

Производная и дифференциал.

Вычисление производной путем логарифмирования.

- Функцию вида $y = [u(x)]^{v(x)} = u^v$ называют **показательно-степенной** или **сложной показательной** функцией.

$$y = u^v$$

$$\ln y = \ln u^v$$

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

$$(\ln y)' = (v \cdot \ln u)'$$

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)'$$

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$$

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$$

1. Продифференцировать функцию: $y = x^x$

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y \cdot (1 + \ln x)$$

$$y' = x^x (1 + \ln x)$$

2. Продифференцировать функцию:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x \cdot (x^2 + 1)}{(x - 1)^2}}$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{\frac{x \cdot (x^2 + 1)}{(x - 1)^2}}$$

$$\ln y = \ln \left(\frac{x \cdot (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln \frac{x \cdot (x^2 + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \cdot [\ln x + \ln(x^2 + 1) - \ln(x-1)^2]$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \cdot [\ln x + \ln(x^2 + 1) - 2\ln(x-1)]$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{3} \cdot [\ln x + \ln(x^2 + 1) - 2\ln(x-1)] \right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} - \frac{2 \cdot (x-1)'}{x-1} \right]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2}{x-1} \right]$$

$$y' = \frac{1}{3} y \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2}{x-1} \right]$$

Ответ: $y' = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x \cdot (x^2 + 1)}{(x-1)^2}} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2}{x-1} \right]$

3. Продифференцировать функцию: $y = \log_{\sin x} \tan x$

$$(\sin x)^y = \tan x$$

$$\ln(\sin x)^y = \ln(\tan x)$$

$$y \cdot \ln(\sin x) = \ln(\tan x)$$

$$y = \frac{\ln(\tan x)}{\ln(\sin x)}$$

$$y' = \left[\frac{\ln(\tan x)}{\ln(\sin x)} \right]'$$

$$y' = \frac{(\ln \tan x)' \cdot \ln \sin x - \ln \tan x \cdot (\ln \sin x)'}{\ln^2 \sin x}$$

$$y' = \frac{\frac{(\tan x)'}{\tan x} \cdot \ln \sin x - \ln \tan x \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x}}{\ln^2 \sin x} =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \left(\frac{\ln \sin x}{\tan x \cdot \cos^2 x} - \frac{\cos x \cdot \ln \tan x}{\sin x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \left(\frac{\ln \sin x}{\sin x \cdot \cos x} - \frac{\cos x \cdot \ln \tan x}{\sin x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \frac{\ln \sin x - \cos^2 x \cdot \ln \tan x}{\sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \frac{\ln \sin x - \cos^2 x \cdot \ln \tan x}{\frac{1}{2} \sin 2x} =$$

$$= \frac{2 \cdot (\ln \sin x - \cos^2 x \cdot \ln \tan x)}{\sin 2x \cdot \ln^2 \sin x}$$

Производная неявной функции.

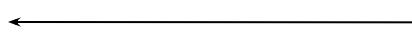
явная функция

$$y=f(x)$$

неявная функция

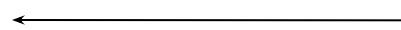
$$y-f(x)=0 \text{ или } F(x,y)=0$$

$$y = \frac{1}{x} + 1$$



$$xy - x - 1 = 0$$

$$y = x^2 + 2$$



$$y - x^2 = 2$$

$$xy^3 + x = \sin y$$

Пусть $xy - x - 1 = 0$

$$(xy - x - 1)' = 0'$$

$$x'y + xy' - x' - 1' = 0'$$

$$y + xy' - 1 = 0$$

$$xy' = 1 - y$$

$$y' = \frac{1 - y}{x}$$

$$y = \frac{1 + x}{x} = \frac{1}{x} + 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 1 \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{1-y}{x}$$

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 1 \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{x} + 1$$

$$y' = \frac{1-y}{x} = \frac{1 - \frac{1}{x} - 1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

4. Продифференцировать функцию: $xy^3 + x = \sin y$

$$(xy^3 + x)' = (\sin y)'$$

$$x' \cdot y^3 + x \cdot (y^3)' + x' = (\sin y)'$$

$$y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y' + 1 = y' \cdot \cos y$$

$$(3y^2x - \cos y) \cdot y' = -1 - y^3$$

Ответ: $y' = \frac{-1 - y^3}{3y^2x - \cos y} = -\frac{1 + y^3}{3y^2x - \cos y}$

Производная функции, заданная параметрически.

Пусть
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$t = \varphi(x)$ (обратная для функции $x = x(t)$)

Тогда функцию $y=f(x)$ можно рассматривать как

сложную функцию: $y = y(\varphi(x))$ $y = y(t), \quad t = \varphi(x)$

где t - промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \left[t'_x = \frac{1}{x'_t} \right] = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

теорема о дифференцировании
обратной функции

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример: найти y'_x , если $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \arctan t \end{cases}$

$$x'_t = (\ln t)' = \frac{1}{t} \quad y'_t = (\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{1+t^2} \div \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t^2}$$

Ответ: $y'_x = \frac{t}{1+t^2}$