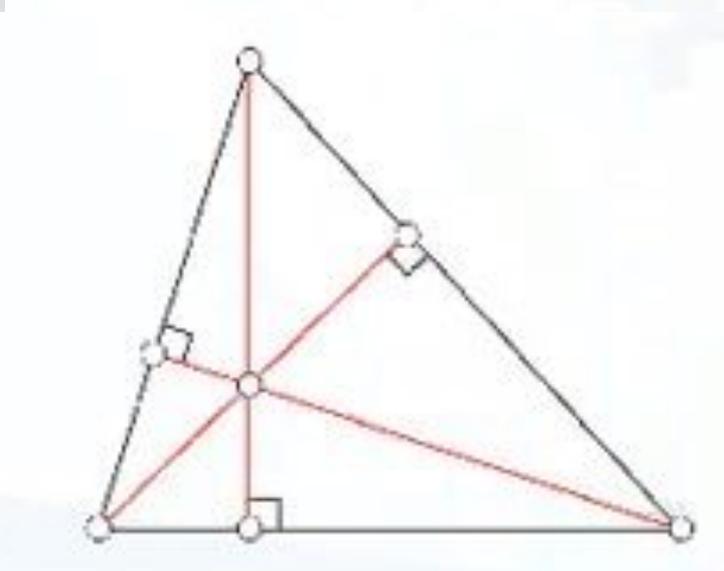
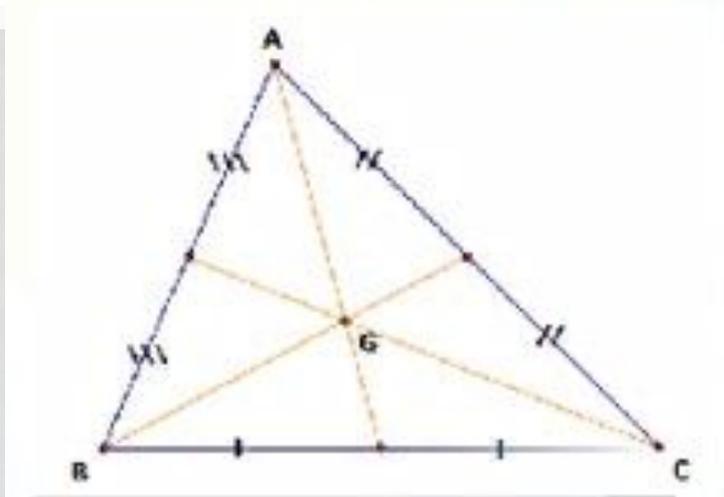


ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА

ПОДГОТОВИЛА: ПАНЬКИНА СВЕТЛАНА АЛЕКСЕЕВНА МФ-211

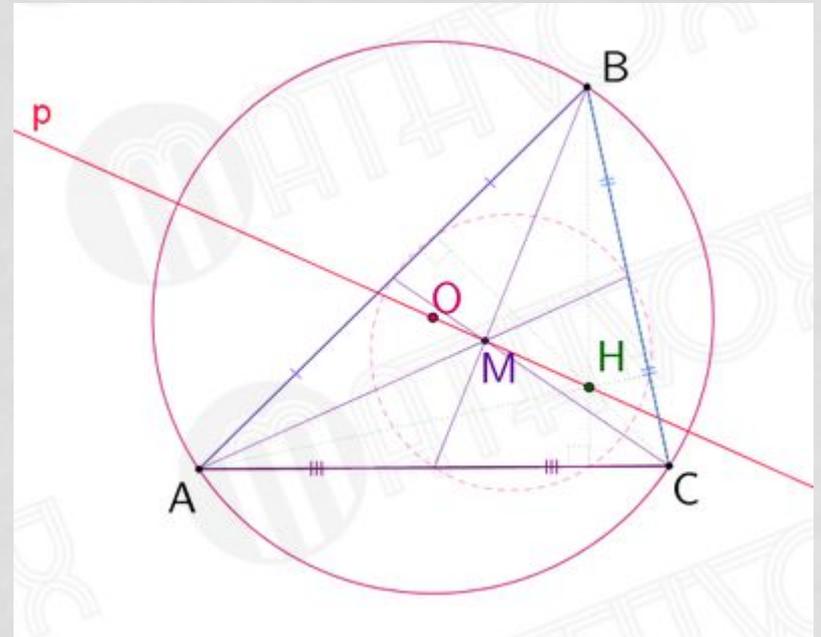
ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА

- Центроид треугольника (центр тяжести треугольника) — точка пересечения медиан в треугольнике
- Ортоцентр треугольника — точка пересечения высот или их продолжений



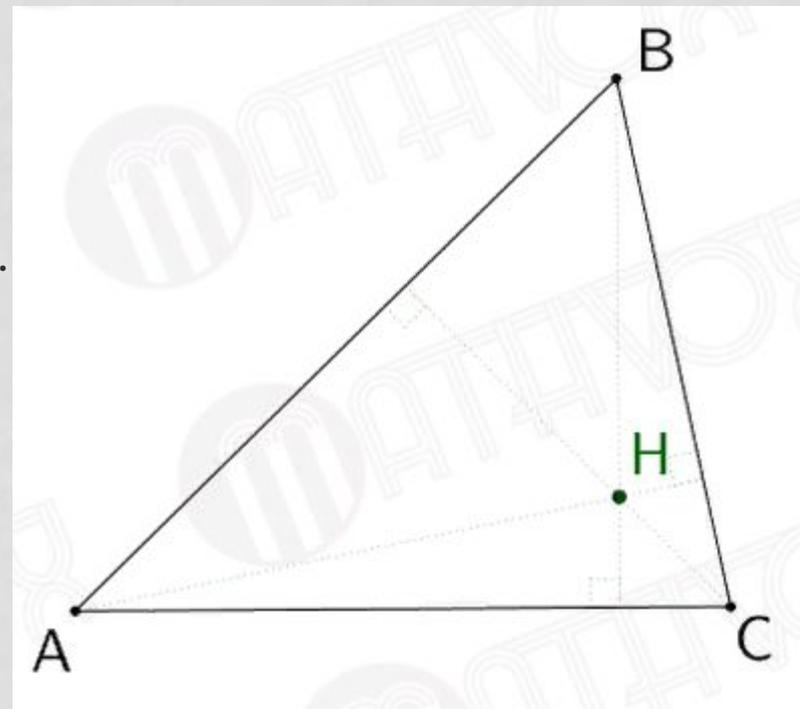
ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА(ТЕОРЕМА)

- В любом треугольнике центр описанной окружности, центроид и ортоцентр лежат на одной прямой, эту прямую называют прямая Эйлера.
- p – прямая Эйлера



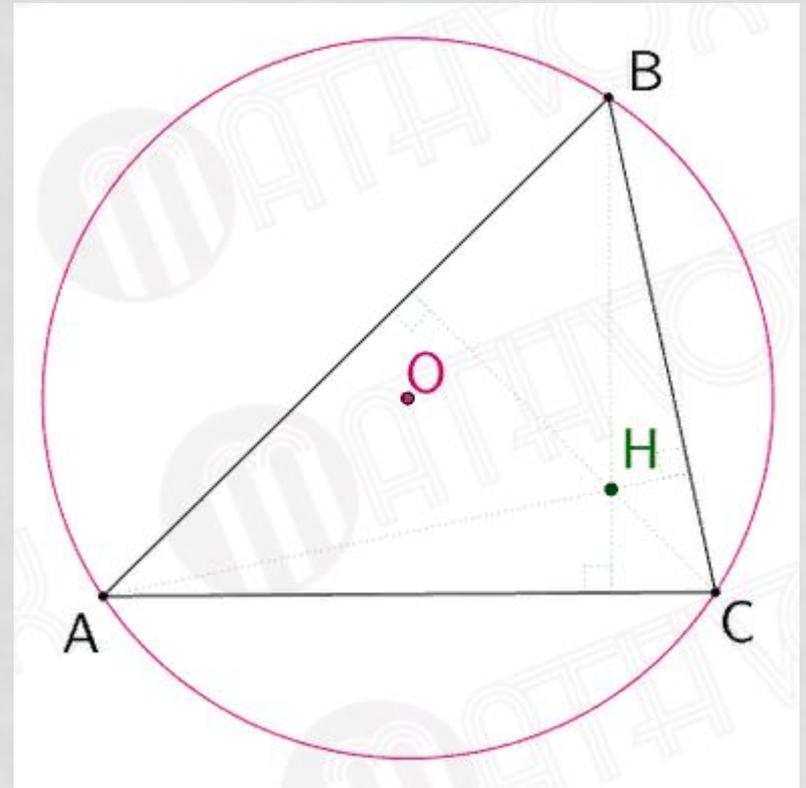
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПРЯМОЙ ЭЙЛЕРА. ШАГ 1

- Рассмотрим треугольник ABC .
- Проведем в нем высоты. Точку пересечения высот обозначим буквой H .



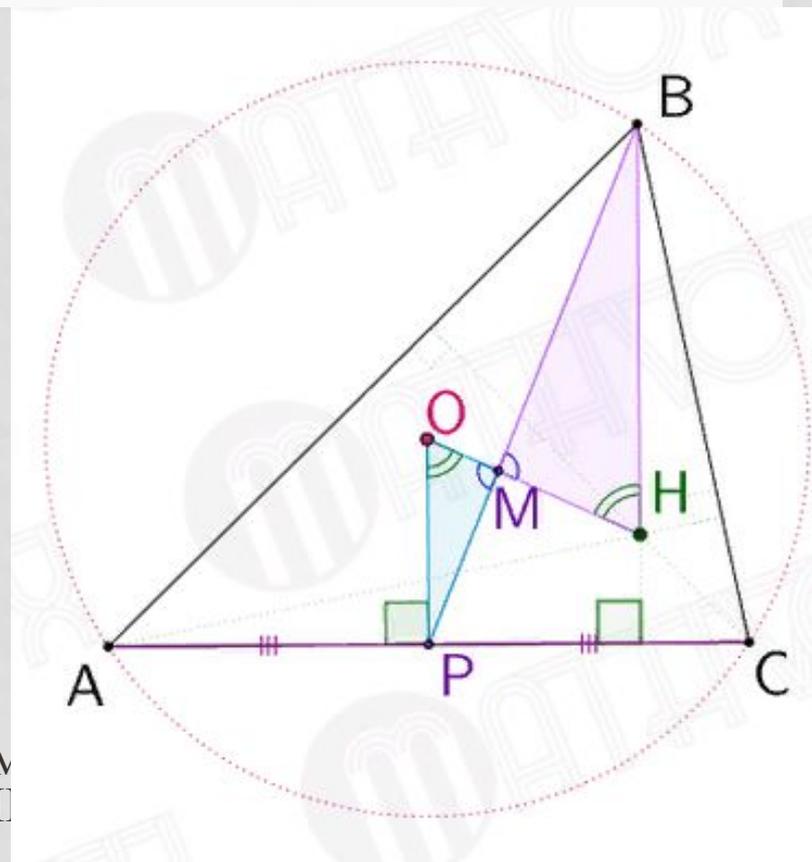
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПРЯМОЙ ЭЙЛЕРА. ШАГ 2

- Опишем вокруг треугольника окружность с центром в точке O .



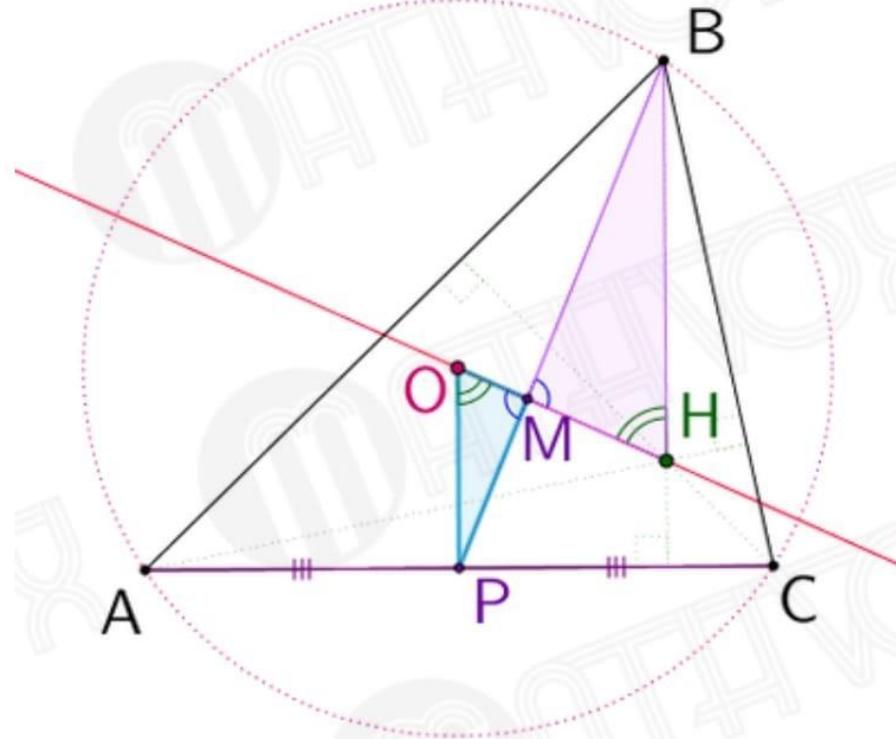
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПРЯМОЙ ЭЙЛЕРА. ШАГ 3

- Проведем медиану BP .
- Пусть отрезок OH пересекает медиану BP в точке M .
- Рассмотрим треугольники ROM и VHM .
- $OP \perp AC$ так как O — центр описанной окружности, который лежит на пересечении серединных перпендикуляров;
- $AP=PC$ по условию: значит OP — серединный перпендикуляр;
- $VH \perp AC$ -по условию. Из перпендикулярности двух прямых к одной прямой, следует: $OP \parallel VH$
- Из параллельных прямых, следует, что их накрест лежащие углы равны: $\angle O = \angle H$
 $\angle OMP = \angle VMH$ - как вертикальные
- треугольник $ROM \sim$ треугольнику VHM по двум углам. Из подобия треугольника следует $VM/MP = VH/OR$
- По лемме о центре описанной окружности, ортоцентре и середине стороны треугольника:
 $VH = 2 \cdot OR$ или $VH/OR = 2$ отсюда $VM/MP = 2/1$



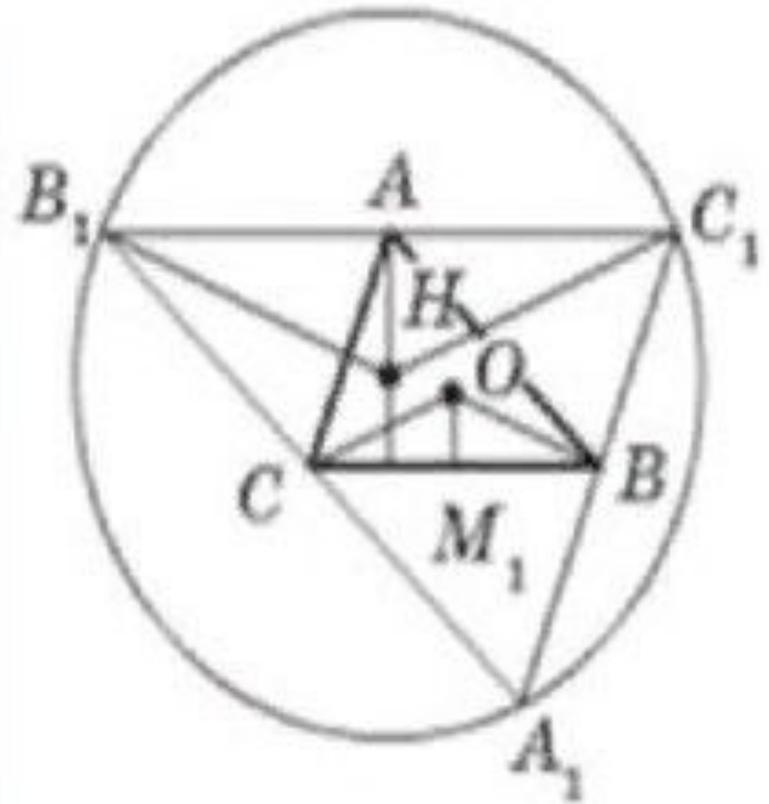
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПРЯМОЙ ЭЙЛЕРА. ШАГ 4

- Таким образом получаем, что точка M , лежащая на медиане, делит ее в отношении $2:1$, считая от вершины. Отсюда следует, что M – точка пересечения медиан.
- Значит три точки O , M и H лежат на одной прямой.
- Теорема о прямой Эйлера доказана.



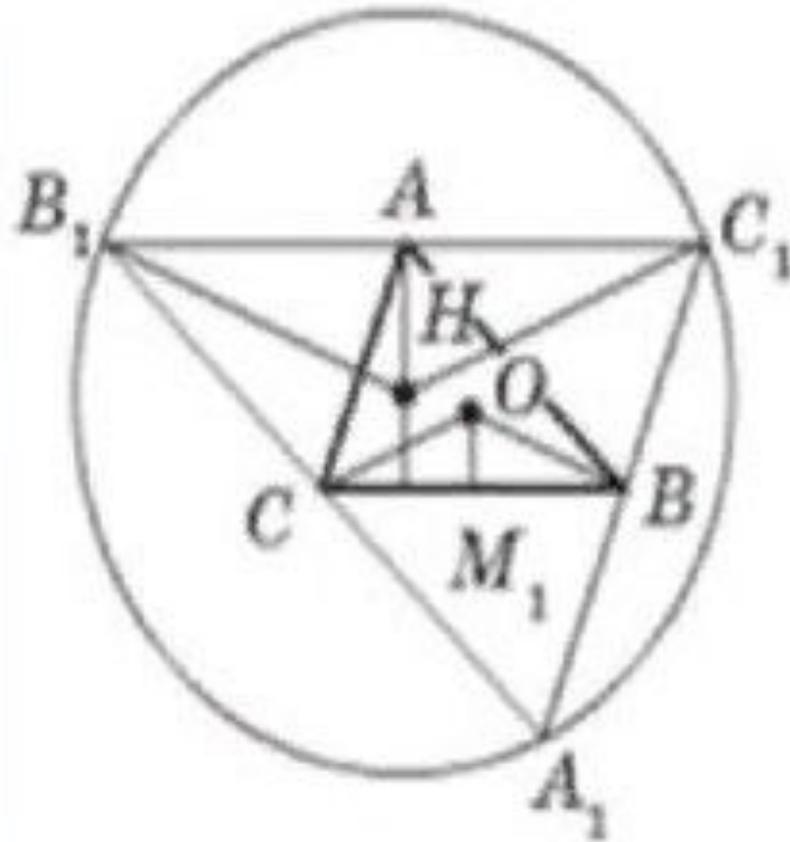
ЛЕММА ИЗ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА

- Если H -ортоцентр треугольника ABC , OM_1 - перпендикуляр, опущенный из центра O описанной окружности на сторону BC , то $AH = 2OM_1$



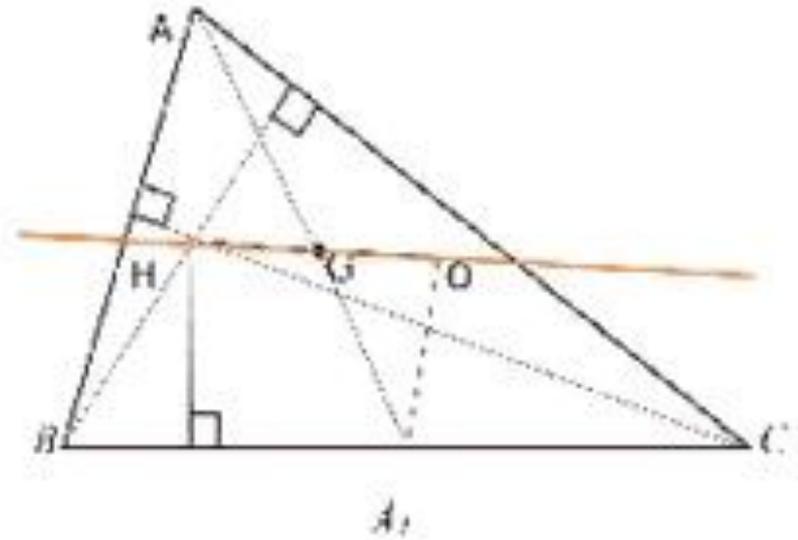
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ ИЗ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА

- 1) Через каждую высоту треугольника ABC проведем прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$
- 2) Так как два угла опираются на одну и ту же дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Углы BAC и $B_1A_1C_1$ равны как противоположные углы параллелограмма ABA_1C , поэтому $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$.
- 3) Так как $B_1C_1 = 2BC$, то равнобедренные треугольники COB и B_1HC_1 подобны с коэффициентом подобия 2
- 4) Так как отрезок AN и OM_1 - соответственны высотам подобных треугольников, то $AN = 2OM_1$. Что и требовалось доказать: $AN = 2OM_1$
- Доказательство леммы из теоремы Эйлера



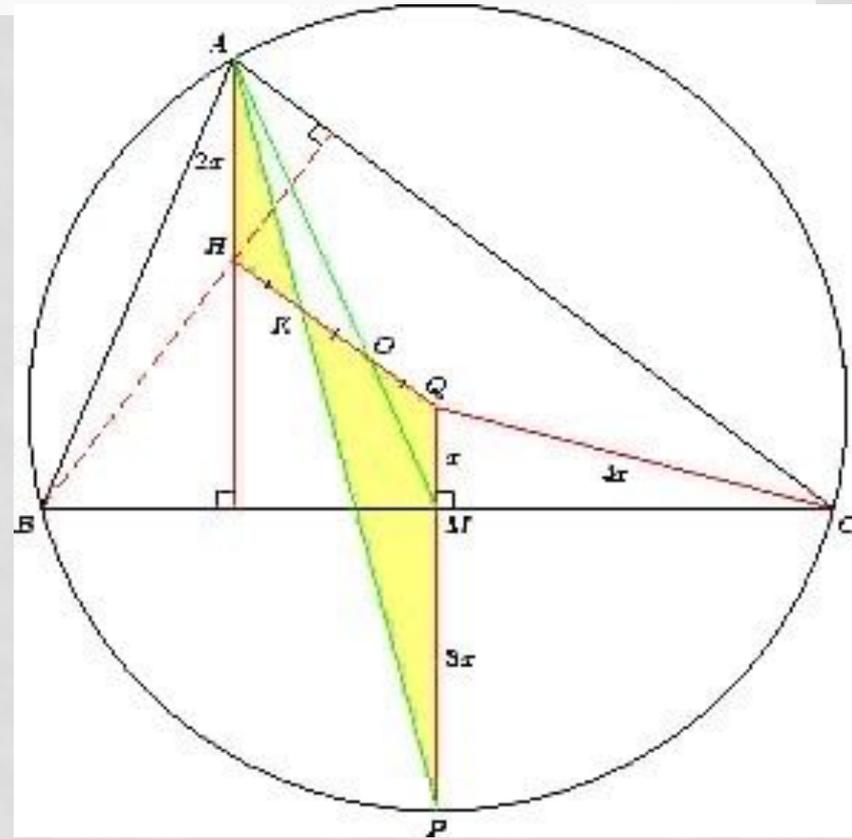
ЗАДАЧА №1

- Дано :треугольник ABC , точка M – центроид, O – центр вписанной окружности, H – ортоцентр
- Доказать: в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой, причём точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2MO$.



ЗАДАЧА №2

- остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H , а медианы — в точке O . Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 30° .



ЛИТЕРАТУРА

- 2. Задачи по планиметрии: В.В Просолов. – М.: МЦНМО , 2001.–
Режим доступа : <https://math.ru/lib/book/pdf/planim4.pdf>
- Геометрия для общеобразовательных учреждений с углубленны: учеб.
для 8 кл. / А.Г. Мерзляк, В.Б Полонский, М.С Якир. – М. : «Вентана –
Граф», 2016.