

Баллистика и аэродинамика

Недогарок А.А., ассистент каф. СМЗ

Рекомендуемая литература

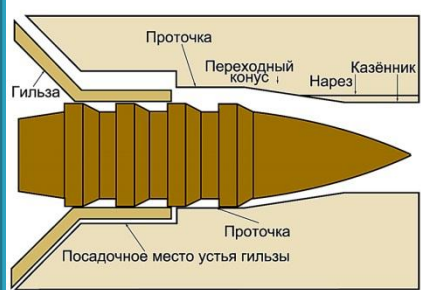
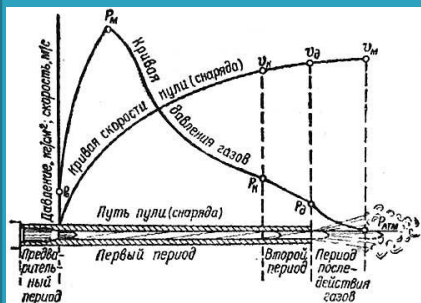
1. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. – М.: Дрофа, 2004.
2. Лысенко Л.Н. Наведение и навигация баллистических ракет. Учебное пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007 г.
3. Дмитриевский А.А. и др. Внешняя баллистика: учебник для студентов вузов / А.А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко, С.С. Богодистов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1991.

Разделы баллистики

Баллистика

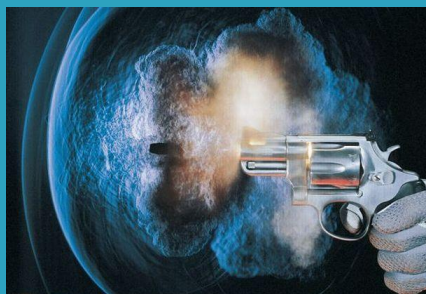
Внутренняя

Interior Ballistics



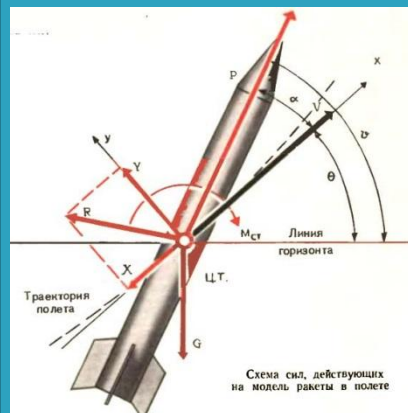
Промежуточная

Intermediate Ballistics



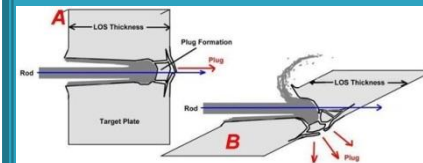
Внешняя

Exterior Ballistics

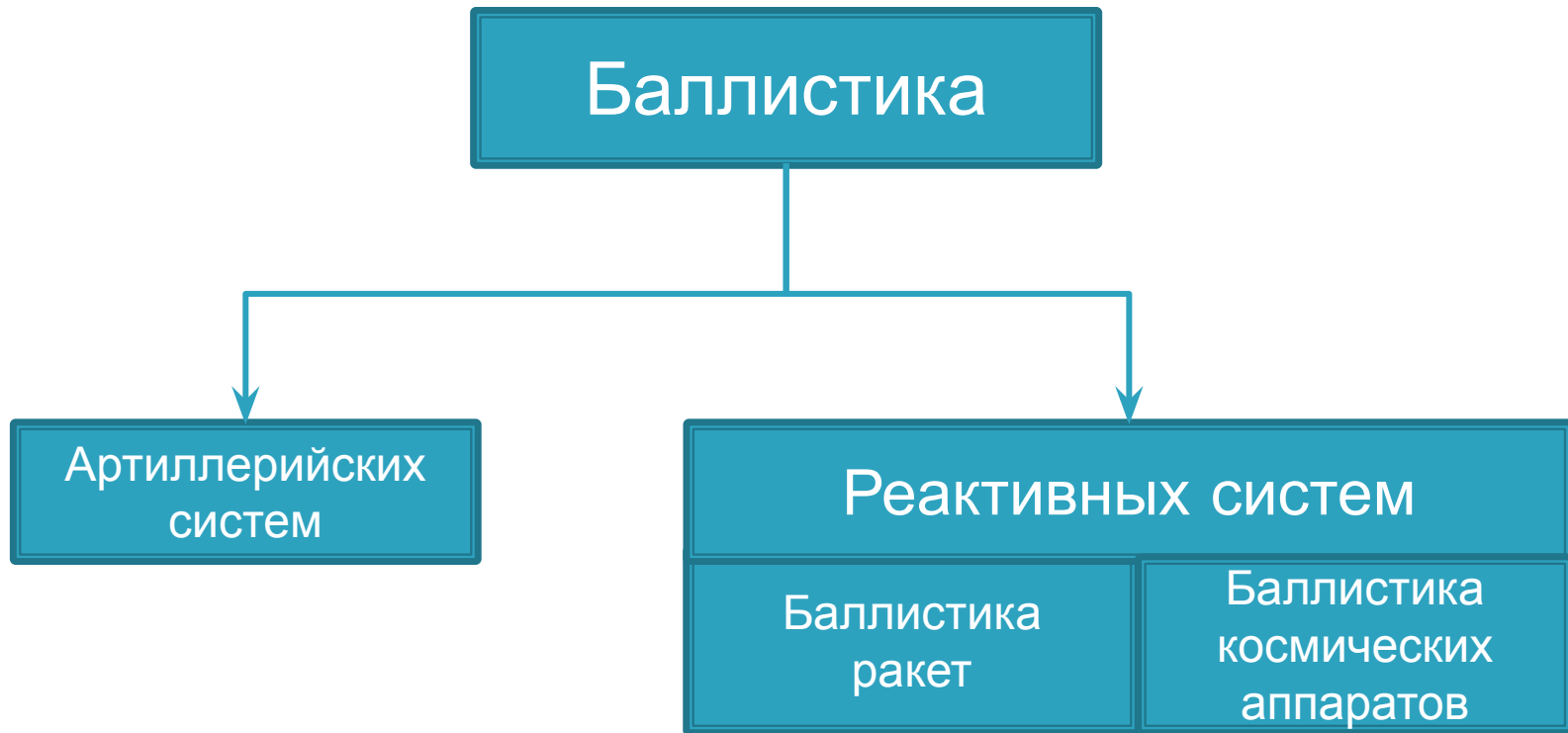


Терминальная (конечная)

Terminal Ballistics



Разделы баллистики



Базовые определения

Баллистика – наука о движении снарядов и ракет.
βαλλω (греч.) – «бросаю».

Внутренняя баллистика (*Interior Ballistics*) изучает движение снаряда в канале ствола артиллерийского орудия.

Промежуточная баллистика (*Intermediate Ballistics*) – разделы внутренней баллистики, посвящённые рассмотрению движения снаряда непосредственно после выхода из канала ствола в сопутствующей струе истекающего вслед за снарядом газа.

Внешняя баллистика (*Exterior Ballistics*) – наука о полёте ракет и снарядов после прекращения их силового взаимодействия с пусковой установкой.

Задачи внешней баллистики

Первая (основная/прямая) задача внешней баллистики – расчёт траекторий движения ЛА по заранее известным данным.

Вторая (обратная) задача внешней баллистики – определение проектных баллистических характеристик движения по априорно известным характеристикам ракетной или артиллерийской системы, отыскание оптимальных режимов движения и траекторий.

Третья задача баллистики – расчёт стабилизации снарядов.

Четвертая задача – изучение факторов, влияющих на рассеивание траектории, определение степени их воздействия и рассмотрение способов уменьшения рассеивания и повышения точности стрельбы.

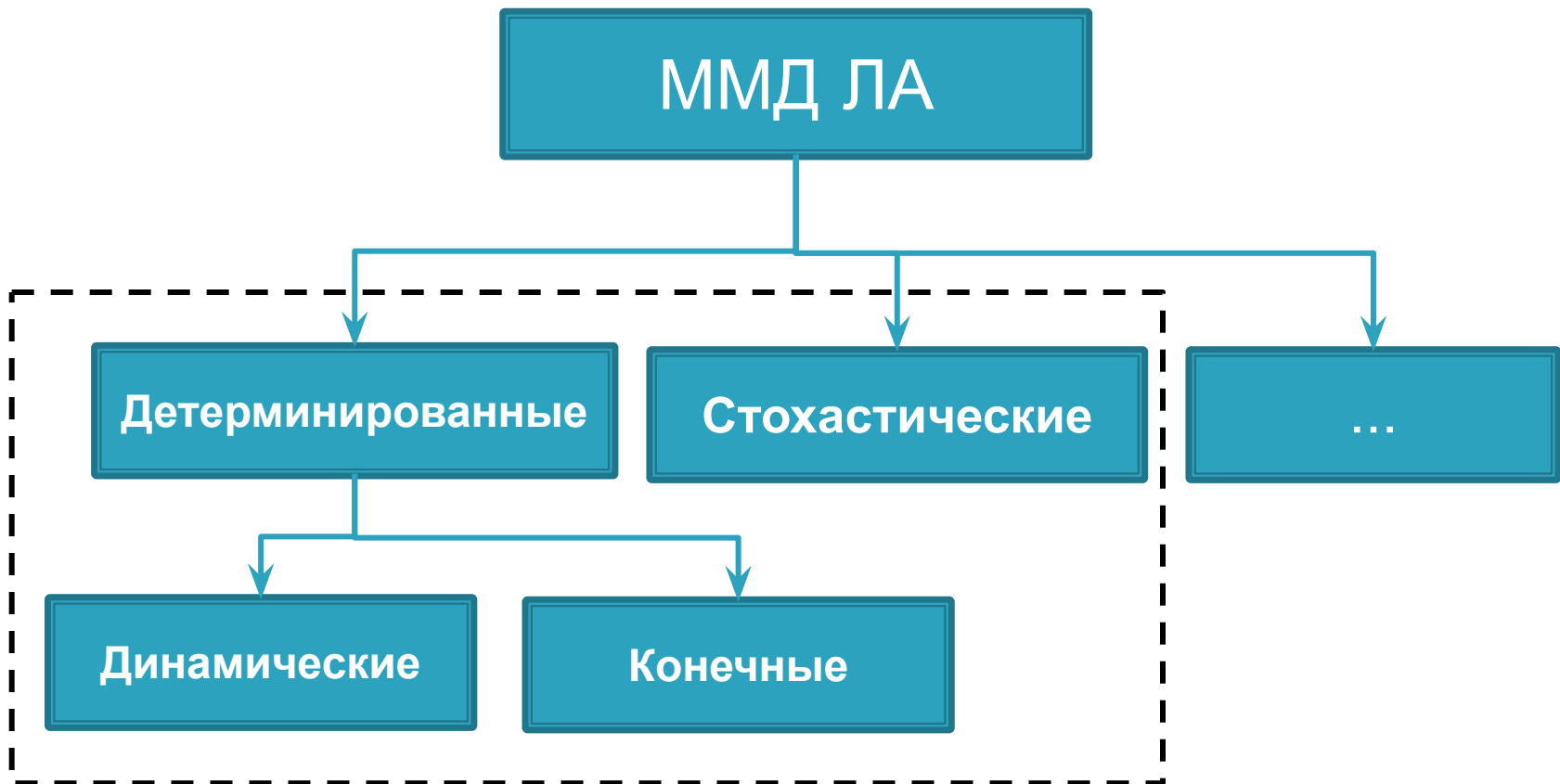
Математическая модель

Математическая модель (ММ) – научно обоснованная схематизация действительного поведения системы/объекта в форме, которая даёт возможность производить необходимые вычисления с целью получения решения требуемой задачи исследования системы/объекта.

Требования к ММ:

- ❑ ММ должна однозначным образом описывать действительное поведение системы/объекта;
- ❑ ММ должна наиболее точно описывать действительное поведение системы/объекта;
- ❑ ММ должна быть достаточно простой в вычислительном отношении.

Математические модели движения ЛА



Математические модели движения ЛА

□ *Динамические модели* записываются в виде системы конечно-разностных соотношений, обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}} = f(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (*)$$

и дифференциальных уравнений в частных производных.

Конечные модели записываются с помощью системы аналитических выражений, получаемых в результате аналитического интегрирования системы (*):

$$\bar{x}(t) = F(t, \bar{x}_0), \quad \bar{x}_0 \in K \quad (**)$$

(K – множество возможных начальных условий)

В случае *стохастических моделей* правые части уравнений (*,**) содержат вектор случайных возмущений.

Силы, действующие на ЛА

- Сила тяги
- Аэродинамические силы
- Сила тяготения
- Управляющие силы и моменты
- ...

Реактивная сила Мещерского

$\Delta \vec{L}$ – приращение количества движения ЛА за время Δt .
По закону сохранения импульса:

$$\Delta \vec{L} = \vec{F} \cdot \Delta t; \quad (*)$$

\vec{F} – равнодействующая внешних сил.

В момент времени t импульс (количество движения) летательного аппарата можно выразить в виде

$$\vec{L} = m\vec{V};$$

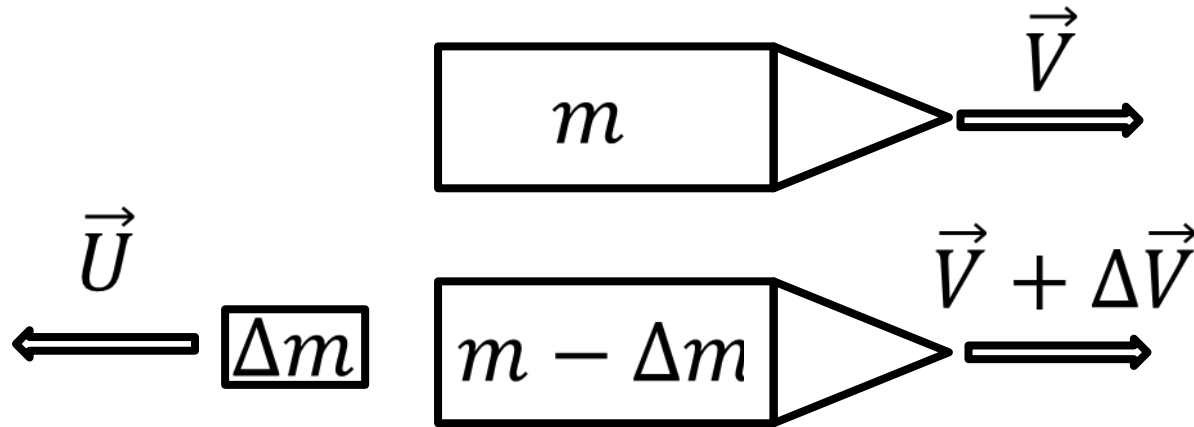
в момент $(t + \Delta t)$

$$\vec{L} + \Delta \vec{L} = (m - \Delta m)(\vec{V} + \Delta \vec{V}) + \Delta m \vec{U};$$

Δm – расход массы ЛА за время Δt ;

\vec{U} – скорость продуктов сгорания в неподвижной системе координат.

Реактивная сила Мещерского



Тогда $\Delta \vec{L}$ можно выразить также в виде

$$\Delta \vec{L} = m \Delta \vec{V} + \Delta m (\vec{U} - \vec{V} - \Delta \vec{V}) \quad (**)$$

Приравняем формулы (*) и (**)

$$m \Delta \vec{V} = \vec{F} \Delta t - \Delta m (\vec{U} - \vec{V}) + \Delta m \Delta \vec{V}.$$

Отбрасываем $\Delta m \Delta \vec{V}$ как слагаемое второго порядка малости, делим на Δt и полагаем $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$m(t) \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \left| \frac{dm}{dt} \right| \cdot \vec{w};$$

Реактивная сила Мещерского

$$\vec{w} = \vec{U} - \vec{V};$$

$$P_M = - \left| \frac{dm}{dt} \right| \cdot \vec{w} = -\dot{m} \cdot \vec{w} - \text{реактивная сила Мещерского}$$

$$m(t) \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{P}_M - \text{уравнение Мещерского}$$

Тяга и реактивная сила

Реактивная сила – равнодействующая газо- и гидродинамических сил, действующих на внутренние поверхности ракетного двигателя при истечении из него продуктов сгорания.

Тяга ДУ – равнодействующая реактивной силы и сил давления окружающей среды, действующих на внешние поверхности ДУ, за исключением сил внешнего аэродинамического сопротивления.

Тяга реактивной ДУ

$$P = \underbrace{\dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c}_{\text{Динамическая тяга}} + \underbrace{S_a(p_a - p_n)}_{\text{Статическая тяга}}$$

$\dot{m}_{\text{топл}} \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}} \right]$ – секундный массовый расход топлива;

$w_c \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$ – скорость продуктов горения на выходном сечении сопла;

$S_a [\text{м}^2]$ – площадь выходного сечения сопла;

$p_a [\text{Па}]$ – давление газов на срезе сопла;

$p_n [\text{Па}]$ – давление окружающей среды («н» – наружное).

Высотная добавка

□ Тяга на нулевой высоте:

$$P_0 = \dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_a(p_a - p_0).$$

Тяга на высоте h :

$$P(h) = \dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_a(p_a - p_H(h)).$$

Запишем в виде

$$P(h) = \dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_a(p_a - p_H(h)) + S_a p_0 - S_a p_0.$$

Преобразуем

$$P(h) = \underbrace{\dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_a(p_a - p_0)}_{P_0} + S_a p_0 - S_a p_H(h);$$

Высотная добавка

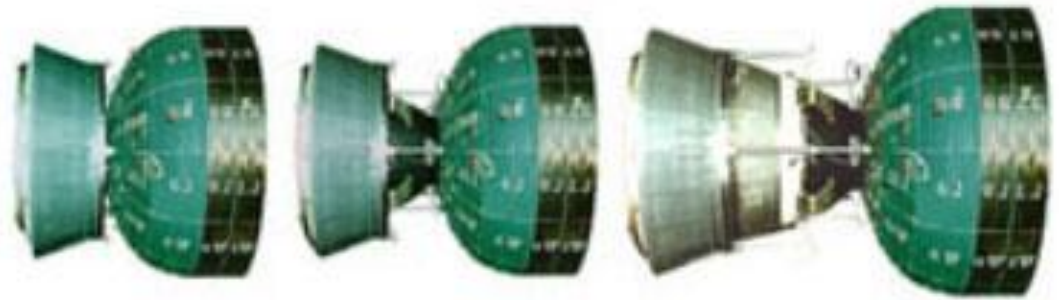
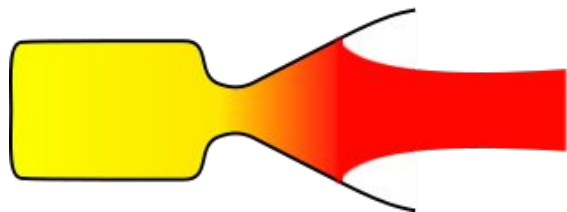
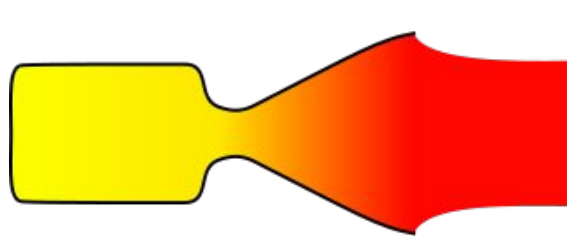
Получаем

$$P(h) = P_0 + S_a(p_0 - p_H(h));$$

и

$$P(h) = P_0 + \underbrace{S_a p_0 \left(1 - \frac{p_H(h)}{p_0}\right)}_{\text{Высотная добавка}}$$

Режимы работы сопла



Пример РД с раздвижным насадком (expandable nozzle)

Основные характеристики реактивных ДУ

Введём величину $w_{\text{Э}}$ и приравняем

$$P = \dot{m} \cdot w_c + S_a(p_a - p_H) = \dot{m} \cdot w_{\text{Э}};$$

$$w_{\text{Э}} = w_c + \frac{S_a(p_a - p_H)}{\dot{m}} - \text{эффективная скорость истечения}$$

В пустоте

$$w_{\text{Э}0} = w_c + \frac{S_a p_a}{\dot{m}};$$

на поверхности Земли

$$w_{\text{Э}} = w_c + \frac{S_a(p_a - p_0)}{\dot{m}}.$$

Тяга РДТТ

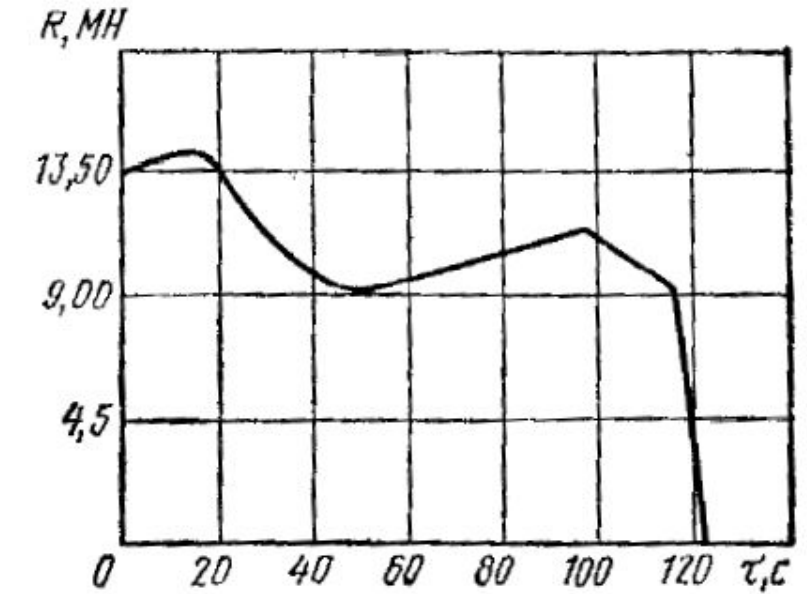
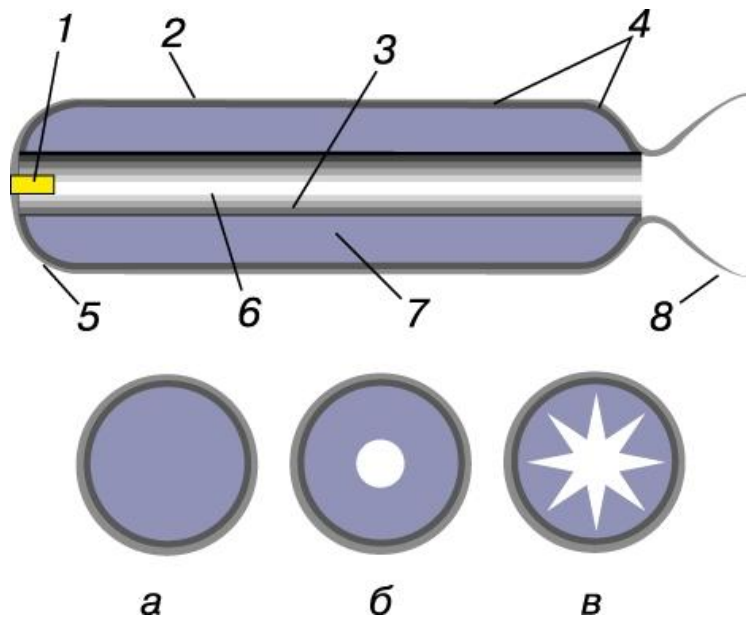


Рис. 1.9. Изменение тяги во времени

Основные характеристики реактивных ДУ

Высотная добавка эффективной скорости истечения

$$\Delta w_{\text{Э}} = w_{\text{Э}} - w_{\text{Э}0} = \frac{S_a(p_a - p_H)}{\dot{m}} \approx 15 \dots 20\% w_{\text{Э}0}$$

Удельная тяга (для ЖРД)

$$P_{\text{уд}} = \frac{P}{\dot{m}g_0} = \frac{w_{\text{Э}}}{g_0}, \quad [\text{с}]$$

Удельный импульс (для РДТТ)

$$I_{\text{уд}} = \int_0^{t_{\text{к}}} P(t)dt / \int_0^{t_{\text{к}}} \dot{m}dt, \quad \left[\frac{\text{М}}{\text{с}} \right]$$

Тяготение

Модели гравитационного поля Земли

<i>Тип</i>	<i>Область применения</i>
Плоская	Стрельба на ближние дальности (до 10-20 км)
Сферическая	Баллистическое проектирование и приближительные расчёты, высокоорбитальные ИСЗ, межпланетные перелёты
Эллипсоид: Референц-эллипсоиды Обобщённый эллипсоид	Прогнозы движения низкоорбитальных ИСЗ и МБР
Геоид и его приближенное представление разложением в ряд сферических функций	Точные прогнозы движения ИСЗ и МБР

Точность
и
числи
тельная
сложнос
ть



Потенциал гравитационного поля Земли

Силовое поле – часть пространства, в котором на материальную точку действует сила, зависящая от координат точки и времени

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$$

Стационарное силовое поле не зависит от времени

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$$

Стационарное силовое поле называется *потенциальным*, если проекции силы \vec{F} на оси Ox , Oy , Oz можно выразить через скалярную функцию $U(x, y, z)$:

□
$$\vec{F} = \text{grad}(U)$$

Функция $U(x, y, z)$ называется силовой функцией.

Гравитационный потенциал равен отношению потенциальной энергии материальной точки, помещённой в рассматриваемую точку гравитационного поля, к массе этой точки. Впервые понятие гравитационного потенциала ввёл в науку Адриен Мари Лежандр в конце XVIII века.

Эллиптическая модель Земли

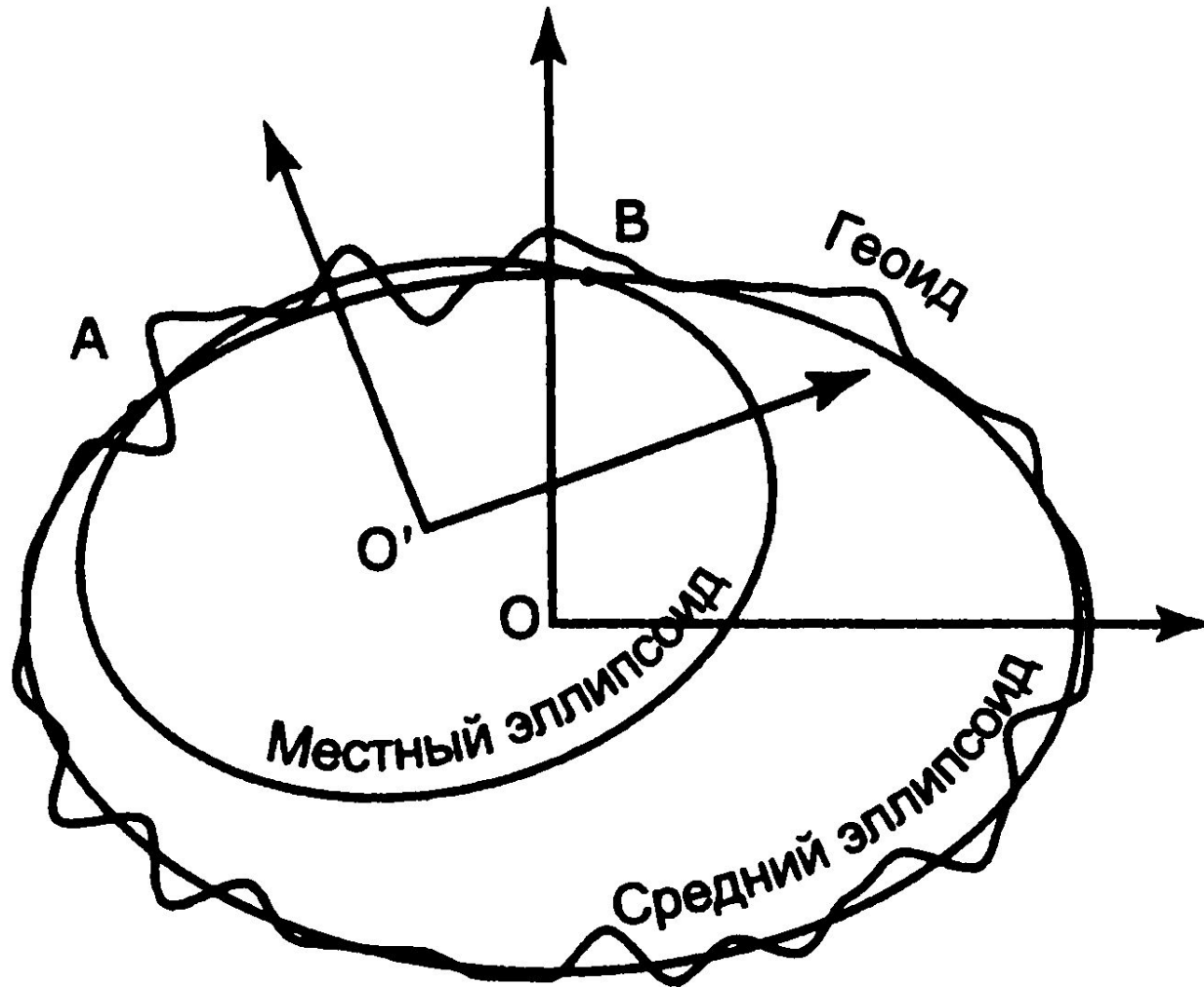
Референц-эллипсоид – модель эллипсоида, наилучшим образом удовлетворяющая поверхности территории какой-либо страны или региона.

СССР - референц-эллипсоид Ф.Н. Красовского (1964)
Двухосный, большая полуось $a = 6378245$ м,
малая – $b = 6356863$ м, сжатие $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1/298,3$

США и Канада – референц-эллипсоид Кларка;
Италия – референц-эллипсоид Хейфорда;
Норвегия – референц-эллипсоид Бесселя.

Общий земной эллипсоид – эллиптическая аппроксимация геоида.

Эллиптическая модель Земли



Ускорение свободного падения эллипсоида

Если не требуется особо высокая точность расчетов, то можно ограничиться первыми членами разложения в ряд, т. е. принять

$$g_{\tau r} = \frac{d_{00}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{d_{20}}{r^4} (5 \sin^2 \varphi_{\text{ц}} - 1); \quad (1.15)$$

$$g_{\tau \omega} = 3 \frac{d_{20}}{r^4} \sin \varphi_{\text{ц}}, \quad (1.16)$$

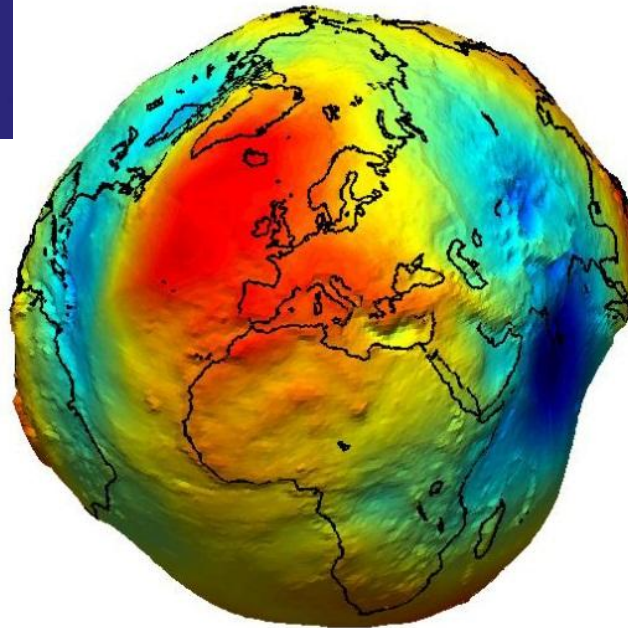
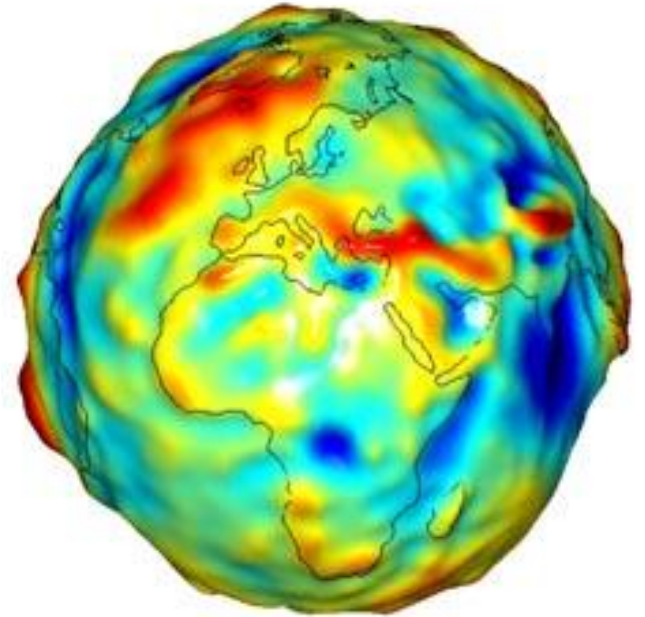
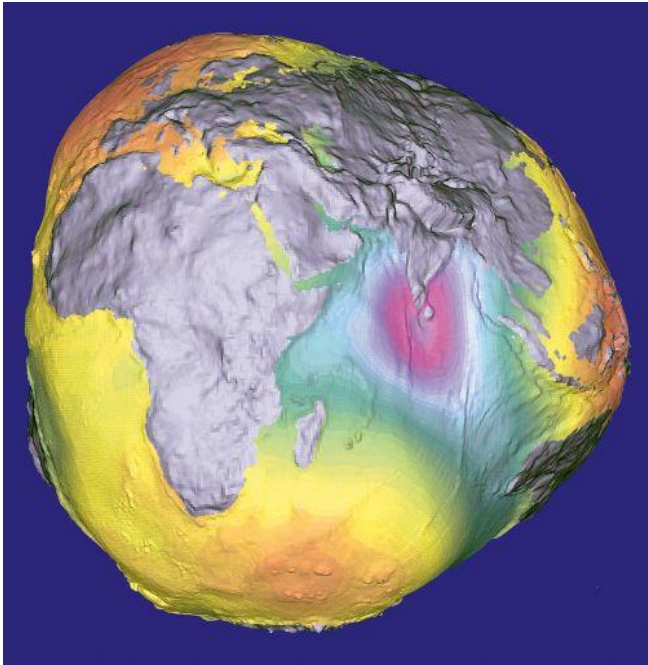
Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, переработанное и доп. М., «Машиностроение», 1973, 616 с.

Геоид

1873 г. Е. Листинг (Германия)

Геоид – фигура образованная эквипотенциальной поверхностью, потенциал поля тяготения которой равен потенциалу на уровне моря.

Геоид – уровенная поверхность, совпадающая на океанах с невозмущённой поверхностью воды и продолженная под континентами по закону образования уровенных поверхностей (перпендикулярно к направлению силы тяжести в любой точке поверхности).



$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \times \\ \times (C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \sin m \lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (1.9)$$

где r_0 — наибольший радиус поверхности принятой к рассмотрению физической модели Земли;

$$C_{nm} = \frac{1}{r_0^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(M)} r_i^n P_{nm}(\sin \varphi_i) \cos m \lambda_i dM;$$

$$S_{nm} = \frac{1}{r_0^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(M)} r_i^n P_{nm}(\sin \varphi_i) \sin m \lambda_i dM;$$

Функции Лежандра вычисляются по следующим формулам (при $n \geq 2$):

$$P_{nm}(\sin \varphi) = \frac{(2n-1) \sin \varphi P_{n-1,m}(\sin \varphi) - (n+m-1) P_{n-2,m}(\sin \varphi)}{n-m},$$

$$P_{nm}(\sin \varphi) = (2n-1) \cos \varphi P_{n-1,n-1}(\sin \varphi),$$

$$P_{00}(\sin \varphi) = 1, \quad P_{10}(\sin \varphi) = \sin \varphi, \quad P_{11}(\sin \varphi) = \cos \varphi.$$

При расчетах на ЦВМ эти функции, как правило, аппроксимируются следующими рекуррентными зависимостями:

$$P_{nm} = \begin{cases} \frac{(2n-1) \sin \varphi P_{(n-1)m} - (n+m-1) P_{(n-2)m}}{n-m} & \text{при } n > m, \\ (2n-1) P_{(n-1)(n-1)} \cos \varphi & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Стандартная форма записи потенциала сил притяжения Земли, рекомендованная Международным Астрономическим Союзом для практического использования

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{36} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_{\text{Э}}}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \right\}$$

где r – радиус точки;

φ – широта;

λ – долгота точки;

$R_{\text{Э}}$ – средний экваториальный радиус;

C_{nm} , S_{nm} – безразмерные коэффициенты, определяющие амплитуду гармоник и зависящие от формы Земли и распределения масс внутри неё.

$P_{nm}(\sin \varphi)$ – присоединённые сферические функции Лежандра (порядка n с индексом m)

Физическая и геометрическая интерпретация гармоник

Секториальные гармоники ($m = n$) – учитывают изменения потенциала по долготе.

Зональные гармоники ($m = 0$) – учитывают изменения потенциала по широте.

Тессеральные гармоники ($m \neq 0, n \neq m$) – описывают как долготные, так и широтные эффекты ГПЗ

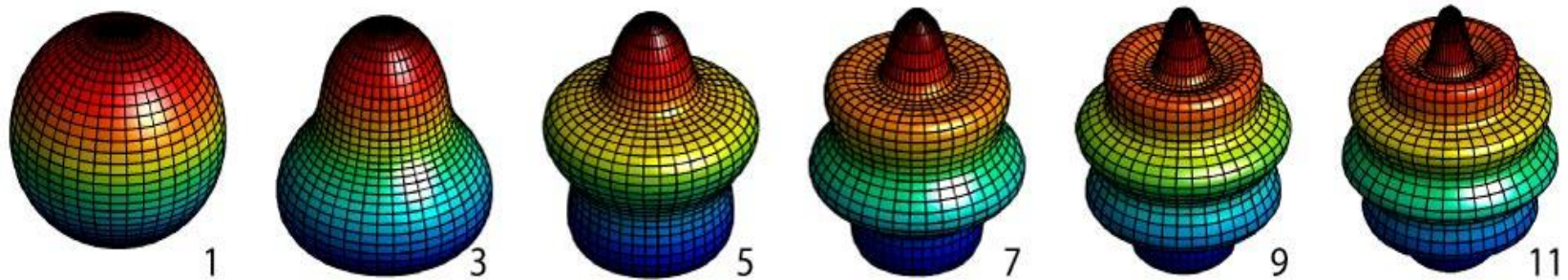
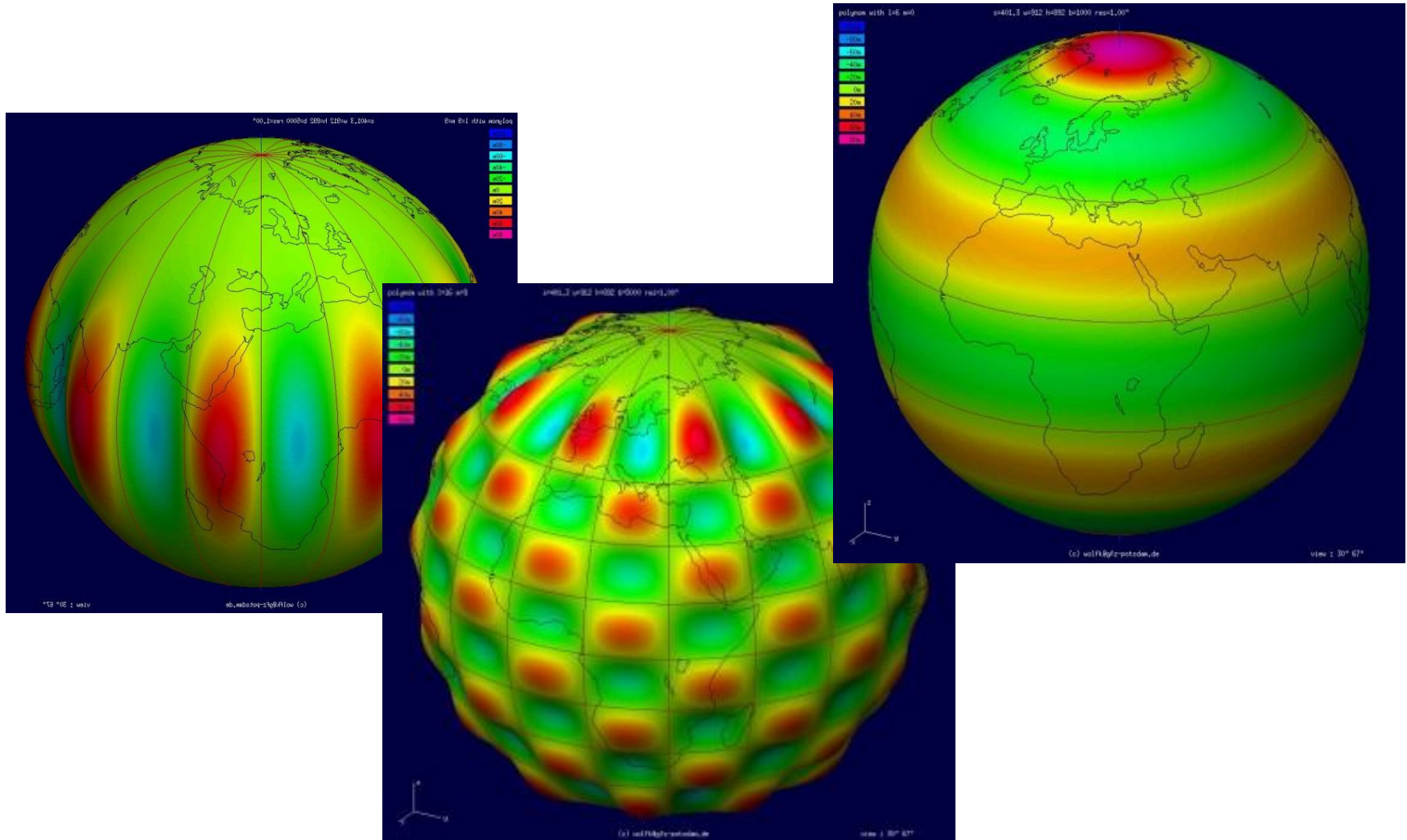


Fig. BF: Spherical harmonic basis functions for degrees $l=1,3,5,7,9,11$ and orders $m=0$.

Физическая и геометрическая интерпретация гармоник



Порядок гармоники					
$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$		
Зональные гармоники					
				$m = 0$	Индекс гармоники
	Тессеральные			Г а р м о н и к и $m = 1$	
				$m = 2$	
				$m = 3$	
				$m = 4$	
Секториальные гармоники					

Гравиметрия

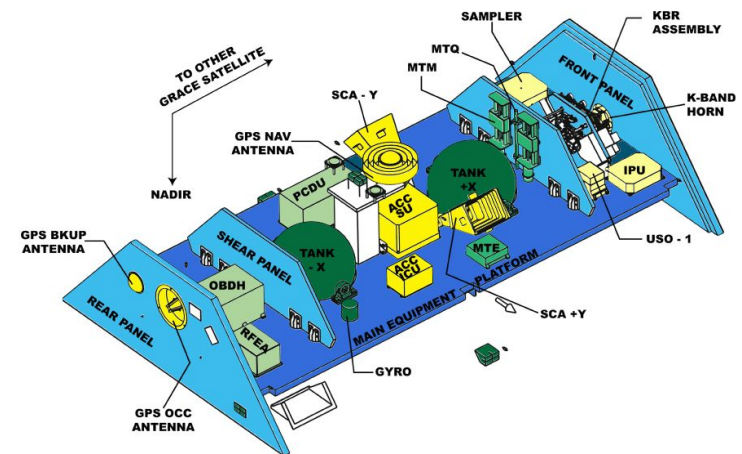
GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*)

2 спутника на полярной орбите высотой 500 км.

Запущены 17 марта 2002 г.

Движение и ориентация измеряется с помощью GPS, звёздных датчиков, микроволновой и лазерной дальнометрии.

Спутники пролетают над каждым участком Земли приблизительно раз в месяц



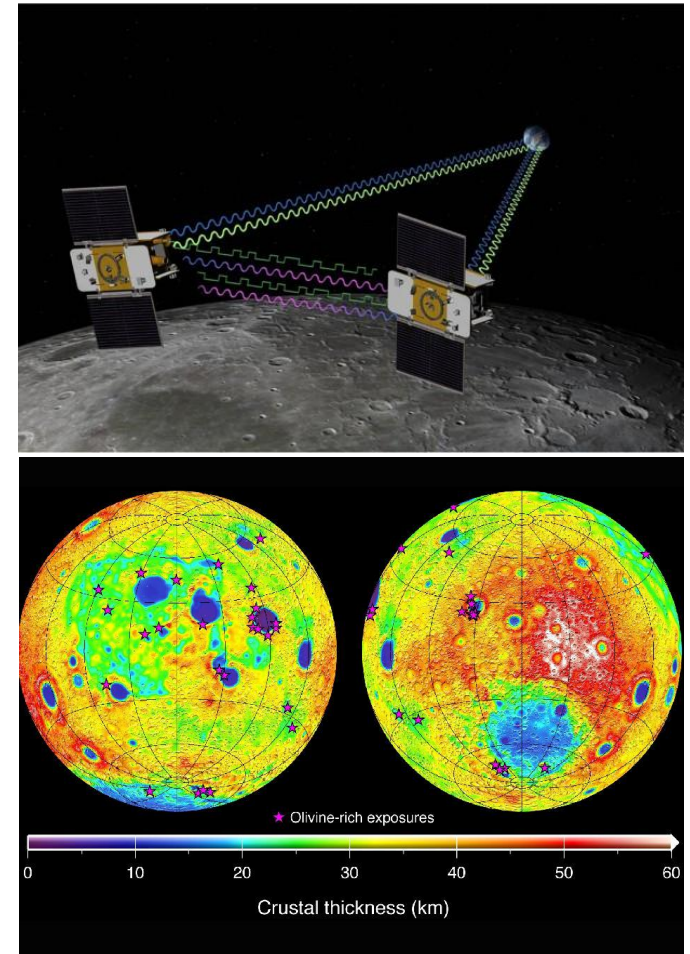
Гравиметрия

GRAIL (Gravity Recovery and Interior Laboratory)

2 окололунных КА - «Эбб» и «Флоу»

10 сентября 2011 г. - 18 декабря 2011 г.

Высота орбиты 55-23 км.



Сила тяжести и притяжения

$$\square \quad \bar{F}_T = \bar{F}_{\text{пр}} + \bar{F}_{\text{ц}};$$

где \bar{F}_T - сила тяжести;

$\bar{F}_{\text{пр}}$ - гравитационная сила земного притяжения;

$\bar{F}_{\text{ц}}$ - центростремительная сила.

Понятия силы тяжести и притяжения часто путаются студентами, чего делать не стоит

Аэродинамические силы и моменты

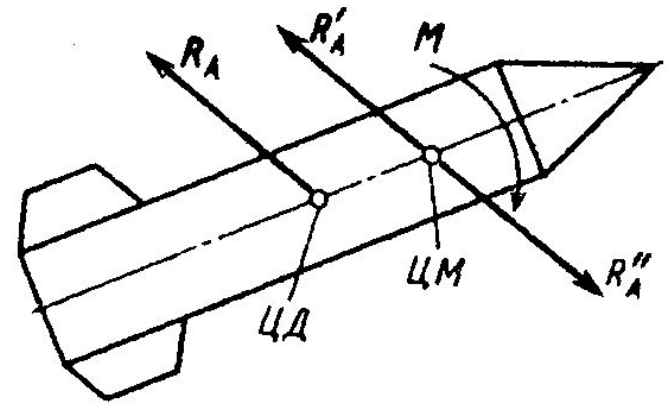
Результирующая

аэродинамическая сила R_A
складывается из сил давления газа и сил трения. Она приложена в центре давления.

Удобно приводить результирующую к центру масс ЛА. В этом случае также появляется аэродинамический момент.

Полная аэродинамическая сила R'_A – сила, векторно равная R_A и приложенная в центре масс ЛА.

Полный аэродинамический момент M – момент, создаваемый R_A относительно центра масс ЛА.



Полная аэродинамическая сила выражается как

$$R_A = qS \cdot C_R(M, Re, \alpha, \dots)$$

где

q – скоростной напор (или динамическое давление);

S – характерная площадь ЛА (часто – площадь миделевого сечения, площадь крыла и пр.);

C_R – **безразмерный** аэродинамический коэффициент, зависящий от формы ЛА, параметров полёта и параметров окружающей среды.

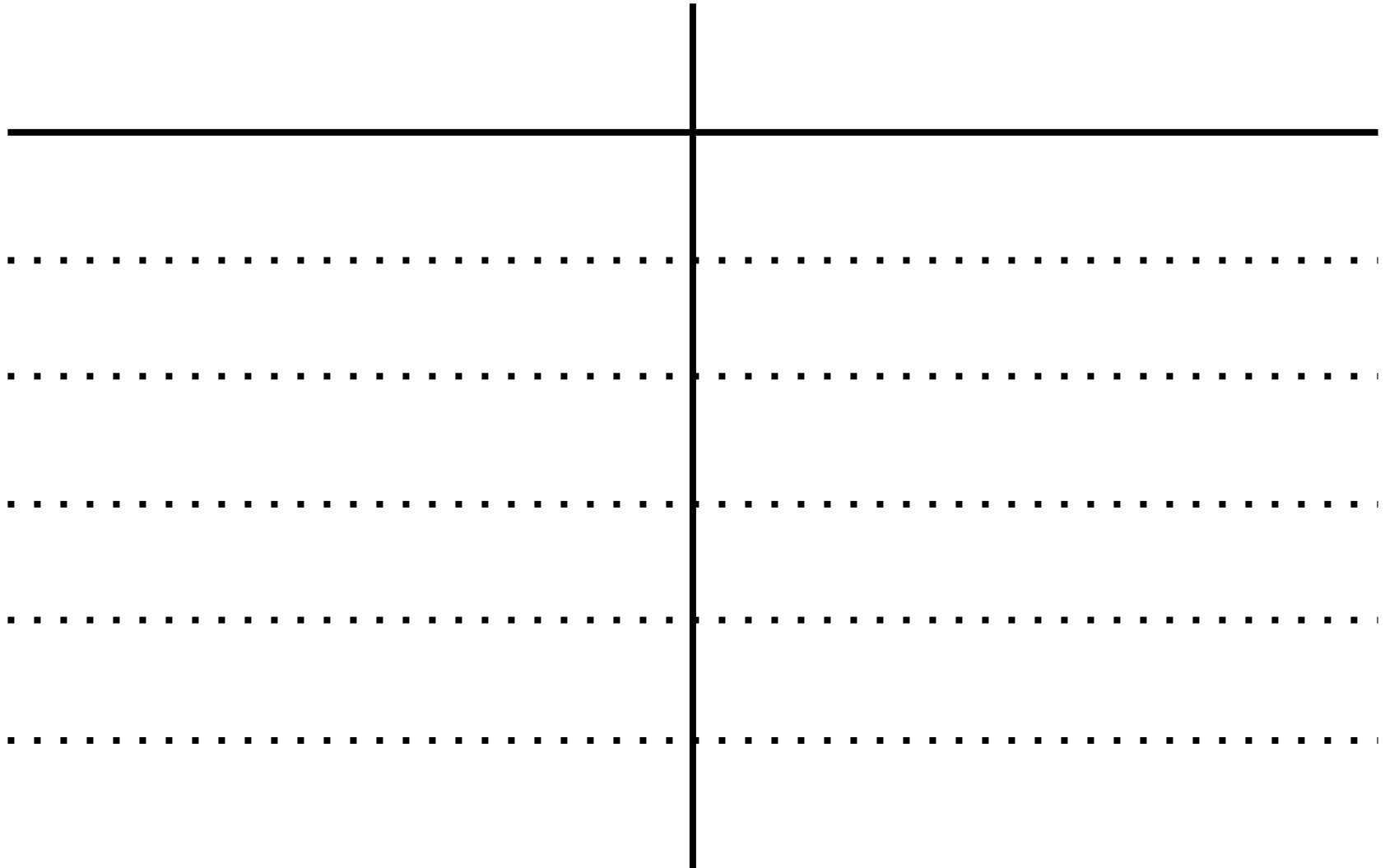
Полный аэродинамический момент выражается формулой

$$M = qSl \cdot m(M, Re, \alpha, \dots)$$

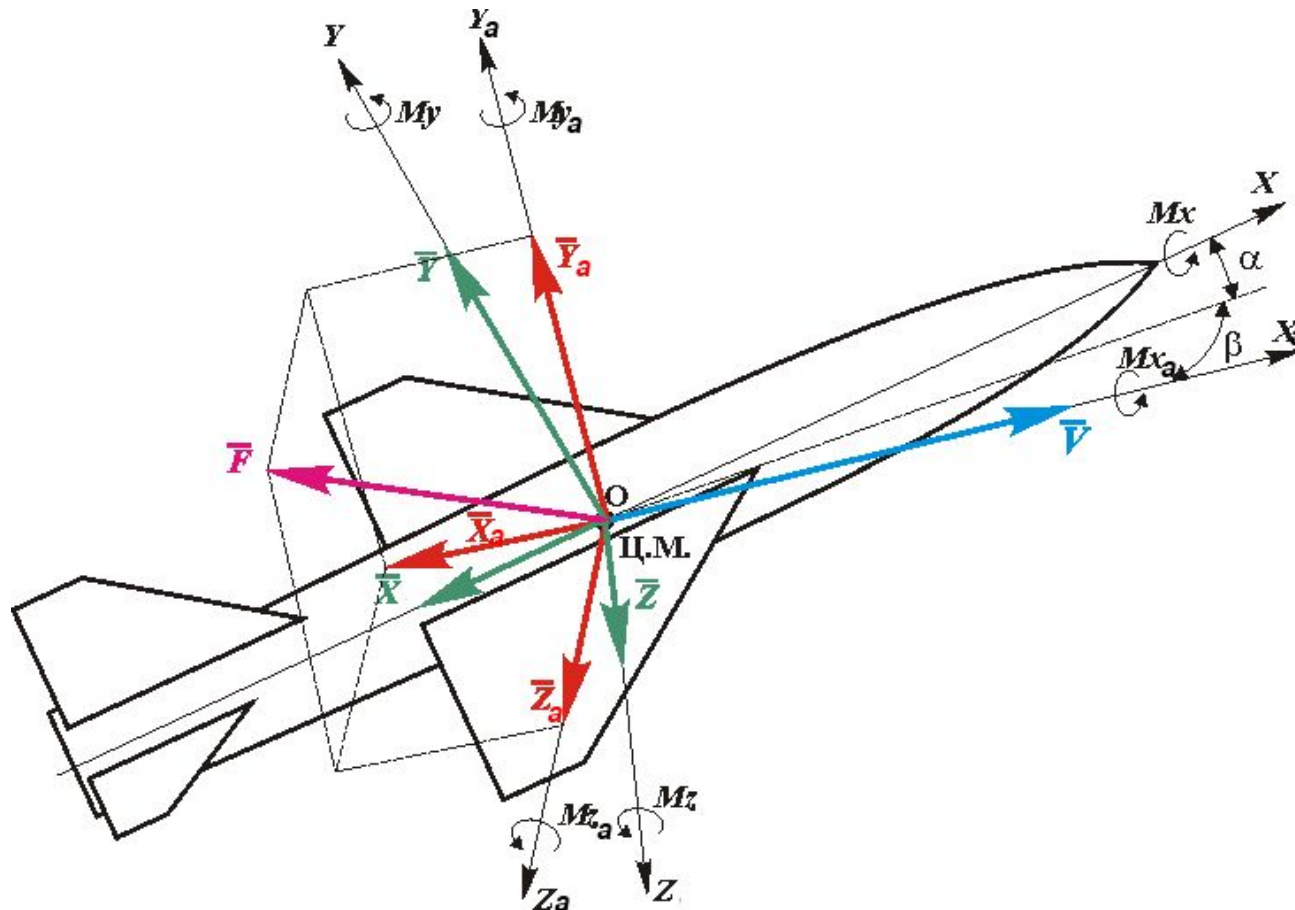
l – характерная длина (длина ракеты);

m – безразмерный аэродинамический коэффициент, зависящий от формы ЛА, параметров полёта и параметров окружающей среды.

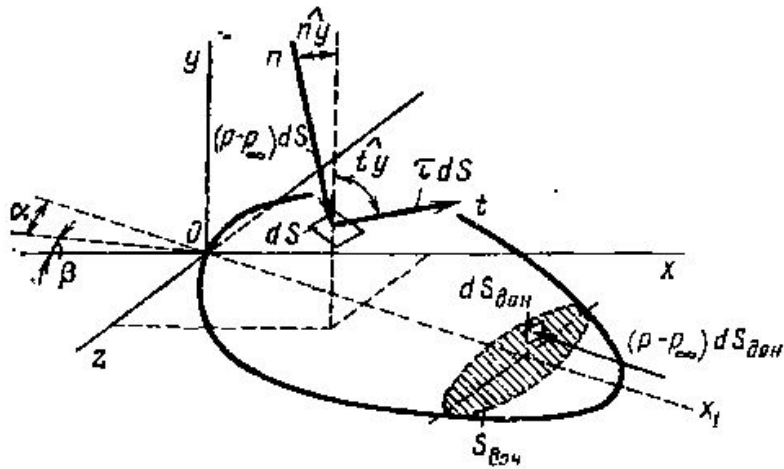
Компоненты аэродинамической силы



Компоненты аэродинамической силы



Компоненты аэродинамической силы

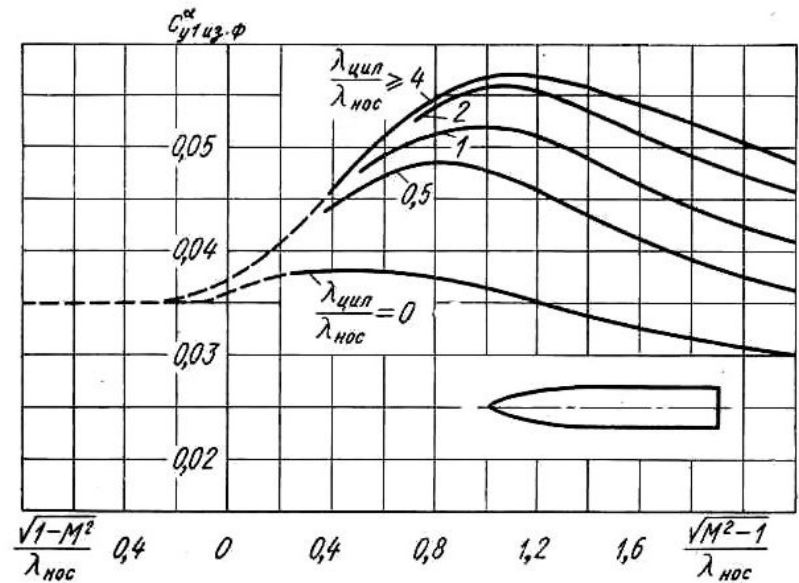
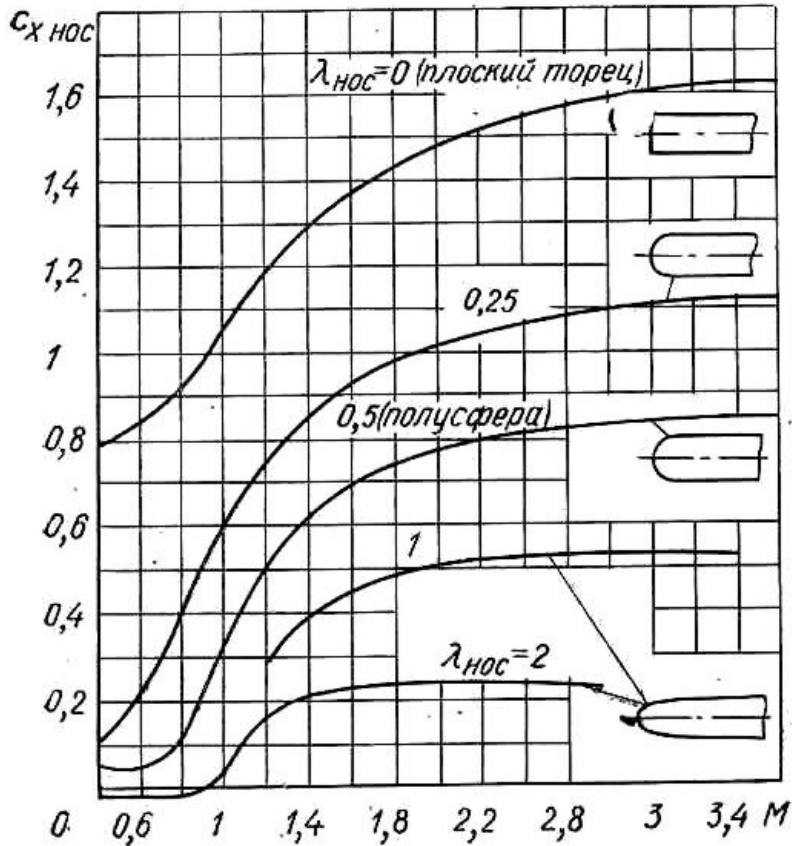


Аэродинамические коэффициенты

Методы получения значений аэродинамических коэффициентов

1. Аэродинамический эксперимент.
2. Численные методы (метод конечных объёмов и пр.).
3. Интерполяция между известными конфигурациями.

Интерполяция между известными конфигурациями (пример)



Выражение аэродинамической силы для КА

В разработке

Статическая устойчивость ЛА

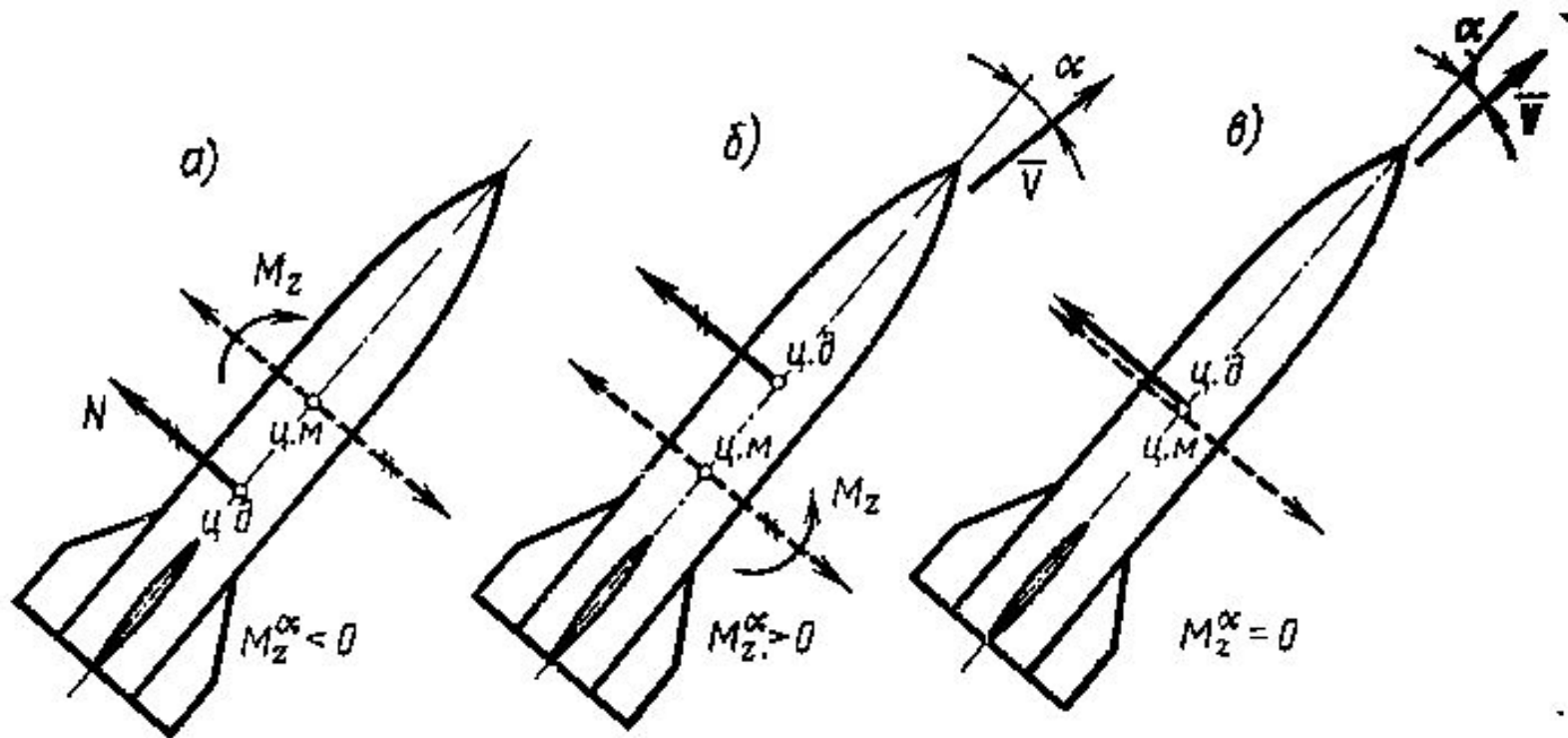
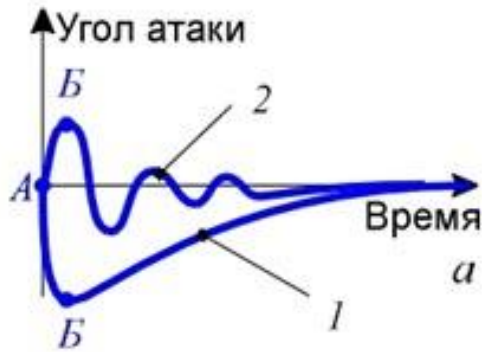


Рис 1 4.2. Анализ статической устойчивости летательного аппарата:
а — статическая неустойчивость; б — статическая устойчивость; в — нейтральность в отношении статической устойчивости

Статическая устойчивость ЛА



Статически устойчивый ЛА



Статически неустойчивый ЛА



Статически нейтральный ЛА

Критерии статической устойчивости

Запас устойчивости

$$m_z^{C_y} = \bar{x}_{\text{ц.м.}} - \bar{x}_F$$