Производная и дифференциал.

Вычисление производной путем логарифмирования.

- Функцию вида $y = \left[u(x)\right]^{v(x)} = u^{v}$ называют показательно-степенной или сложной показательной функцией.

$$y = u^{v}$$

$$\ln y = \ln u^{v}$$

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

$$(\ln y)' = (v \cdot \ln u)'$$

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)'$$

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$$

$$\boxed{y' = u^{v} \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)}$$

1. Продифференцировать функцию: $y = x^x$

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y \cdot (1 + \ln x)$$

$$\boxed{y' = x^x (1 + \ln x)}$$

2. Продифференцировать функцию: $y=\sqrt[3]{\frac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}}$

$$\ln y=\ln\sqrt[3]{\frac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}}$$

$$\ln y=\ln\left(\frac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln\frac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \cdot \left[\ln x + \ln\left(x^2+1\right) - \ln(x-1)^2 \right]$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \cdot \left[\ln x + \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln(x-1) \right]$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{3} \cdot \left[\ln x + \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln(x-1) \right] \right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1} - \frac{2 \cdot (x-1)'}{x-1} \right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right]$$

$$y'=\frac{1}{3}y\cdot\left[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right]$$

Ответ: $y'=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}}\cdot\left[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right]$

3. Продифференцировать функцию: $y = \log_{\sin x} \tan x$

$$(\sin x)^y = \tan x$$

$$\ln(\sin x)^y = \ln(\tan x)$$

$$y \cdot \ln(\sin x) = \ln(\tan x)$$

$$y = \frac{\ln(\tan x)}{\ln(\sin x)}$$

$$y' = \left[\frac{\ln(\tan x)}{\ln(\sin x)}\right]'$$

$$y' = \frac{(\ln\tan x)' \cdot \ln\sin x - \ln\tan x \cdot (\ln\sin x)'}{\ln^2 \sin x}$$

$$y' = \frac{\frac{(\tan x)'}{\tan x} \cdot \ln\sin x - \ln\tan x \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x}}{\ln^2 \sin x} =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \left(\frac{\ln \sin x}{\tan x \cdot \cos^2 x} - \frac{\cos x \cdot \ln \tan x}{\sin x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \left(\frac{\ln \sin x}{\sin x \cdot \cos x} - \frac{\cos x \cdot \ln \tan x}{\sin x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \frac{\ln \sin x - \cos^2 x \cdot \ln \tan x}{\sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \sin x} \cdot \frac{\ln \sin x - \cos^2 x \cdot \ln \tan x}{\frac{1}{2} \sin 2x} =$$

$$\boxed{= \frac{2 \cdot \left(\ln \sin x - \cos^2 x \cdot \ln \tan x \right)}{\sin 2x \cdot \ln^2 \sin x}}$$

Производная неявной функции.

явная функция неявная функция

$y=f(x)$ $y-f(x)=0$ или $F(x,y)=0$

$$y=\frac{1}{x}+1 \longleftarrow xy-x-1=0$$

$$y=x^2+2 \longleftarrow y-x^2=2$$

$$xy^3+x=\sin y$$

Пусть $xy - x - 1 = 0$

$$(xy - x - 1)' = 0'$$

$$x'y + xy' - x' - 1' = 0'$$

$$y + xy' - 1 = 0$$

$$xy' = 1 - y$$

$$\boxed{y' = \frac{1 - y}{x}}$$

$$y = \frac{1 + x}{x} = \frac{1}{x} + 1$$

$$\boxed{y' = \left(\frac{1}{x} + 1\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1-y}{x}}$$

$$\boxed{y' = \left(\frac{1}{x}+1\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

$$y = \frac{1}{x}+1$$

$$y' = \frac{1-y}{x} = \frac{1-\frac{1}{x}-1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

4. Продифференцировать функцию: $xy^3 + x = \sin y$

$$\left(xy^3 + x\right)' = (\sin y)'$$

$$x' \cdot y^3 + x \cdot \left(y^3\right)' + x' = (\sin y)'$$

$$y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y' + 1 = y' \cdot \cos y$$

$$\left(3y^2 x - \cos y\right) \cdot y' = -1 - y^3$$

Ответ: $$y' = \frac{-1 - y^3}{3y^2 x - \cos y} = -\frac{1 + y^3}{3y^2 x - \cos y}$$

Производная функции, заданная параметрически.

Пусть $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$t = \varphi(x)$ - обратная для функции $x = x(t)$

Тогда функцию $y=f(x)$ можно рассматривать как

сложную функцию: $y = y\left(\varphi(x)\right)$, т.е. $y = y(t), \quad t = \varphi(x)$

где t- промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \underbrace{\left[t'_x = \frac{1}{x'_t} \right]}_{\text{теорема о дифференцировании обратной функции}} = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Пример: найти y'_x , если $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \arctan t \end{cases}$

$$x'_t = (\ln t)' = \frac{1}{t} \qquad y'_t = (\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{1+t^2} : \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t^2}$$

Ответ: $y'_x = \dfrac{t}{1+t^2}$