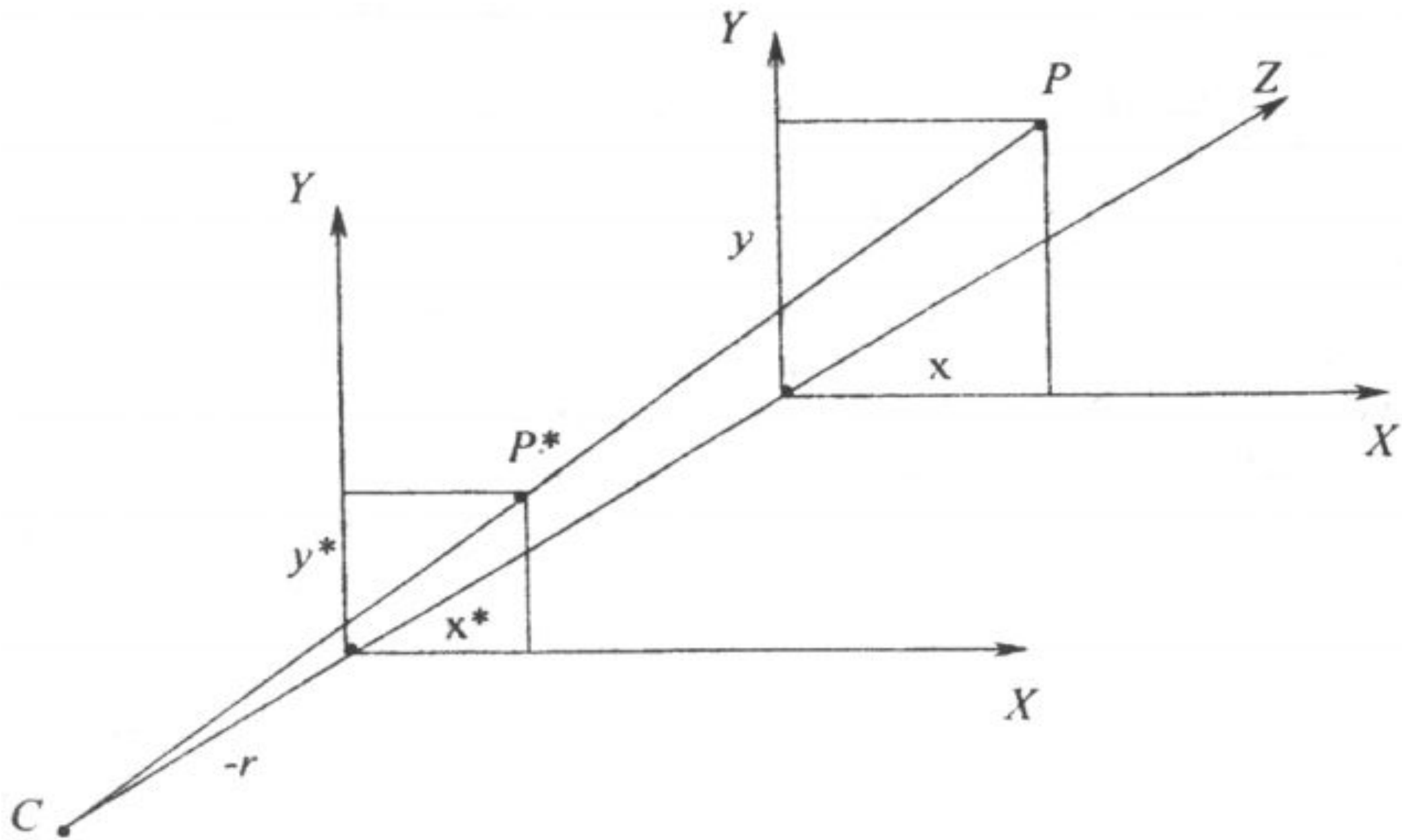
Перспективные преобразования

В матрице преобразования 4×4 ненулевые элементы в первых трех строках последнего столбца осуществляют перспективное преобразование.

$$[XYZH] = [xyz1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ 0 \ (rz+1)]$$

Для плоскости $z = 0$

$$x^* = \frac{X}{H} = \frac{x}{rz+1}; \quad y^* = \frac{Y}{H} = \frac{y}{rz+1}; \quad z^* = \frac{Z}{H} = \frac{0}{rz+1}$$



Перспективные преобразования

$$\frac{x^*}{k} = \frac{x}{z+k}, \quad x^* = \frac{x}{\frac{z}{k}+1} \qquad y^* = \frac{y}{\frac{z}{k}+1}$$

При $z = 0$ $x^* = x$ и $y^* = y$. Вследствие этого преобразования точки, расположенные в плоскости наблюдения $z = 0$, при перспективном проецировании не изменяются. Однако это справедливо только в том случае, когда однородная координата N является единичной и преобразования применяются к точке $[x \ y \ z \ 1]$.

Перспективные преобразования

Одноточечные(параллельные) перспективные

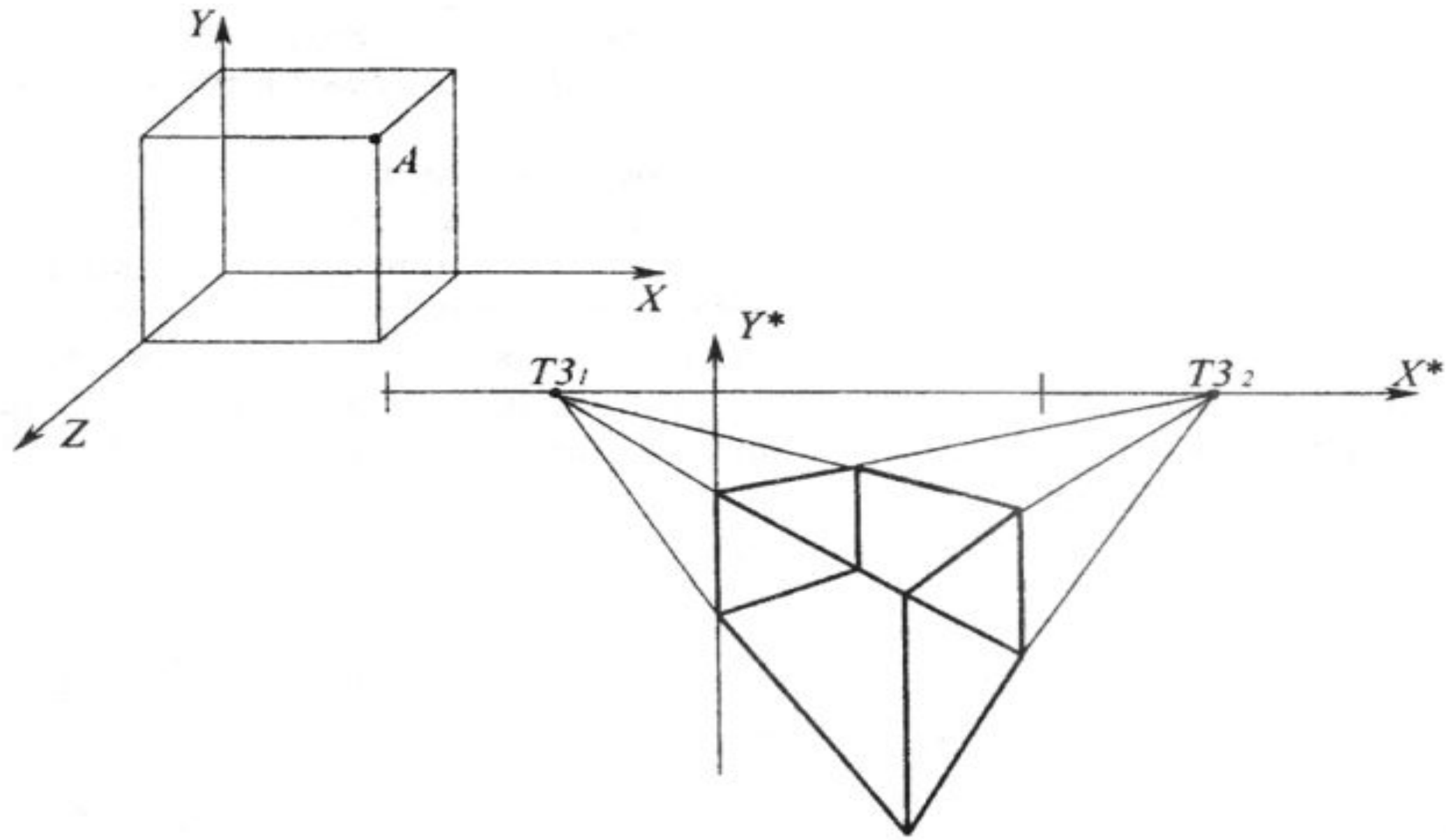
$$[XYZH]=[xyz1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ (rz+1)] \quad [XYZH]=[xyz1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ (qy+1)]$$

$$[XYZH]=[xyz1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ (px+1)]$$

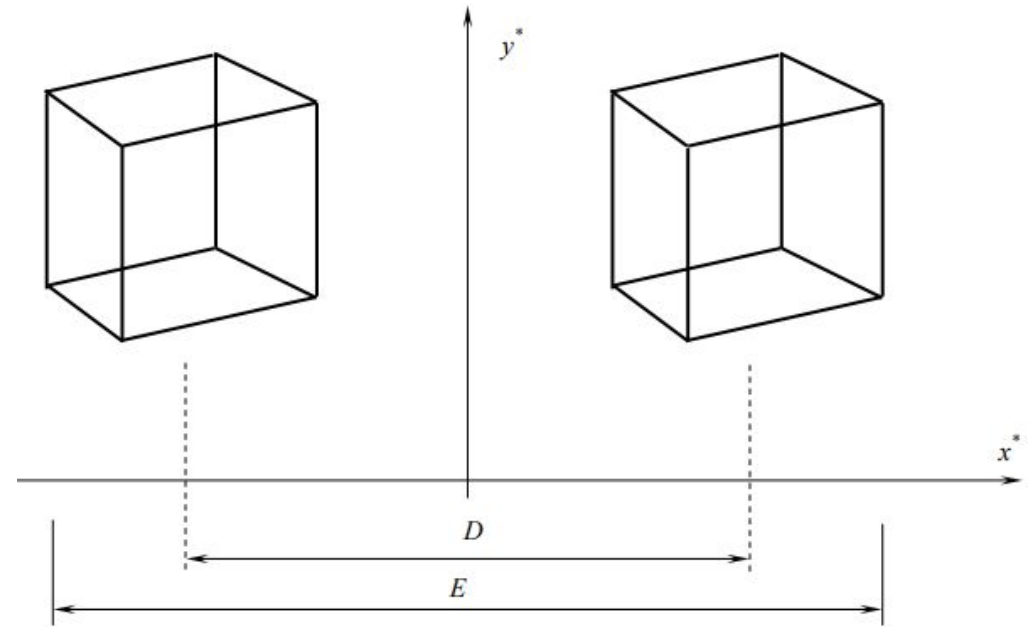
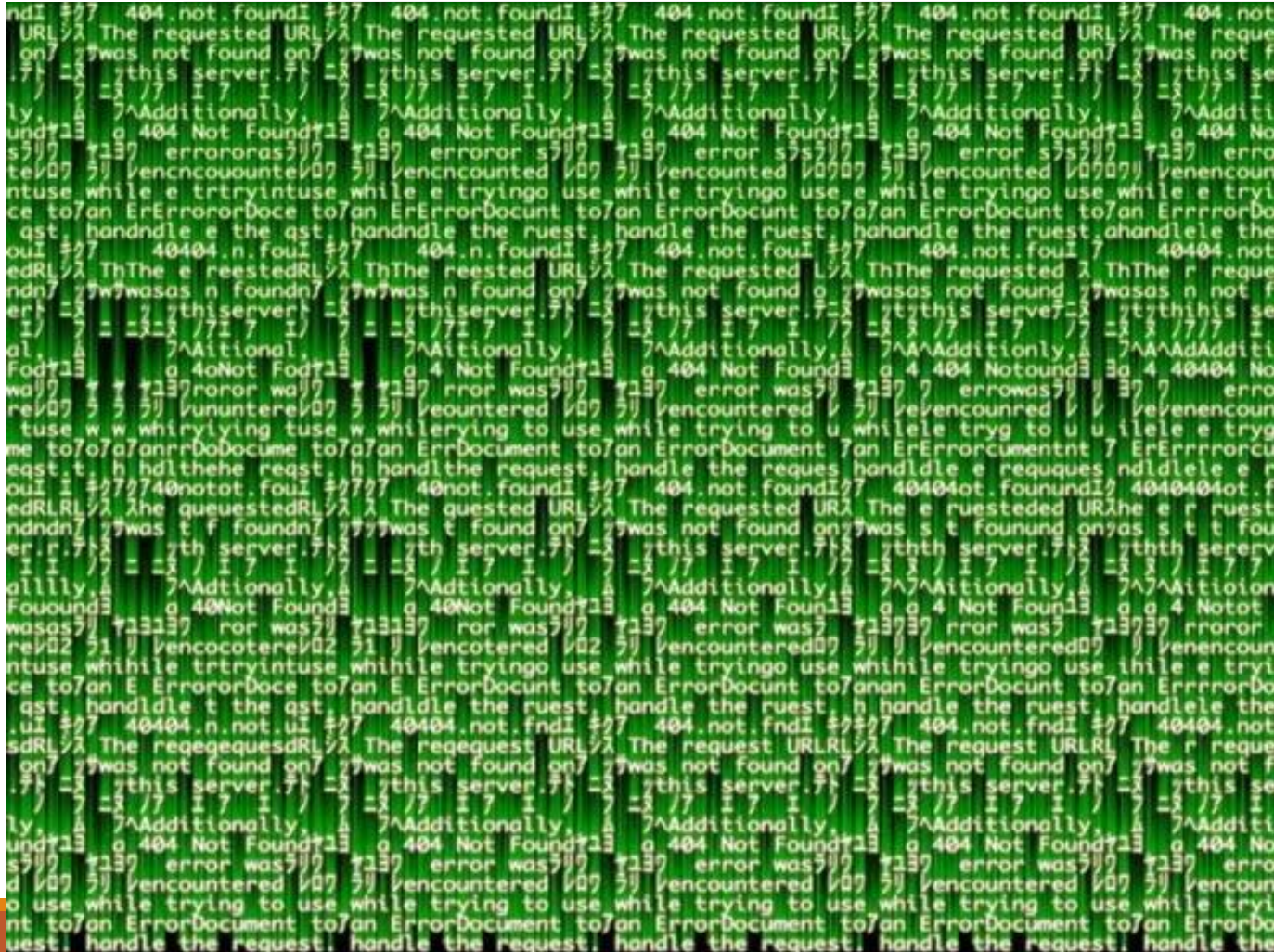
Точка схода перспективного преобразования – точка, через которую будут проходить изначально параллельные оси линии.

Перспективные преобразования: пример

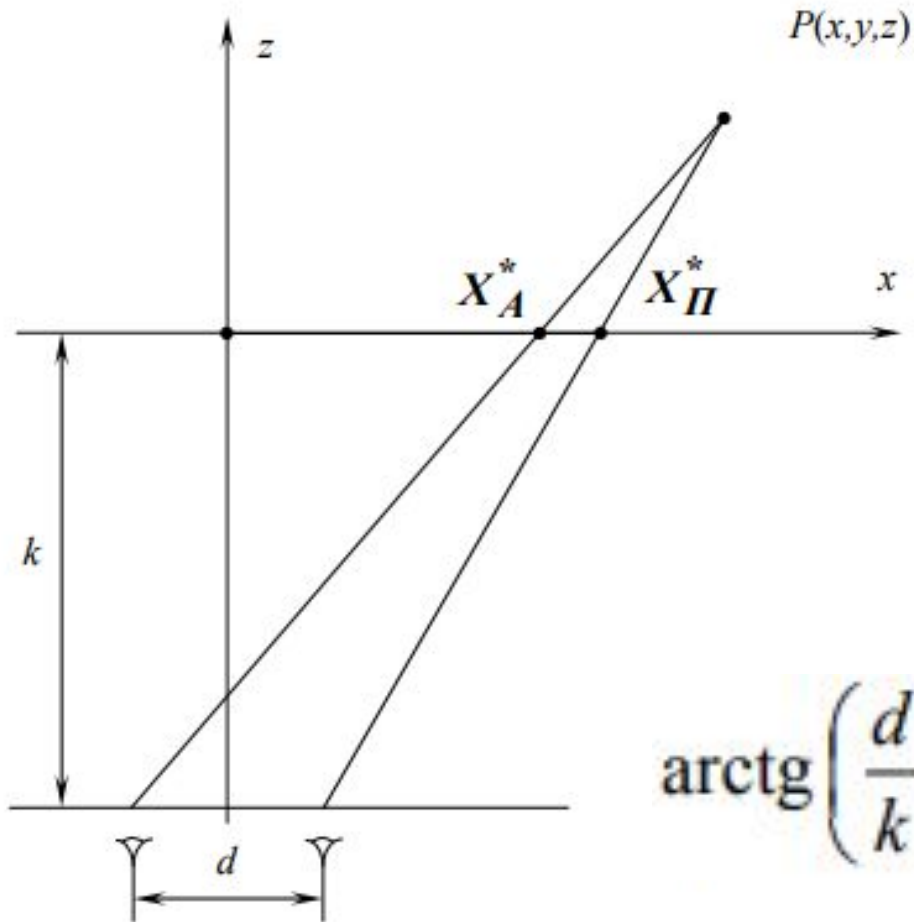
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\frac{\sin \theta}{k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{k} \\ 0 & m & 0 & \frac{n}{k} + 1 \end{bmatrix}.$$



Стереографические проекции



Стереοграфические проекции



Чтобы выдержать точное значение стереοугла, требуется величина $d=k/10$. При создании перспективного изображения для левого глаза требуется горизонтальное смещение объекта на $+d/2 = +k/20$, а для правого глаза необходимо горизонтальное смещение на $-d/2 = -k/20$.

$$\arctg\left(\frac{d}{k}\right) = 5,71^\circ$$

Стереοграфические проекции

левый глаз

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/k \\ k/20 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

правый глаз

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/k \\ -k/20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$