Математические аспекты КГ. Аффинная и перспективная геометрия

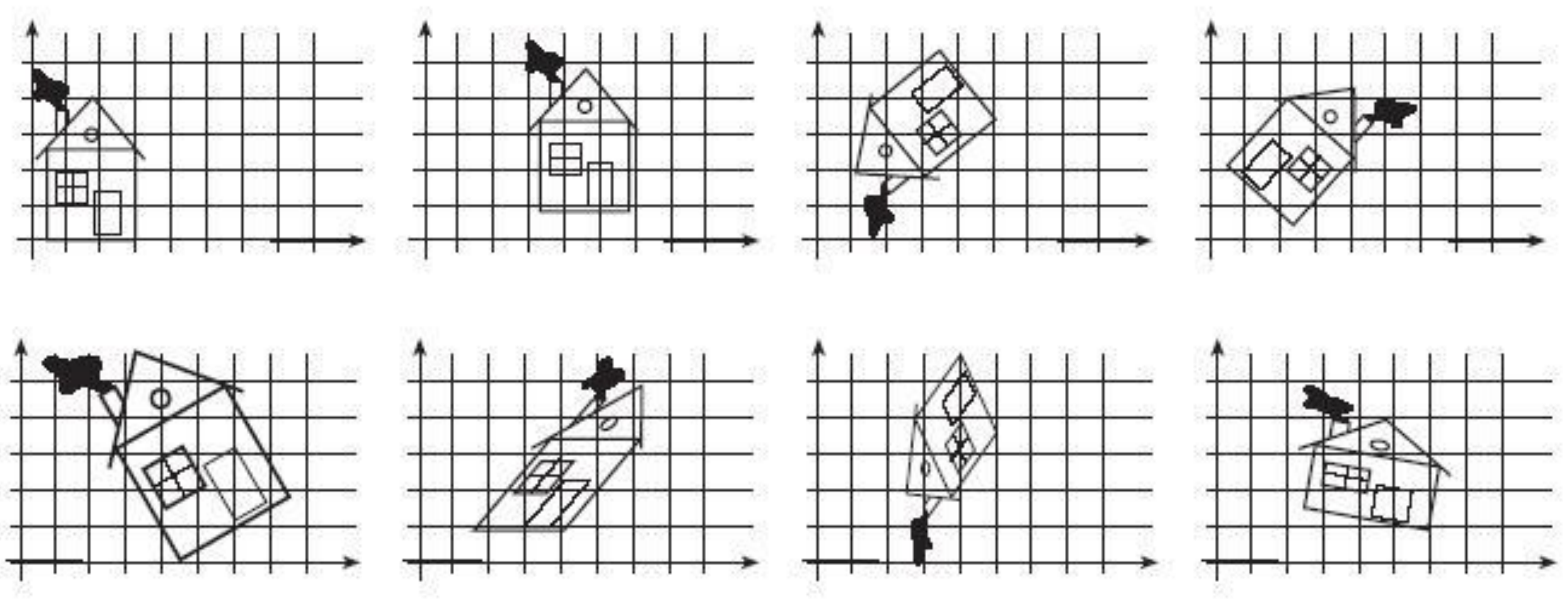
Аффинные преобразования

Преобразование плоскости называется **аффинным**, если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая. Преобразование называется **взаимно однозначным**, если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.

Движения — это такие преобразования, которые сохраняют расстояние между любыми двумя точками неизменным, а именно параллельные переносы, повороты, различные симметрии и их комбинации.

Аффинные преобразования

Множество движений есть подмножество множества аффинных преобразований.



Аффинные преобразования

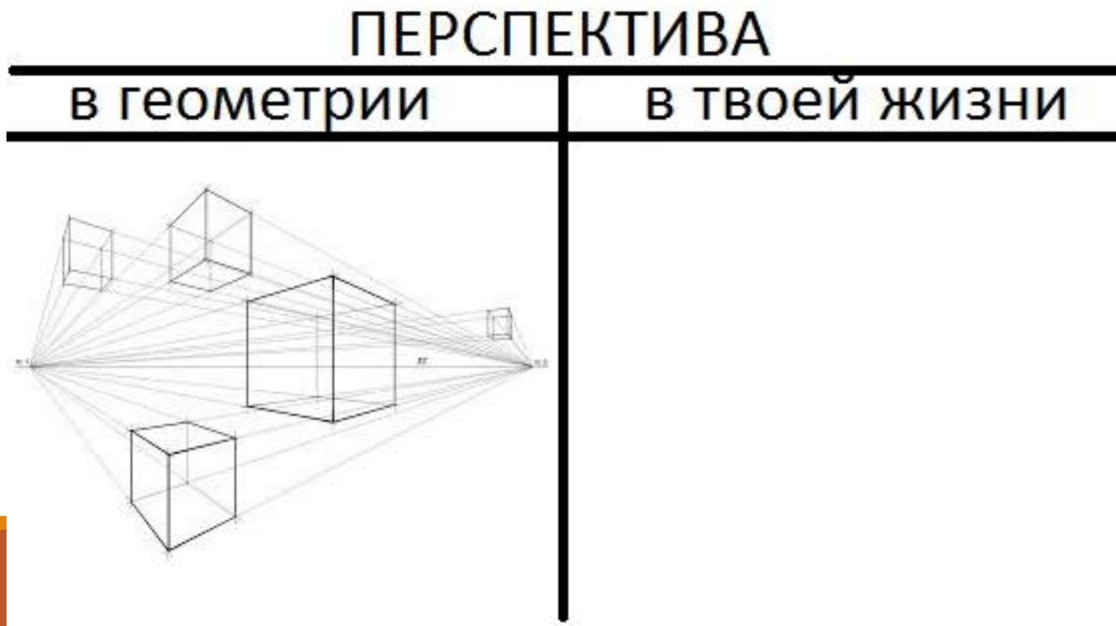
Аффинное преобразование является комбинацией линейных преобразований, сопровождаемых переносом изображений.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

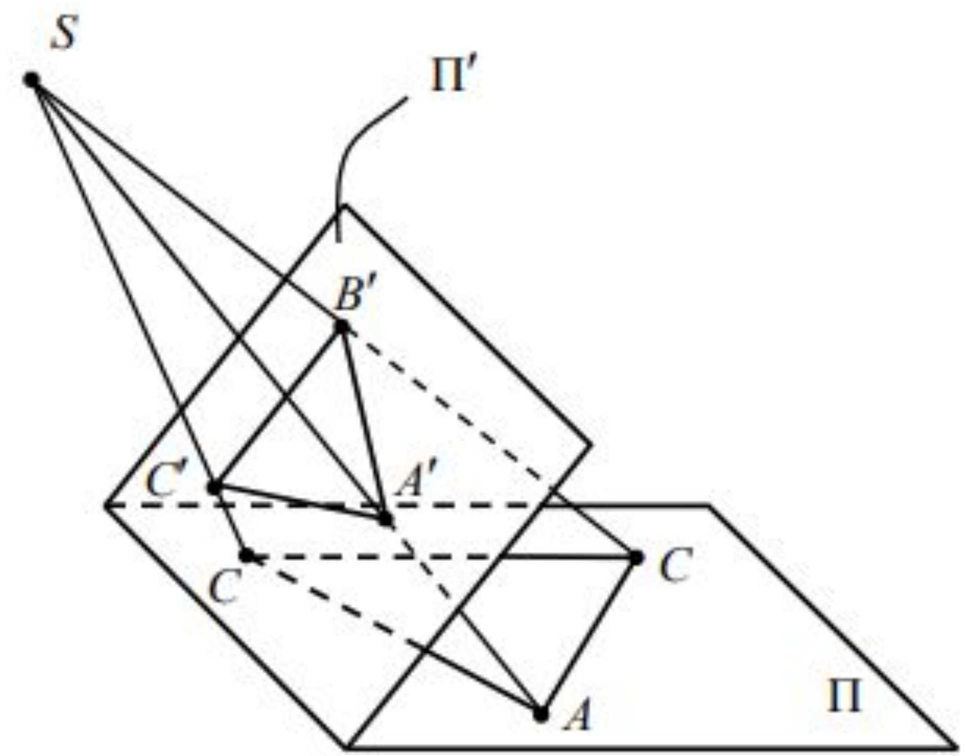
Перспективные преобразования

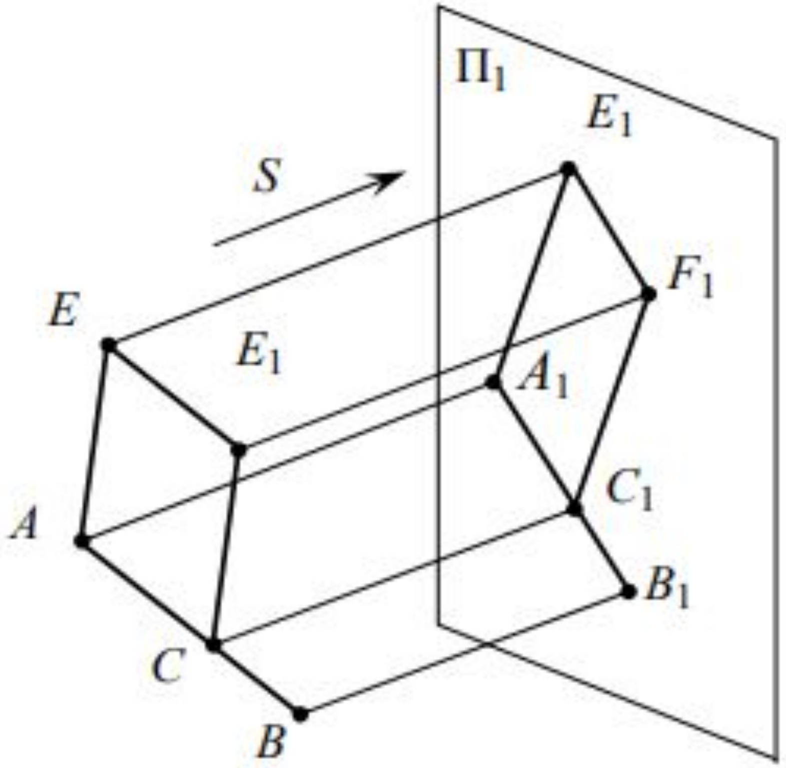
В перспективной геометрии нет двух линий, параллельных друг другу.

Перспективное преобразование имеет место в случае, когда последний столбец обобщенной матрицы преобразования 4×4 ненулевой.



Проецирование: центральное и параллельное





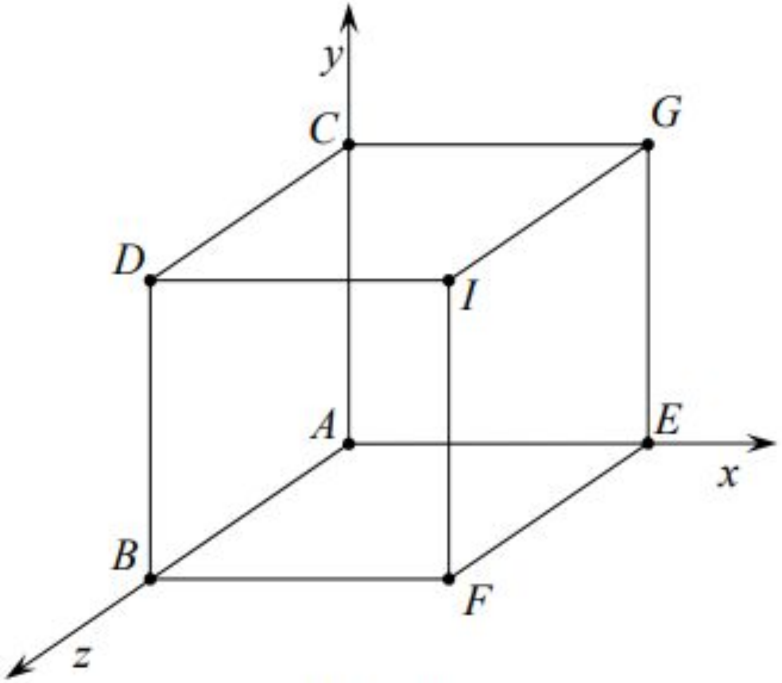

Проекции
Параллельные
Перспективные
Косоугольные
Ортогональные
Одноточечные
Двухточечные
Трехточечные
Проецирование на несколько плоскостей
Аксонометрические
Свободные
Кабинетные
Изометрия
Диметрия
Триметрия

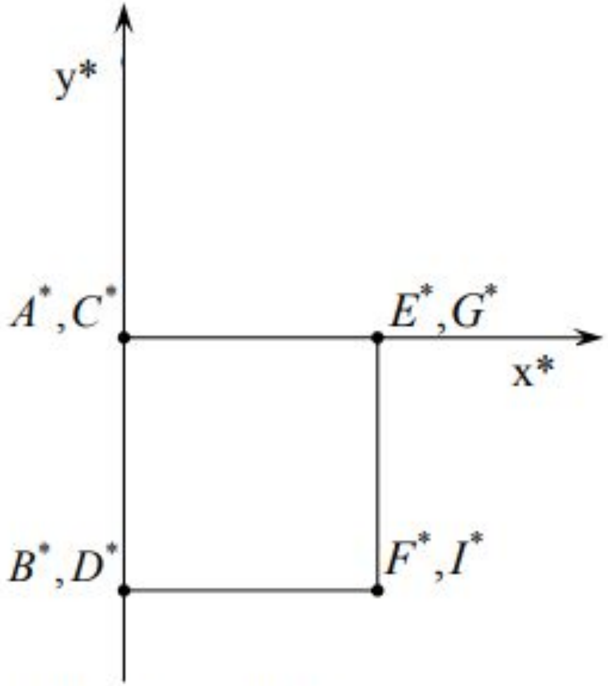
Ортографические проекции

$$T_{\text{орт}}(x=0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad T_{\text{орт}}(y=0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad T_{\text{орт}}(z=0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$T_{\text{орт}}(z=n)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&n&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&n&1\end{bmatrix}.$$

Ортографические проекции





$$
\begin{array}{c}
A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\I
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
A^*\\B^*\\C^*\\D^*\\E^*\\F^*\\G^*\\I^*
\end{array}
$$

Аксонометрические проекции

Аксонометрическая проекция получается с помощью аффинного преобразования, определитель которого равен нулю.

- изометрия – в плоскости проекции углы между каждой парой осей равны
- диметрия – в плоскости проекции равны между собой два угла между осями
- триметрия – в плоскости проекции все три угла между осями различны.

Аксонометрические проекции: пример 0

$$[X\,Y\,Z\,H]=[x\;y\;z\;1]\times\begin{bmatrix}\cos\Phi & 0 & -\sin\Phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=[x\;y\;z\;1]\begin{bmatrix}\cos\Phi & \sin\Phi\sin\theta & -\sin\Phi\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ \sin\Phi & -\cos\Phi\sin\theta & \cos\Phi\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Единичный вектор оси X, равный [1 0 0 1], преобразуется к виду

$$[X\,Y\,Z\,H]=[\cos\Phi \quad \sin\Phi\sin\theta \quad -\sin\Phi\cos\theta \quad 1]$$

Единичный начальный вектор оси X будет иметь длину

$$\sqrt{x^{*2}+y^{*2}}=\sqrt{\cos^2\Phi+(\sin\Phi\sin\theta)^2}$$

Аксонометрические проекции: пример 0

Для единичного вектора по оси Y [0 1 0 1]

$$[X\,Y\,Z\,H] = [0 \quad \cos\theta \quad \sin\theta \quad 1] \qquad \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|.$$

Для того чтобы создать диметрическую проекцию, значения двух преобразованных единичных векторов сокращают в равное число раз.

$$\cos^2\Phi + \sin^2\Phi \sin^2\theta = \cos^2\theta \qquad \sin^2\Phi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

Если выбранное значение угла Ф удовлетворяет уравнению, с помощью матрицы выполняют **диметрическое** проецирование.

Аксонометрические проекции: пример 1

Для изометрического преобразования нужно в одинаковое число раз сократить все три оси. Для этого необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\cos^2\Phi + \sin^2\Phi\sin^2\theta = \cos^2\theta \qquad \sin^2\Phi + \cos^2\Phi\sin^2\theta = \cos^2\theta.$$

$$\sin^2\Phi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} \qquad \sin^2\Phi = \frac{1-2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}.$$

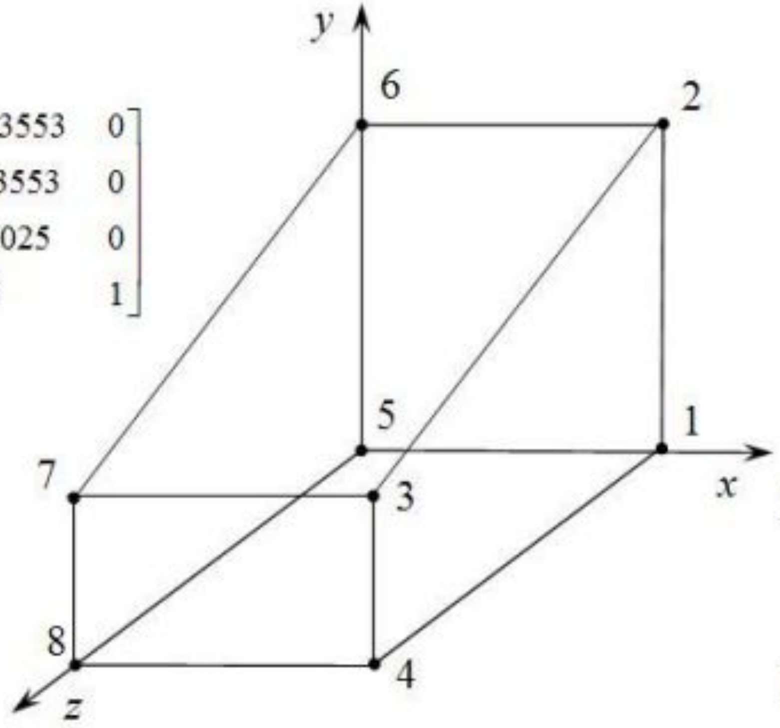
Аксонометрические проекции: пример 1

Угол, который проекционная ось X составляет с горизонталью, определяется соотношением

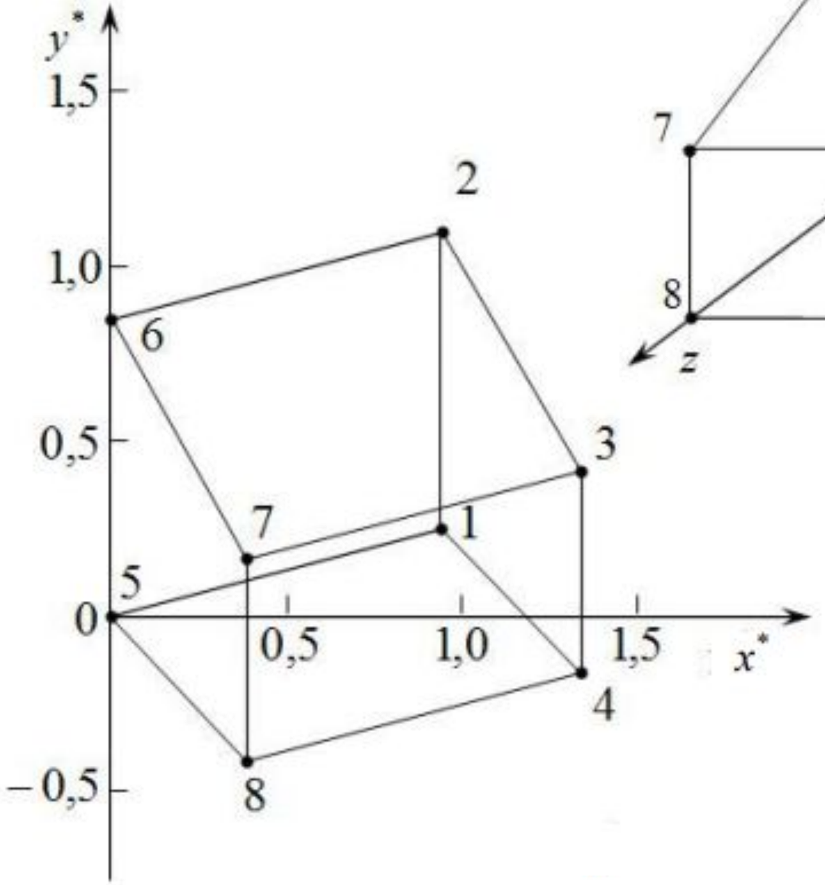
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\Theta \sin\Phi}{\cos\Phi}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^\circ$$

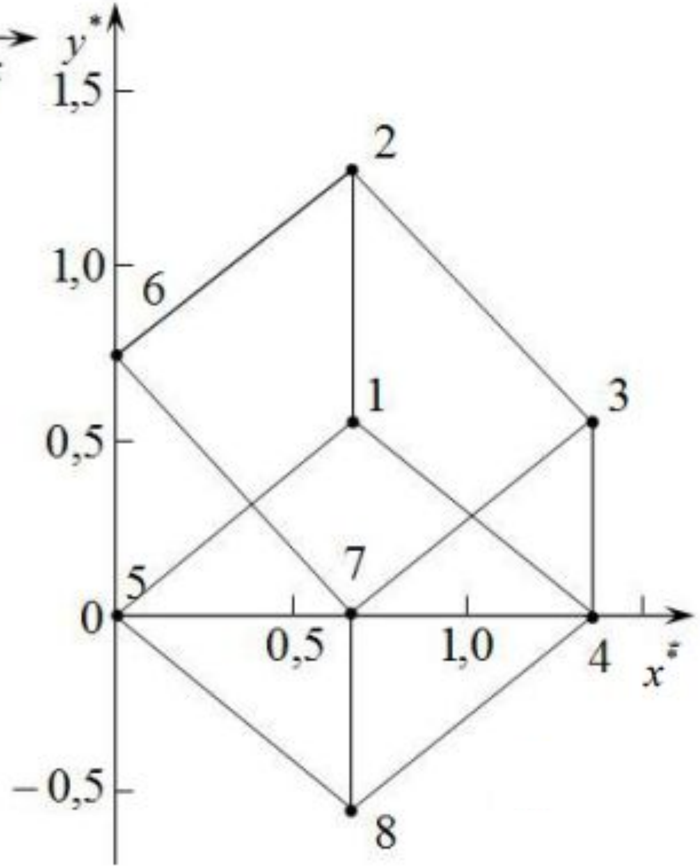
$$\begin{bmatrix} 0{,}925820 & 0{,}133631 & -0{,}353553 & 0 \\ 0 & 0{,}935414 & 0{,}3553553 & 0 \\ 0{,}377964 & -0{,}327321 & 0{,}866025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0{,}707107 & 0{,}133631 & -0{,}577353 & 0 \\ 0 & 0{,}816597 & 0{,}577345 & 0 \\ 0{,}707107 & -0{,}408248 & 0{,}577353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



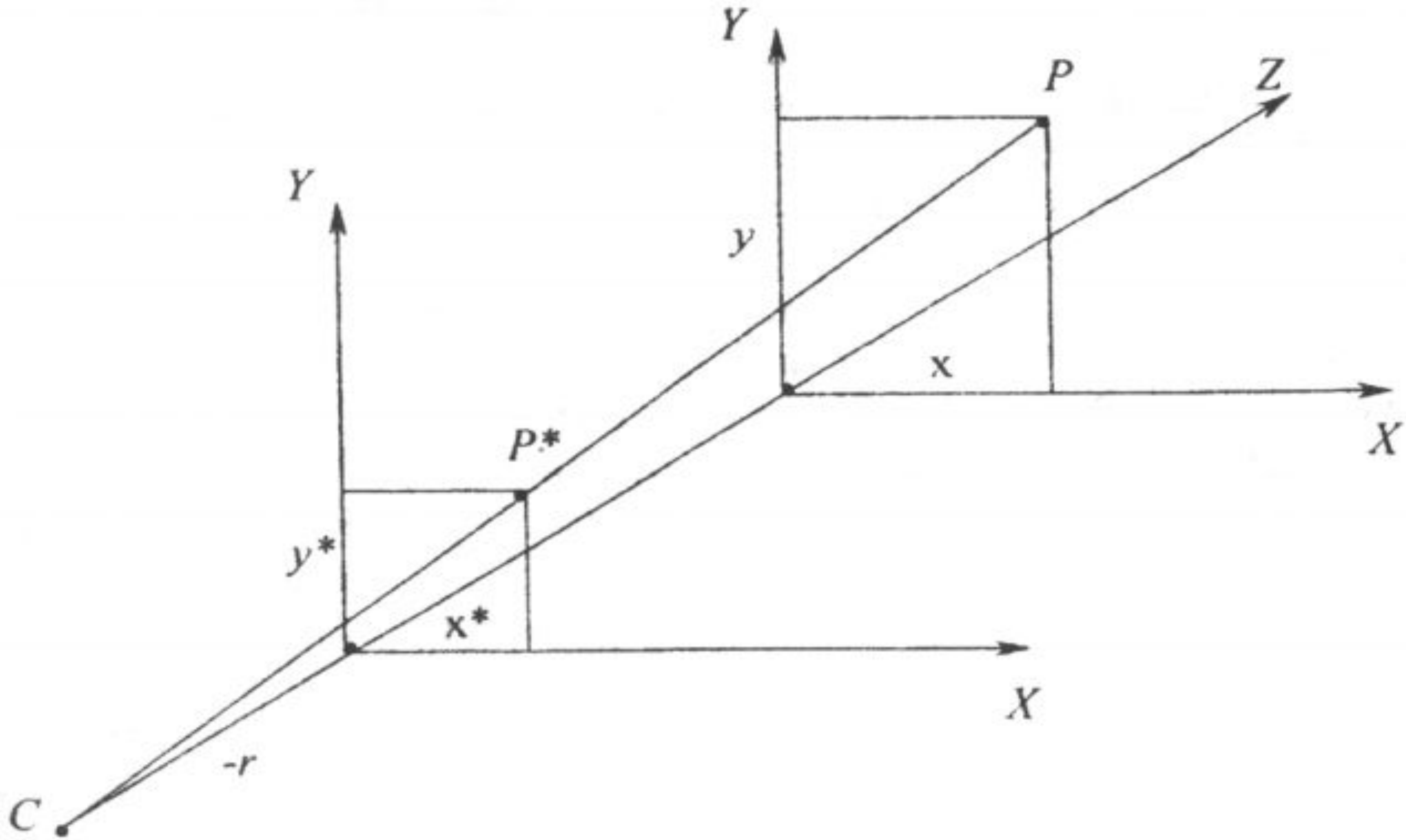
Перспективные преобразования

В матрице преобразования 4×4 ненулевые элементы в первых трех строках последнего столбца осуществляют перспективное преобразование.

$$[X\,Y\,Z\,H] = [x\,y\,z\,1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \;\; y \;\; 0 \;\; (rz+1)]$$

Для плоскости z = 0

$$x^* = \frac{X}{H} = \frac{x}{rz+1}; \quad y^* = \frac{Y}{H} = \frac{y}{rz+1}; \quad z^* = \frac{Z}{H} = \frac{0}{rz+1}$$



Y
P
Z
Y
y
x
P*
X
y*
x*
X
-r
C

Перспективные преобразования

$$\frac{x^*}{k} = \frac{x}{z+k}, \quad x^* = \frac{x}{\frac{z}{k}+1} \qquad y^* = \frac{y}{\frac{z}{k}+1}$$

При $z = 0$ $x^* = x$ и $y^* = y$. Вследствие этого преобразования точки, расположенные в плоскости наблюдения $z = 0$, при перспективном проецировании не изменяются. Однако это справедливо только в том случае, когда однородная координата H является единичной и преобразования применяются к точке $[x\ y\ z\ 1]$.

Перспективные преобразования

Одноточечные(параллельные) перспективные
преобразования

$$[X\,Y\,Z\,H]=[x\,y\,z\,1]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&r\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[x\;\;y\;\;z\;\;(rz+1)]$$

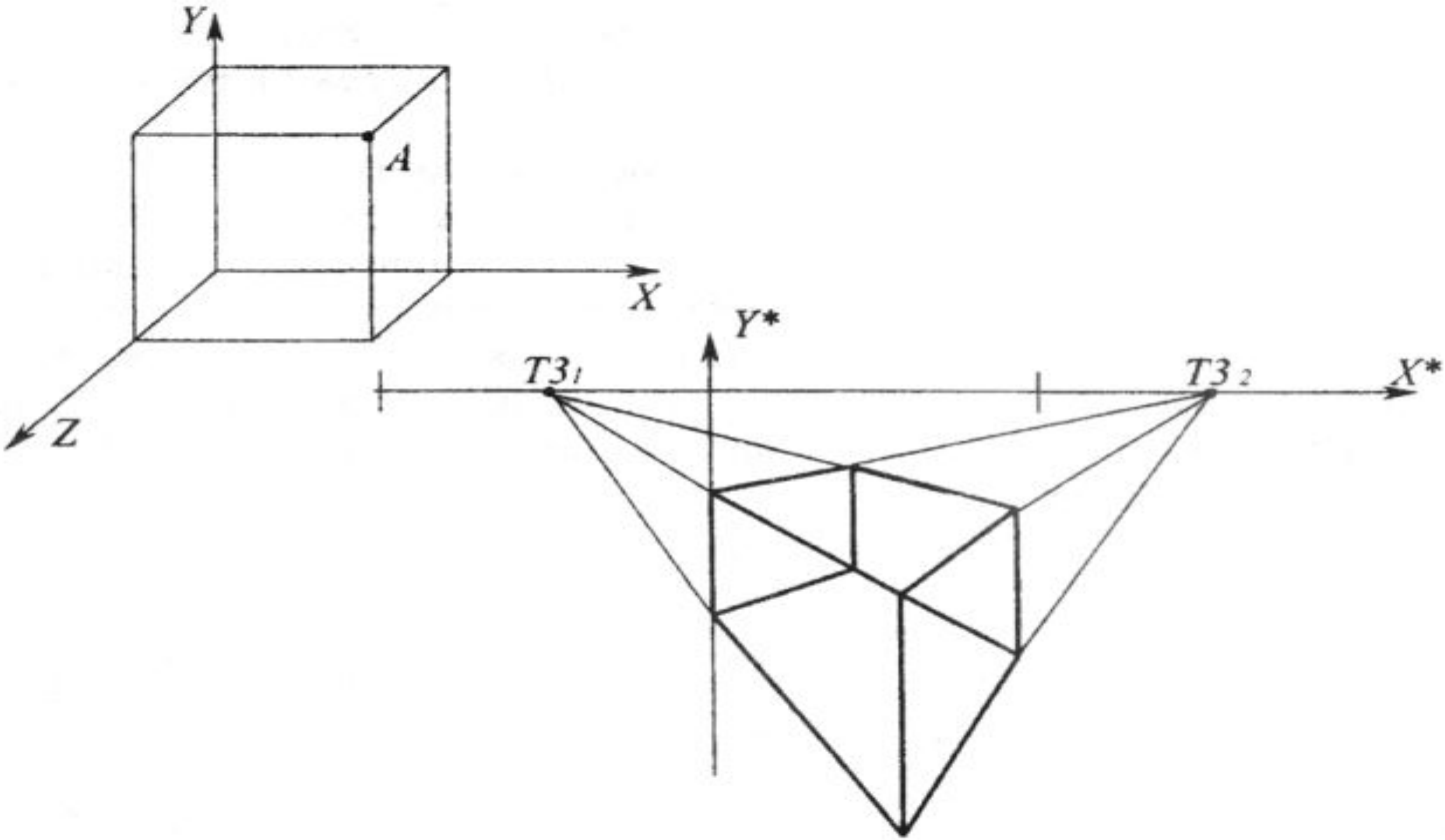
$$[X\,Y\,Z\,H]=[x\,y\,z\,1]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&q\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[x\;\;y\;\;z\;\;(qy+1)]$$

$$[X\,Y\,Z\,H]=[x\,y\,z\,1]\begin{bmatrix}1&0&0&p\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[x\;\;y\;\;z\;\;(px+1)]$$

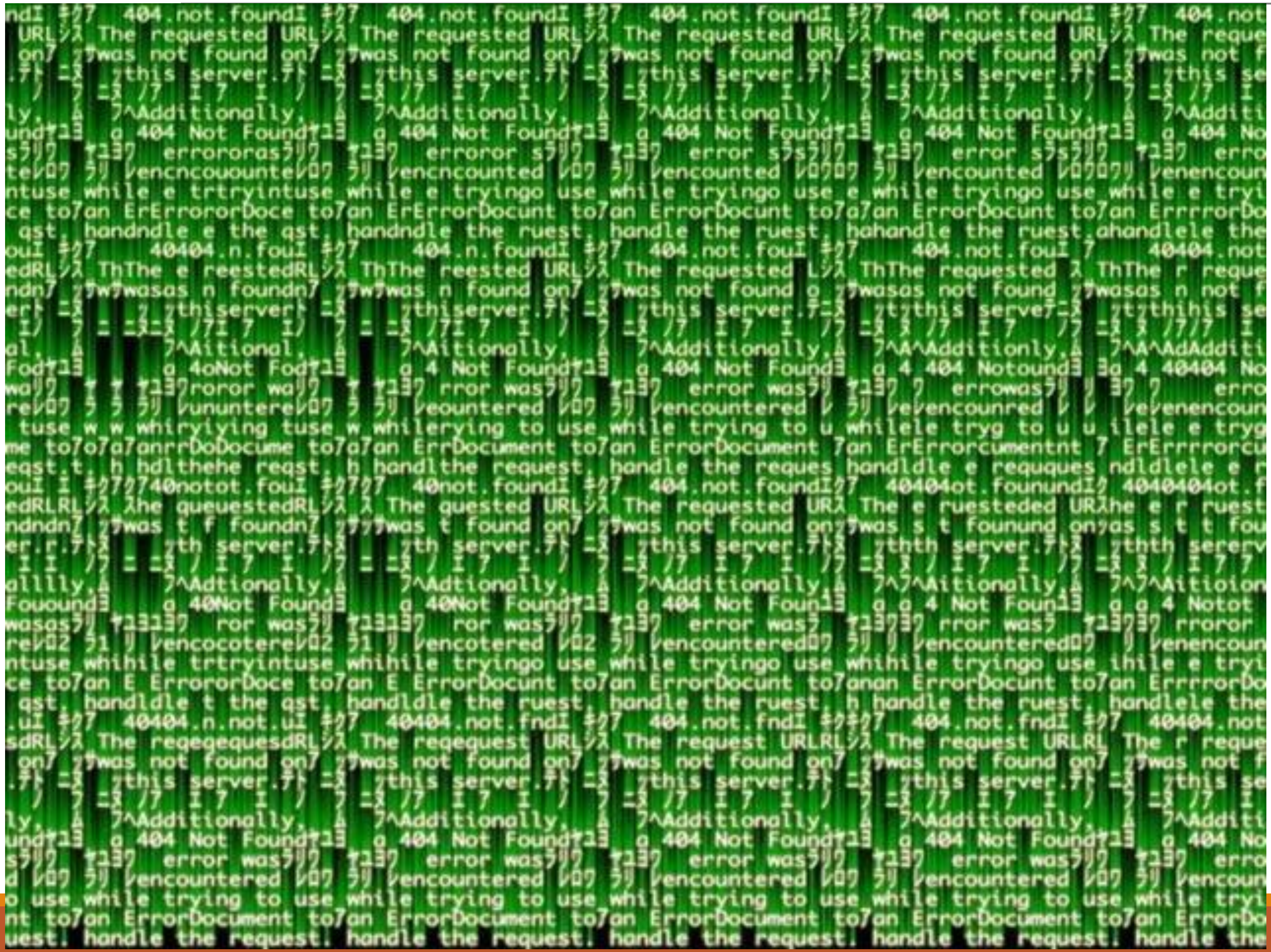
Точка схода перспективного преобразования – точка, через которую будут проходить изначально параллельные оси линии.

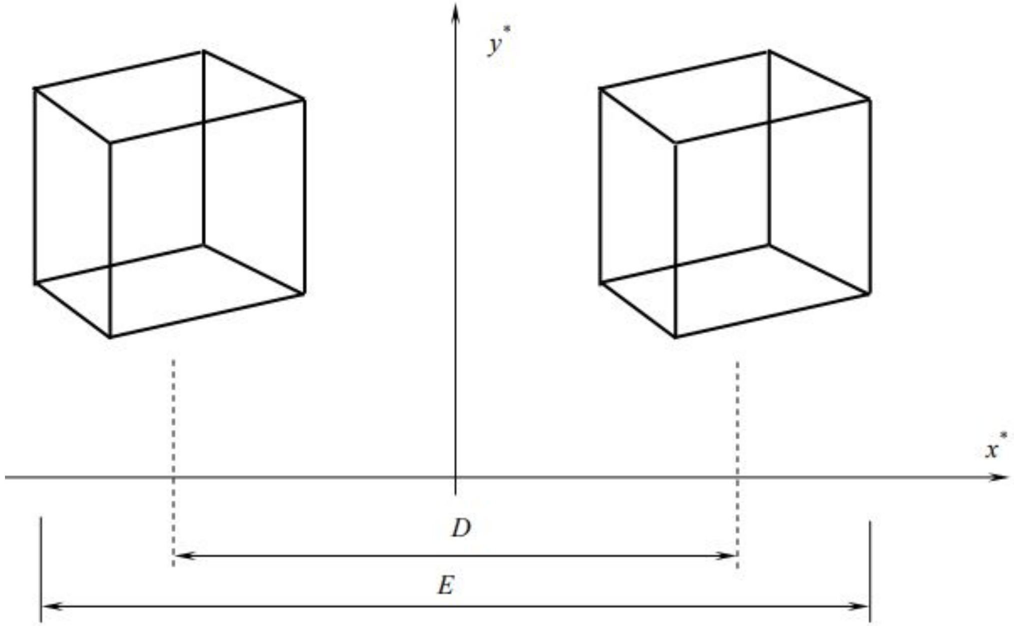
Перспективные преобразования: пример

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\frac{\sin\theta}{k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \frac{\cos\theta}{k} \\ 0 & m & 0 & \frac{n}{k}+1 \end{bmatrix}.$$

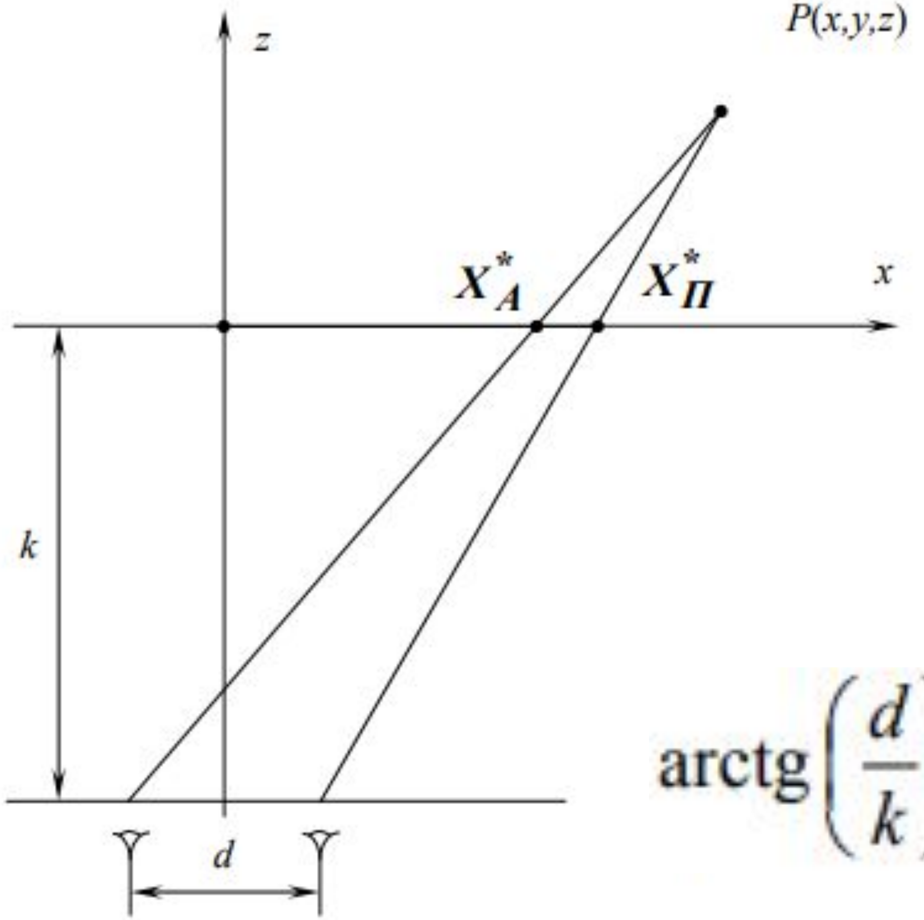

Y
A
X
Z
Y*
T3₁
T3₂
X*

Стереографические проекции





Стереографические проекции



$$\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{k}\right) = 5,71°$$

Чтобы выдержать точное значение стереоугла, требуется величина d=k/10. При создании перспективного изображения для левого глаза требуется горизонтальное смещение объекта на +d/2 = +k/20, а для правого глаза необходимо горизонтальное смещение на –d/2 = –k/20.

Стереографические проекции

левый глаз

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/k \\ k/20 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

правый глаз

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/k \\ -k/20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$