Баллистика и аэродинамика

Недогарок А.А., ассистент каф. СМ3

Рекомендуемая литература

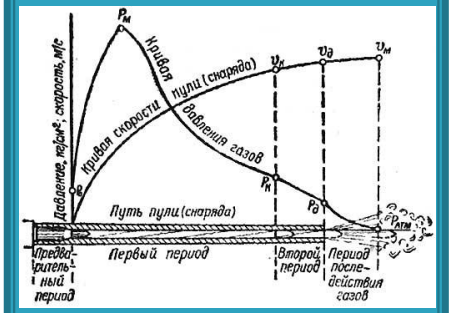
1. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. – М.: Дрофа, 2004.
2. Лысенко Л.Н. Наведение и навигация баллистических ракет. Учебное пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007 г.
3. Дмитриевский А.А. и др. Внешняя баллистика: учебник для студентов втузов / А.А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко, С.С. Богодистов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1991.

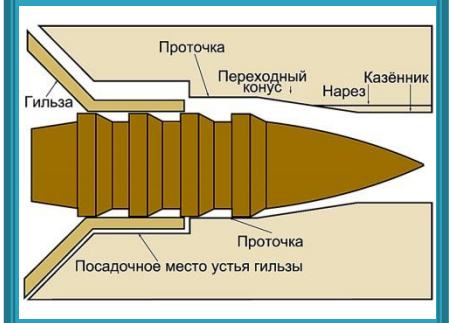
Разделы баллистики

Баллистика

Внутренняя

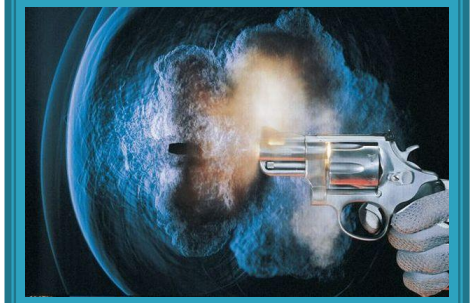
Interior Ballistics





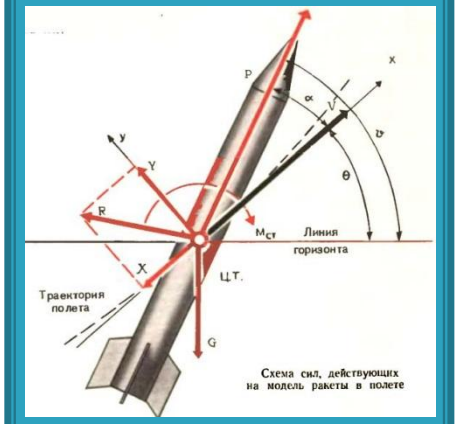
Промежуточная

Intermediate Ballistics



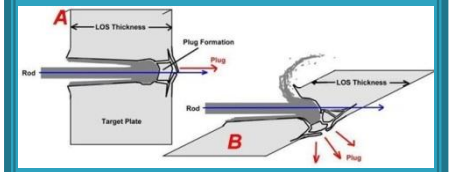
Внешняя

Exterior Ballistics

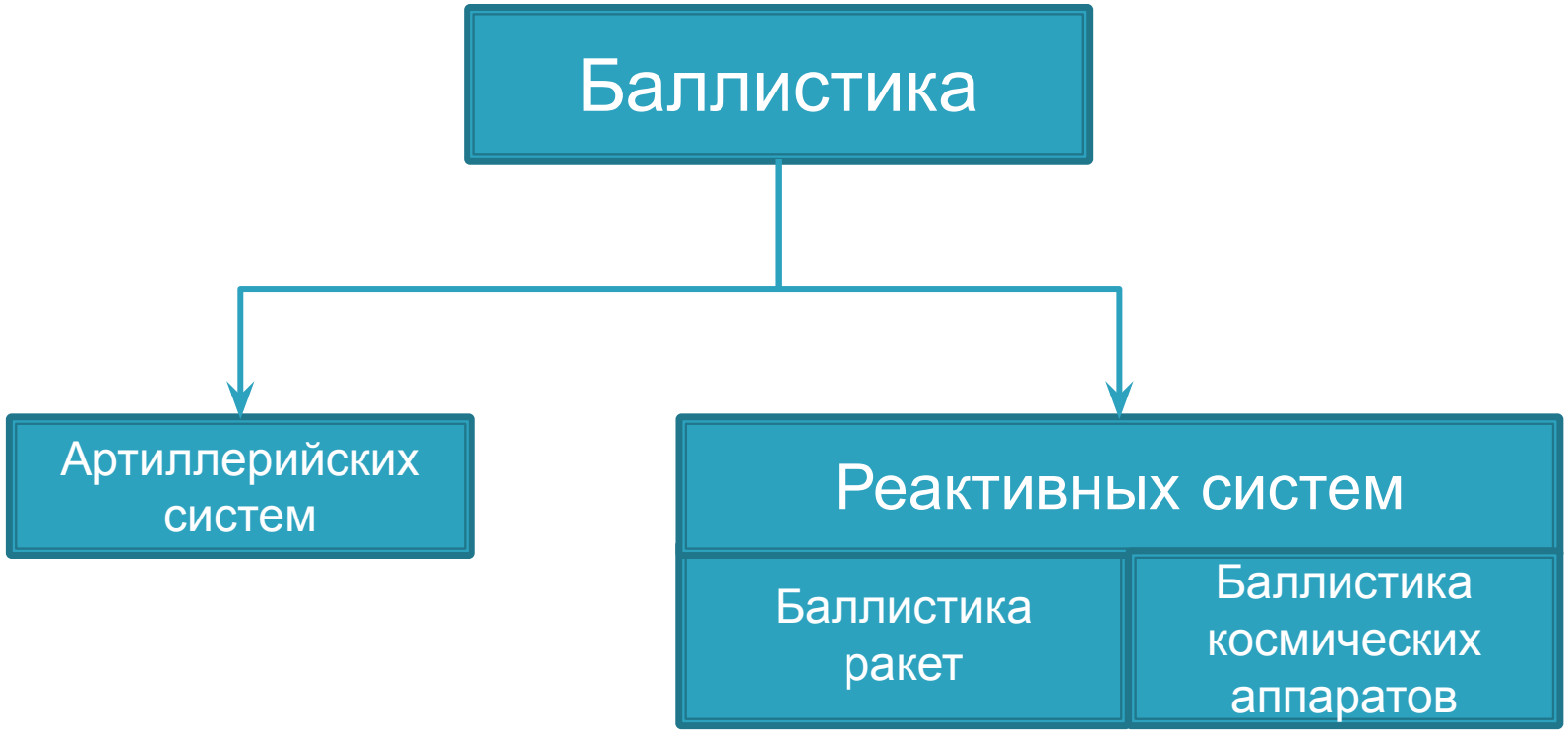


Терминальная (конечная)

Terminal Ballistics



Разделы баллистики



Базовые определения

Баллистика – наука о движении снарядов и ракет.
$\beta\alpha\lambda\lambda\omega$ (греч.) – «бросаю».

Внутренняя баллистика (Interior Ballistics) изучает движение снаряда в канале ствола артиллерийского орудия.

Промежуточная баллистика (Intermediate Ballistics) – разделы внутренней баллистики, посвящённые рассмотрению движения снаряда непосредственно после выхода из канала ствола в сопутствующей струе истекающего вслед за снарядом газа.

Внешняя баллистика (Exterior Ballistics) – наука о полёте ракет и снарядов после прекращения их силового взаимодействия с пусковой установкой.

Задачи внешней баллистики

Первая (основная/прямая) задача внешней баллистики – расчёт траекторий движения ЛА по заранее известным данным.

Вторая (обратная) задача внешней баллистики – определение проектных баллистических характеристик движения по априорно известным характеристикам ракетной или артиллерийской системы, отыскание оптимальных режимов движения и траекторий.

Третья задача баллистики – расчёт стабилизации снарядов.

Четвертая задача – изучение факторов, влияющих на рассеивание траектории, определение степени их воздействия и рассмотрение способов уменьшения рассеивания и повышения точности стрельбы.

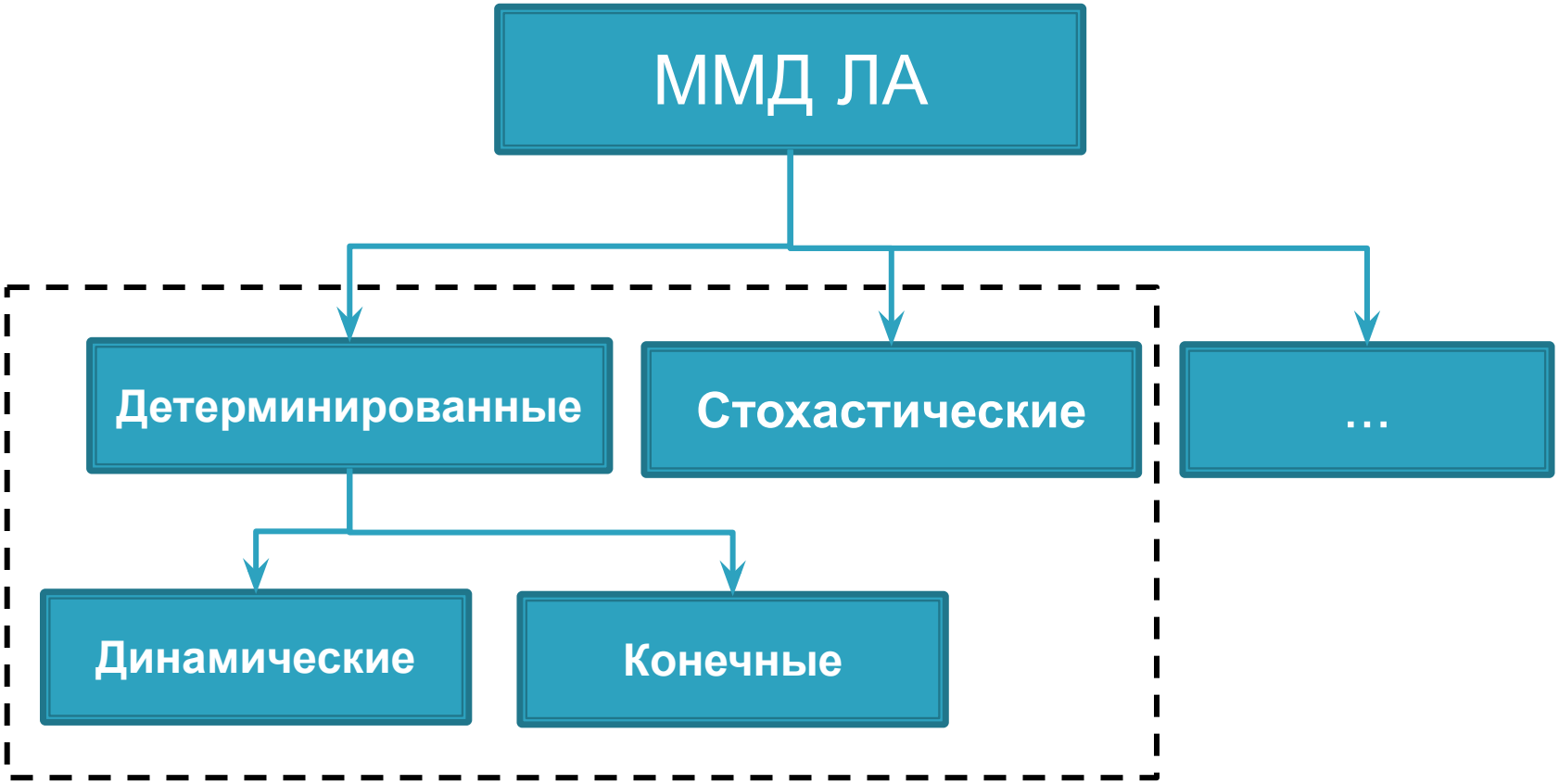
Математическая модель

Математическая модель (ММ) – научно обоснованная схематизация действительного поведения системы/объекта в форме, которая даёт возможность производить необходимые вычисления с целью получения решения требуемой задачи исследования системы/объекта.

Требования к ММ:

- ММ должна однозначным образом описывать действительное поведение системы/объекта;
- ММ должна наиболее точно описывать действительное поведение системы/объекта;
- ММ должна быть достаточно простой в вычислительном отношении.

Математические модели движения ЛА



Математические модели движения ЛА

Динамические модели записываются в виде системы конечно-разностных соотношений, обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = f(t, \bar{\mathbf{x}}), \qquad \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (*)$$

и дифференциальных уравнений в частных производных.

Конечные модели записываются с помощью системы аналитических выражений, получаемых в результате аналитического интегрирования системы (*):

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = F(t, \bar{\mathbf{x}}_0), \qquad \bar{\mathbf{x}}_0 \in K \qquad (**)$$

(K – множество возможных начальных условий)

В случае ***стохастических моделей*** правые части уравнений (*,**) содержат вектор случайных возмущений.

Силы, действующие на ЛА

- Сила тяги
- Аэродинамические силы
- Сила тяготения
- Управляющие силы и моменты
- …

Реактивная сила Мещерского

$\Delta\vec{L}$– приращение количества движения ЛА за время Δt. По закону сохранения импульса:

$$\Delta\vec{L} = \vec{F} \cdot \Delta t; \qquad (*)$$

$\vec{F}$– равнодействующая внешних сил.

В момент времени t импульс (количество движения) летательного аппарата можно выразить в виде

$$\vec{L} = m\vec{V};$$

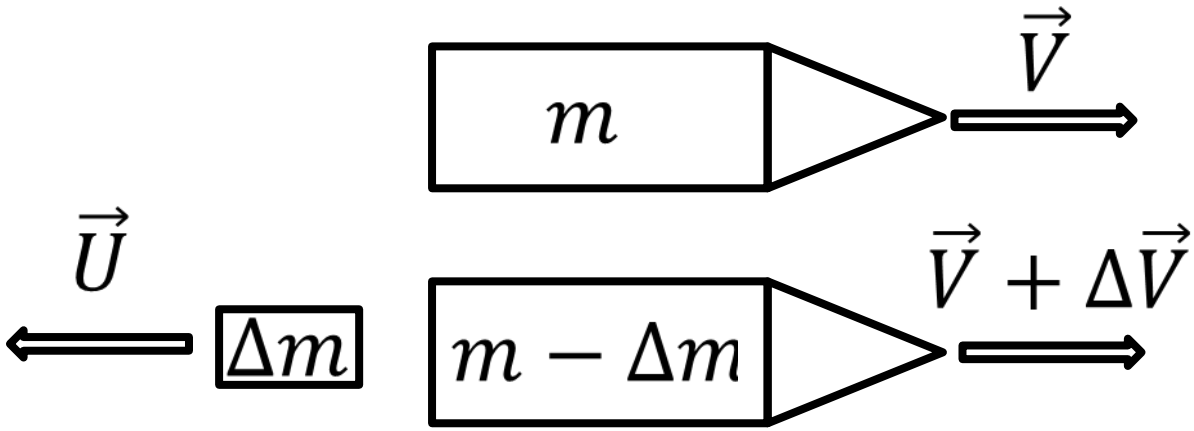
в момент $(t + \Delta t)$

$$\vec{L} + \Delta\vec{L} = (m - \Delta m)\left(\vec{V} + \Delta\vec{V}\right) + \Delta m\vec{U};$$

Δm – расход массы ЛА за время Δt;

$\vec{U}$ – скорость продуктов сгорания в неподвижной системе координат.

Реактивная сила Мещерского



Тогда $\Delta\vec{L}$ можно выразить также в виде

$$\Delta\vec{L} = m\Delta\vec{V} + \Delta m\left(\vec{U} - \vec{V} - \Delta\vec{V}\right) \qquad (**)$$

Приравняем формулы (*) и (**)

$$m\Delta\vec{V} = \vec{F}\Delta t - \Delta m\left(\vec{U} - \vec{V}\right) + \Delta m\Delta\vec{V}.$$

Отбрасываем $\Delta m\Delta\vec{V}$ как слагаемое второго порядка малости, делим на Δt и полагаем $\Delta t \to 0$ получим

$$m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \left|\frac{dm}{dt}\right| \cdot \vec{w};$$

Реактивная сила Мещерского

$$\vec{w} = \vec{U} - \vec{V};$$

$$P_{\text{м}} = -\left|\frac{dm}{dt}\right| \cdot \vec{w} = -\dot{m} \cdot \vec{w} \text{ – реактивная сила Мещерского}$$

$$m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{P}_{\text{м}} \text{ – уравнение Мещерского}$$

Тяга и реактивная сила

Реактивная сила – равнодействующая газо- и гидродинамических сил, действующих на внутренние поверхности ракетного двигателя при истечении из него продуктов сгорания.

Тяга ДУ – равнодействующая реактивной силы и сил давления окружающей среды, действующих на внешние поверхности ДУ, за исключением сил внешнего аэродинамического сопротивления.

Тяга реактивной ДУ

$$P = \underbrace{\dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c}_{\text{Динамическая тяга}} + \underbrace{S_{\text{а}}(p_{\text{а}} - p_{\text{н}})}_{\text{Статическая тяга}}$$

$\dot{m}_{\text{топл}} \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right]$ – секундный массовый расход топлива;
$w_c \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$ – скорость продуктов горения на выходном сечении сопла;
$S_{\text{а}}[\text{м}^2]$ – площадь выходного сечения сопла;
$p_{\text{а}}[\text{Па}]$ – давление газов на срезе сопла;
$p_{\text{н}}[\text{Па}]$ – давление окружающей среды («н» – наружное).

Высотная добавка

Тяга на нулевой высоте:

$$P_0 = \dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_{\text{а}}(p_{\text{а}} - p_0).$$

Тяга на высоте h:

$$P(h) = \dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_{\text{а}}(p_{\text{а}} - p_{\text{н}}(h)).$$

Запишем в виде

$$P(h) = \dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_{\text{а}}(p_{\text{а}} - p_{\text{н}}(h)) + S_{\text{а}}p_0 - S_{\text{а}}p_0.$$

Преобразуем

$$P(h) = \underbrace{\dot{m}_{\text{топл}} \cdot w_c + S_{\text{а}}(p_{\text{а}} - p_0)}_{P_0} + S_{\text{а}}p_0 - S_{\text{а}}p_{\text{н}}(h);$$

Высотная добавка

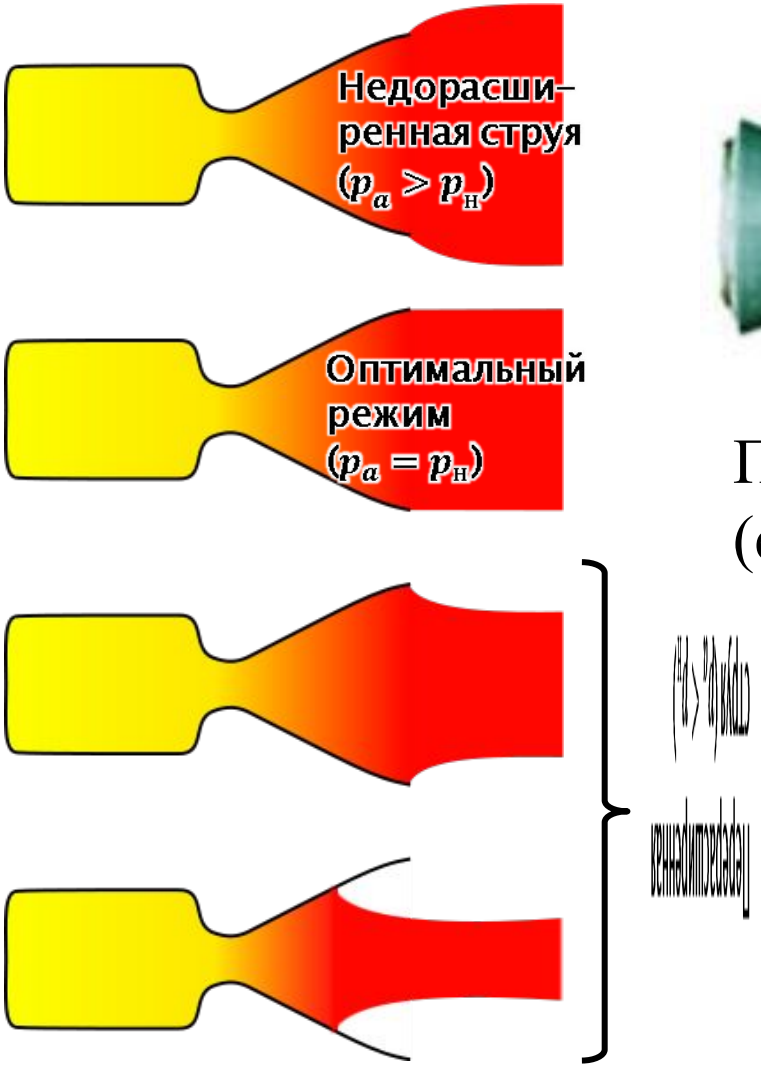
Получаем

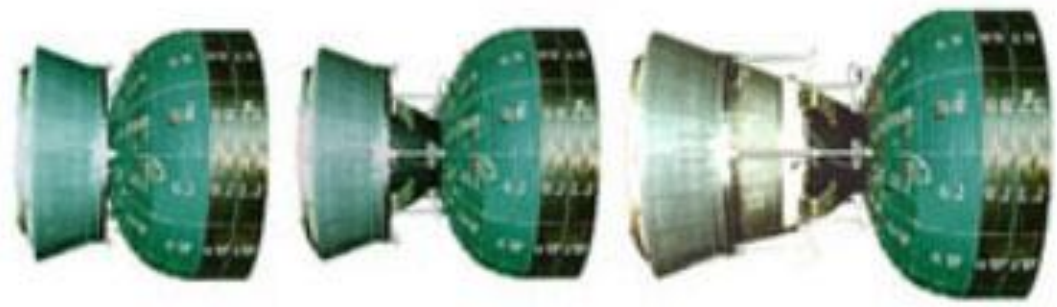
$$P(h) = P_0 + S_{\text{а}}(p_0 - p_{\text{н}}(h));$$

и

$$P(h) = P_0 + \underbrace{S_{\text{а}} p_0 \left(1 - \frac{p_{\text{н}}(h)}{p_0}\right)}_{\textbf{Высотная добавка}}$$

Режимы работы сопла





Пример РД с раздвижным насадком (expandable nozzle)

Основные характеристики реактивных ДУ

Введём величину $w_Э$ и приравняем

$$P = \dot{m} \cdot w_c + S_а(p_а - p_н) = \dot{m} \cdot w_Э;$$

$$\boxed{w_Э = w_c + \frac{S_а(p_а - p_н)}{\dot{m}} \text{ – } \textit{эффективная скорость истечения}}$$

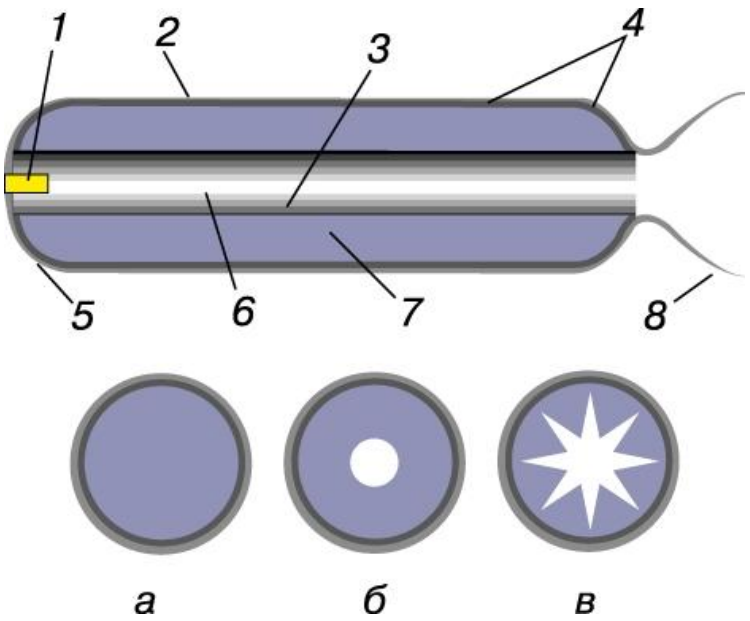
В пустоте

$$w_{Э0} = w_c + \frac{S_а p_а}{\dot{m}};$$

на поверхности Земли

$$w_Э = w_c + \frac{S_а(p_а - p_0)}{\dot{m}}.$$

Тяга РДТТ



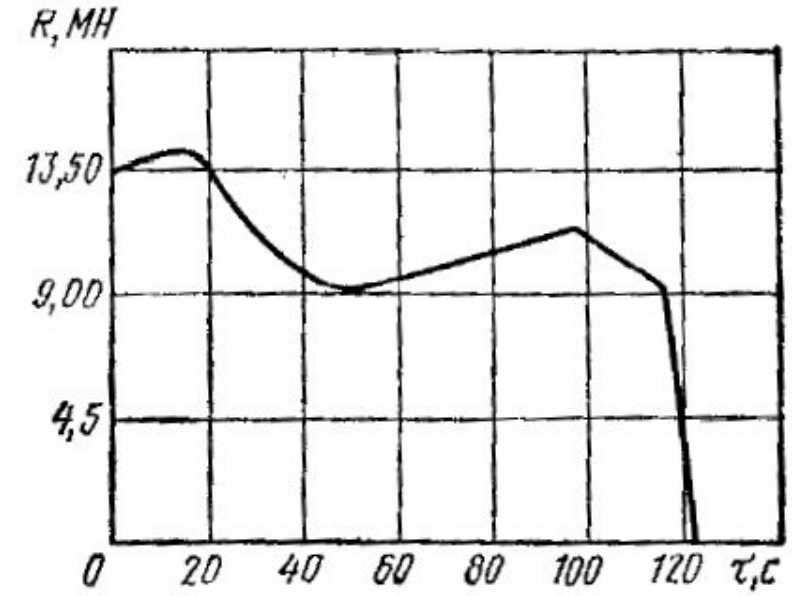


Рис. 1.9. Изменение тяги во времени

Основные характеристики реактивных ДУ

Высотная добавка эффективной скорости истечения

$$\Delta w_{Э} = w_{Э} - w_{Э0} = \frac{S_{а}(p_{а} - p_{н})}{\dot{m}} \approx 15 \ldots 20\% \, w_{Э0}$$

Удельная тяга (для ЖРД)

$$P_{уд} = \frac{P}{\dot{m} g_0} = \frac{w_{Э}}{g_0}, \qquad [с]$$

Удельный импульс (для РДТТ)

$$I_{уд} = \int_0^{t_к} P(t)dt \Big/ \int_0^{t_к} \dot{m}dt, \qquad \left[\frac{м}{с}\right]$$

Тяготение

Модели гравитационного поля Земли

Тип	*Область применения*
Плоская	Стрельба на ближние дальности (до 10-20 км)
Сферическая	Баллистическое проектирование и приблизительные расчёты, высокоорбитальные ИСЗ, межпланетные перелёты
Эллипсоид: Референц-эллипсоиды Обобщённый эллипсоид	Прогнозы движения низкоорбитальных ИСЗ и МБР
Геоид и его приближенное представление разложением в ряд сферических функций	Точные прогнозы движения ИСЗ и МБР

Точность и вычислительная сложность

Потенциал гравитационного поля Земли

Силовое поле – часть пространства, в котором на материальную точку действует сила, зависящая от координат точки и времени

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z, t)$$

Стационарное силовое поле не зависит от времени

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$$

Стационарное силовое поле называется ***потенциальным***, если проекции силы $\bar{F}$ на оси Ox, Oy, Oz можно выразить через скалярную функцию $U(x, y, z)$:

$$\bar{F} = grad(U)$$

Функция $U(x, y, z)$ называется силовой функцией.

Гравитационный потенциал равен отношению потенциальной энергии материальной точки, помещённой в рассматриваемую точку гравитационного поля, к массе этой точки. Впервые понятие гравитационного потенциала ввёл в науку Адриен Мари Лежандр в конце XVIII века.

Эллиптическая модель Земли

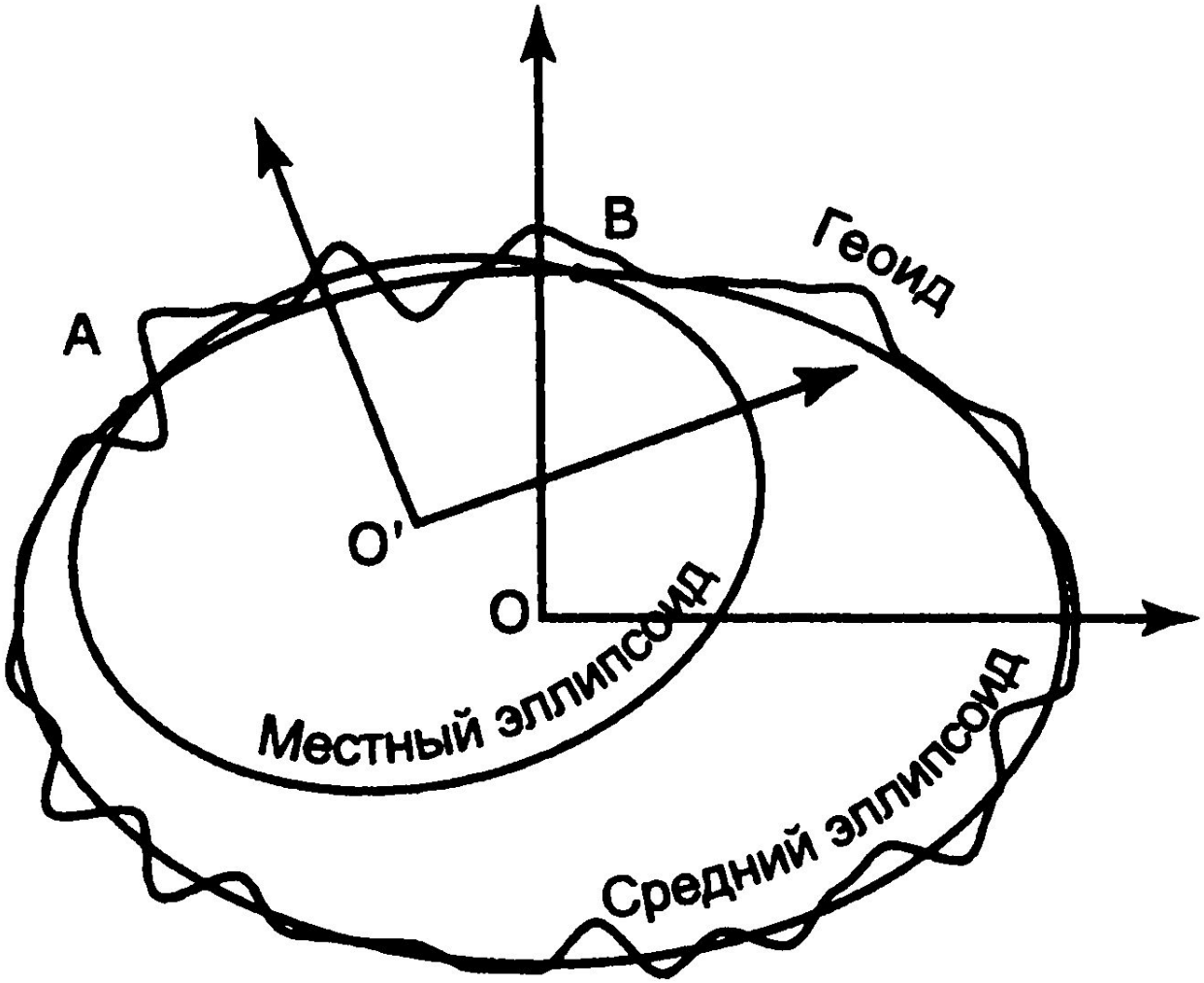
Референц-эллипсоид – модель эллипсоида, наилучшим образом удовлетворяющая поверхности территории какой-либо страны или региона.

СССР - референц-эллипсоид Ф.Н. Красовского (1964)
Двухосный, большая полуось $a = 6378245$ м,
малая – $b = 6356863$ м, сжатие $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1/298{,}3$

США и Канада – референц-эллипсоид Кларка;
Италия – референц-эллипсоид Хейфорда;
Норвегия – референц-эллипсоид Бесселя.

Общий земной эллипсоид – эллиптическая аппроксимация геоида.

Эллиптическая модель Земли



Ускорение свободного падения эллипсоида

Если не требуется особо высокая точность расчетов, то можно ограничиться первыми членами разложения в ряд, т. е. принять

$$g_{\text{т}r} = \frac{d_{00}}{r^2} - \frac{3}{2}\,\frac{d_{20}}{r^4}(5\sin^2\varphi_{\text{ц}} - 1); \qquad (1.15)$$

$$g_{\text{т}\omega} = 3\,\frac{d_{20}}{r^4}\sin\varphi_{\text{ц}}, \qquad (1.16)$$

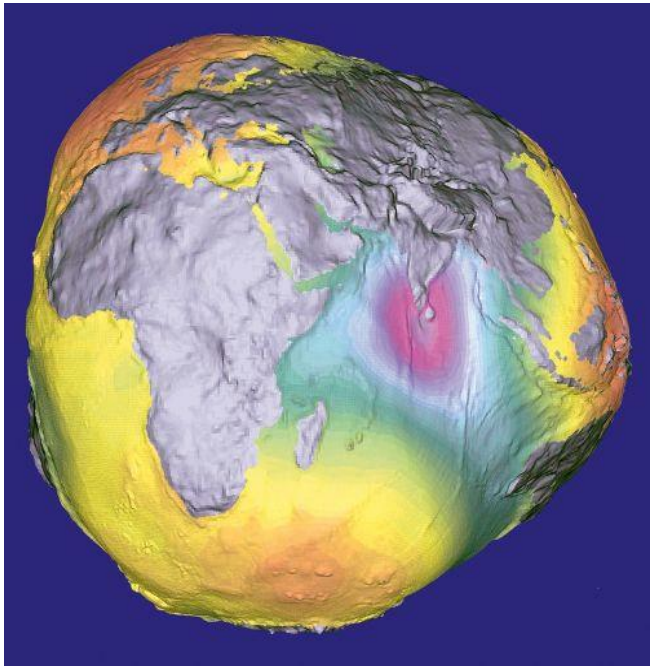
Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, переработанное и доп. М., «Машиностроение», 1973, 616 с.

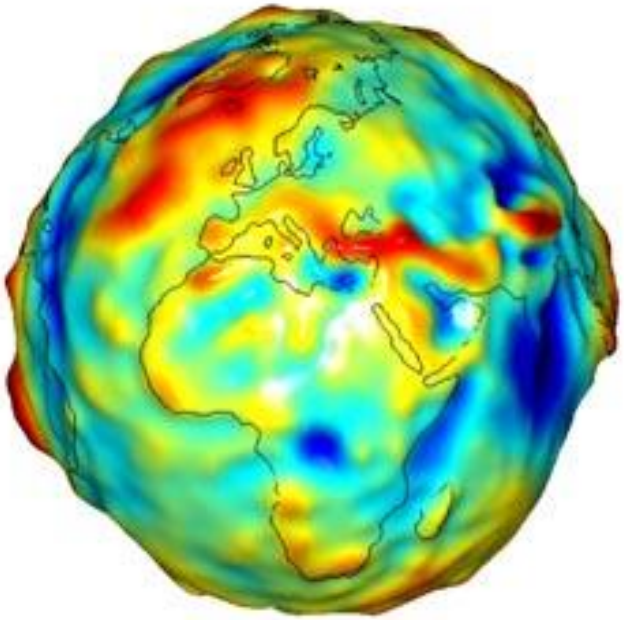
Геоид

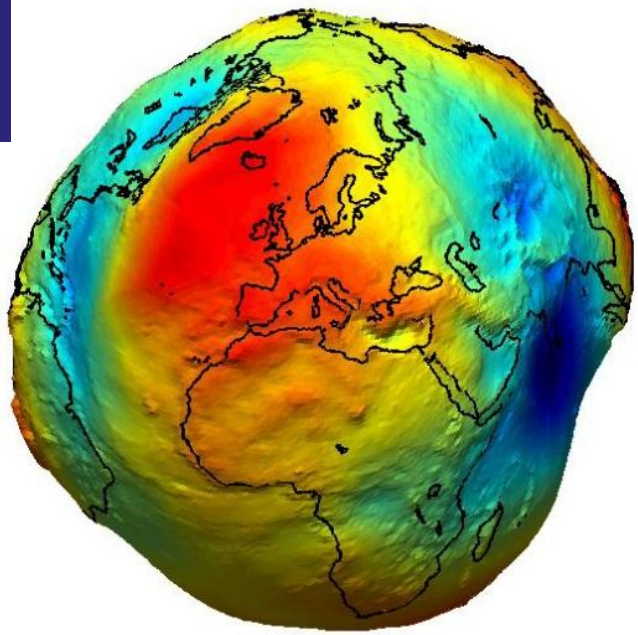
1873 г. Е. Листинг (Германия)

Геоид – фигура образованная эквипотенциальной поверхностью, потенциал поля тяготения которой равен потенциалу на уровне моря.

Геоид – уровенная поверхность, совпадающая на океанах с невозмущённой поверхностью воды и продолженная под континентами по закону образования уровенных поверхностей (перпендикулярно к направлению силы тяжести в любой точке поверхности).







$$U(r,\ \varphi,\ \lambda) = \frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \times$$
$$\times \left(C_{nm} \cos m\,\lambda + S_{nm} \sin m\,\lambda\right) P_{nm}\left(\sin\ \varphi\right), \quad (1.9)$$

где r_0 — наибольший радиус поверхности принятой к рассмотрению физической модели Земли;

$$C_{nm} = \frac{1}{r_0^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int\limits_{(M)} r_i^n P_{nm}\left(\sin\ \varphi_i\right) \cos m\,\lambda_i\, dM;$$

$$S_{nm} = \frac{1}{r_0^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int\limits_{(M)} r_i^n P_{nm}\left(\sin\ \varphi_i\right) \sin m\,\lambda_i\, dM;$$

Функции Лежандра вычисляются по следующим формулам (при $n \geqslant 2$):

$$\underset{(m<n)}{P_{nm}}(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{(2n-1)\sin\varphi P_{n-1,m}(\sin\varphi) - (n+m-1)P_{n-2,m}(\sin\varphi)}{n-m},$$

$$\underset{(m=n)}{P_{nm}}(\sin\varphi) = (2n-1)\cos\varphi P_{n-1,n-1}(\sin\varphi),$$

$$P_{00}(\sin\varphi) = 1, \quad P_{10}(\sin\varphi) = \sin\varphi, \quad P_{11}(\sin\varphi) = \cos\varphi.$$

При расчетах на ЦВМ эти функции, как правило, аппроксимируются следующими рекуррентными зависимостями:

$$P_{nm} = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)\sin\varphi P_{(n-1)m} - (n+m-1)\,P_{(n-2)m}}{n-m} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n > m, \\ (2n-1)\,P_{(n-1)(n-1)}\cos\varphi \text{ при } n = m. \end{cases}$$

Стандартная форма записи потенциала сил притяжения Земли, рекомендованная Международным Астрономическим Союзом для практического использования

$$U = \frac{\mu}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{36}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_Э}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\varphi)[\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda]\right\}$$

где r – радиус точки;
φ – широта;
λ – долгота точки;
$R_Э$ – средний экваториальный радиус;
C_{nm}, S_{nm} – безразмерные коэффициенты, определяющие амплитуду гармоник и зависящие от формы Земли и распределения масс внутри неё.
$P_{nm}(\sin\varphi)$ – присоединённые сферические функции Лежандра (порядка n с индексом m)

Физическая и геометрическая интерпретация гармоник

Секториальные гармоники $(m = n)$ – учитывают изменения потенциала по долготе.
Зональные гармоники $(m = 0)$ – учитывают изменения потенциала по широте.
Тессеральные гармоники $(m \neq 0, n \neq m)$ – описывают как долготные, так и широтные эффекты ГПЗ

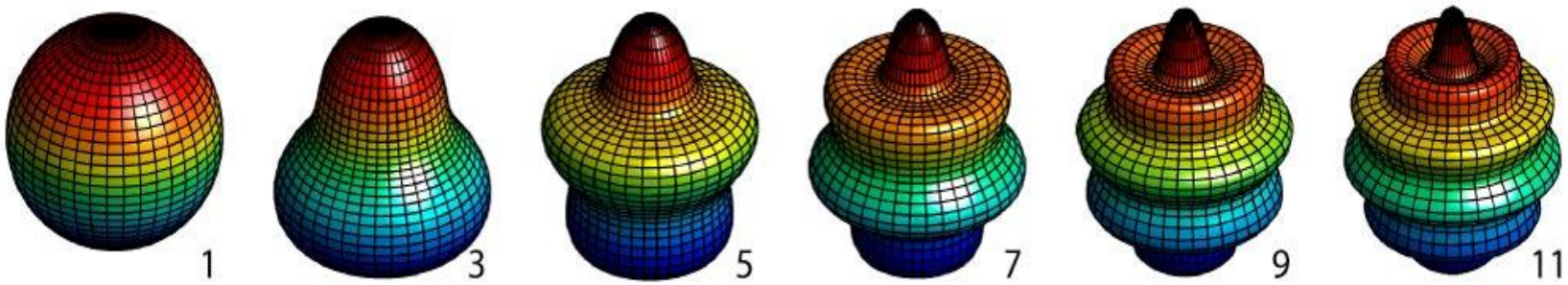
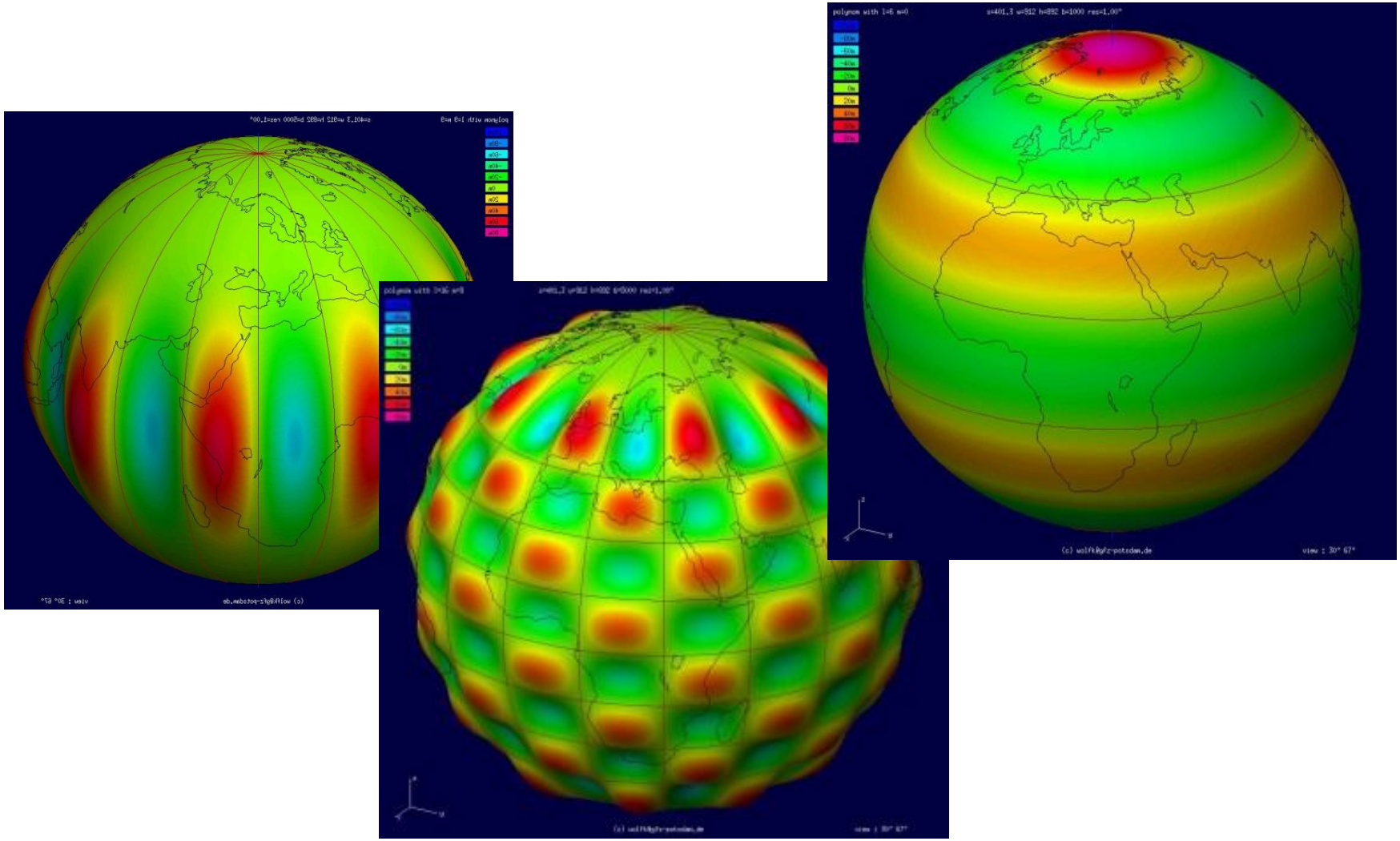
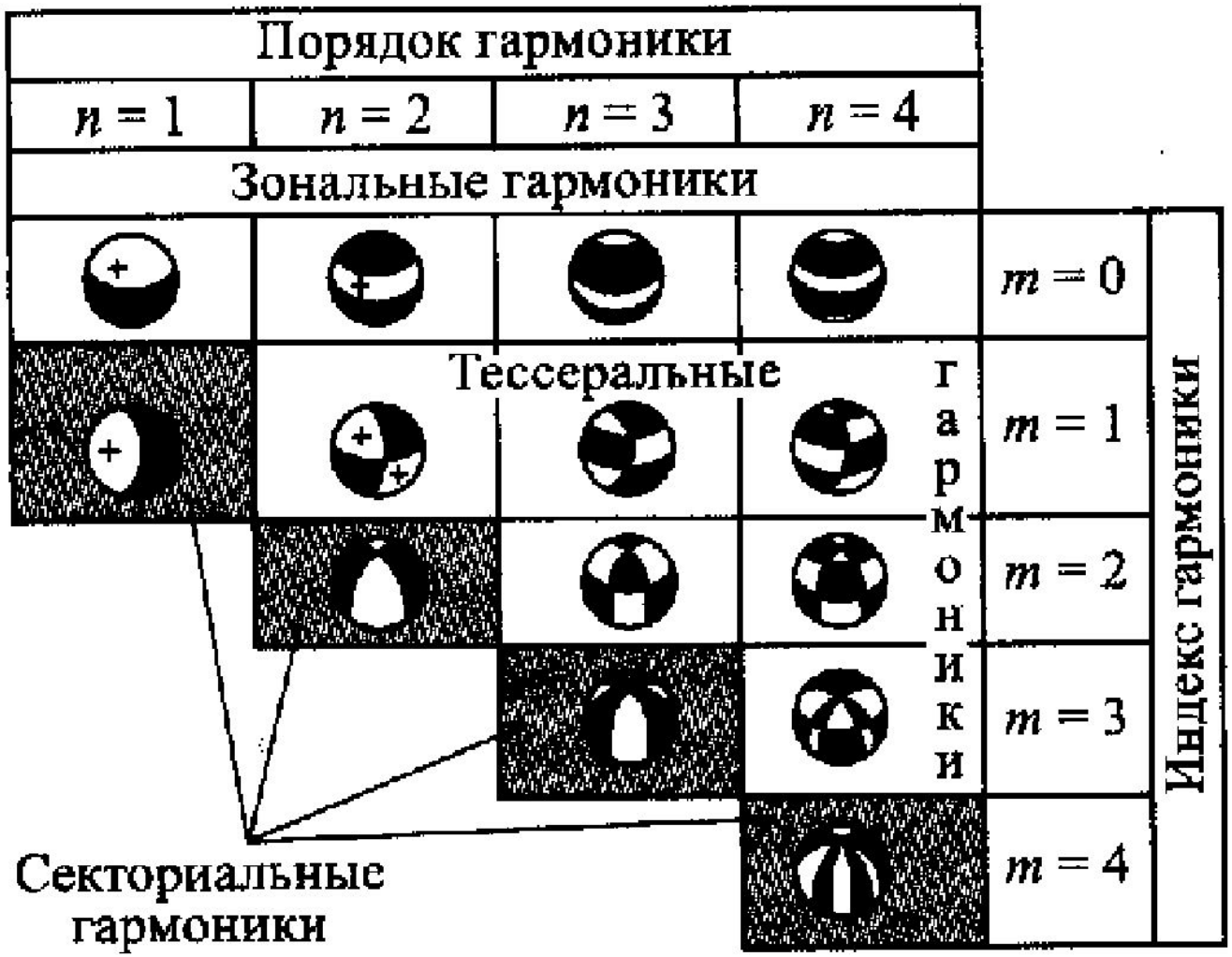


Fig. BF: Spherical harmonic basis functions for degrees l=1,3,5,7,9,11 and orders m=0.

© 2009 Ziegler@http://dbm.neuro.uni-jena.de

Физическая и геометрическая интерпретация гармоник




Порядок гармоники
n = 1
n = 2
n = 3
n = 4
Зональные гармоники
m = 0
Тессеральные
гармоники
m = 1
m = 2
m = 3
m = 4
Индекс гармоники
Секториальные
гармоники

Гравиметрия

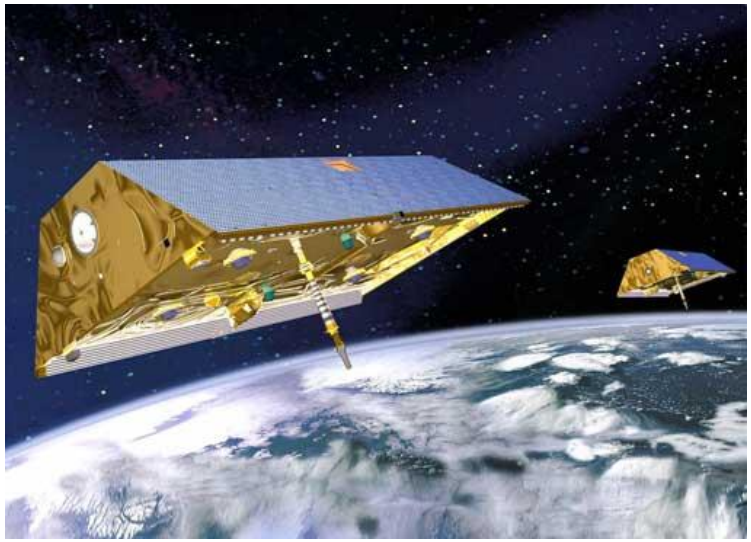
GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment)*

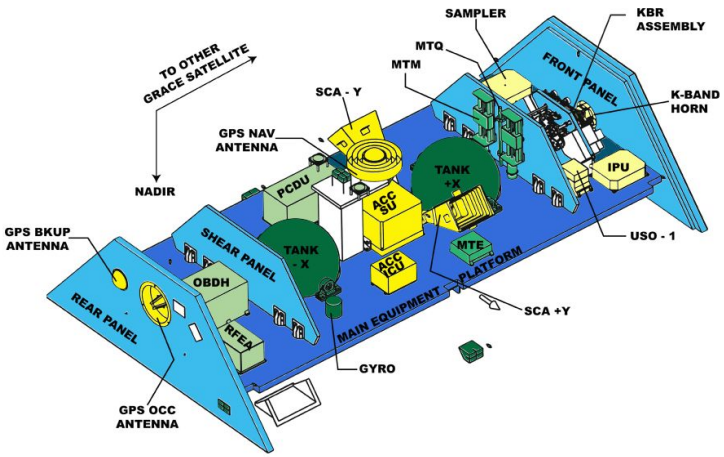
2 спутника на полярной орбите высотой 500 км.

Запущены 17 марта 2002 г.

Движение и ориентация измеряется с помощью GPS, звёздных датчиков, микроволновой и лазерной дальнометрии.

Спутники пролетают над каждым участком Земли приблизительно раз в месяц





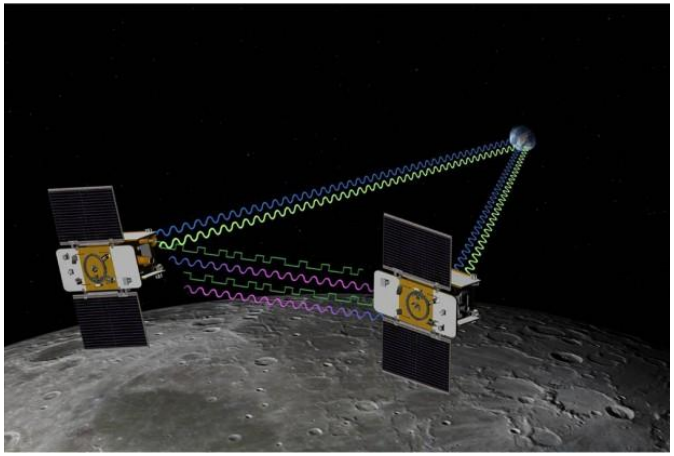
Гравиметрия

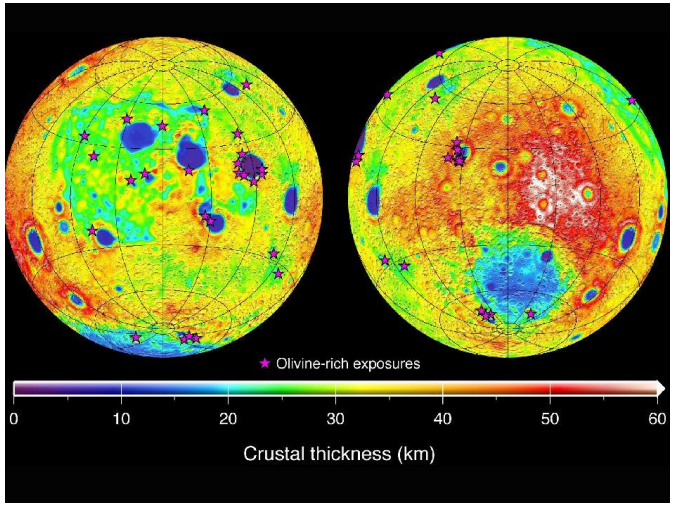
GRAIL (Gravity Recovery and Interior Laboratory)

2 окололунных КА - «Эбб» и «Флоу»

10 сентября 2011 г. - 18 декабря 2011 г.

Высота орбиты 55-23 км.





Сила тяжести и притяжения

$$\bar{F}_{\text{т}} = \bar{F}_{\text{пр}} + \bar{F}_{\text{ц}};$$

где $\bar{F}_{\text{т}}$ - сила тяжести;

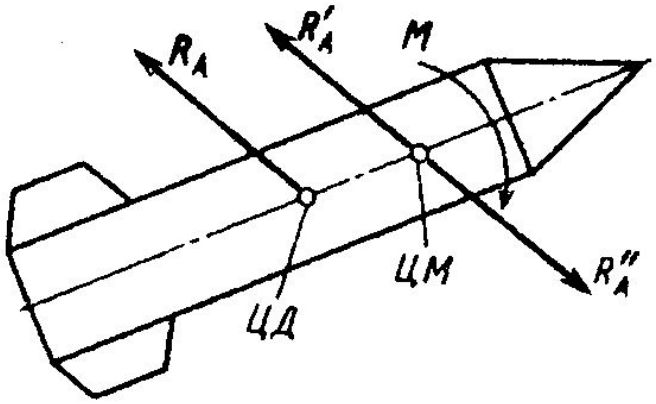
$\bar{F}_{\text{пр}}$ - гравитационная сила земного притяжения;

$\bar{F}_{\text{ц}}$ - центростремительная сила.

Понятия силы тяжести и притяжения часто путаются студентами, чего делать не стоит

Аэродинамические силы и моменты

Результирующая аэродинамическая сила R_A складывается из сил давления газа и сил трения. Она приложена в центре давления.



Удобно приводить результирующую к центру масс ЛА. В этом случае также появляется аэродинамический момент.

Полная аэродинамическая сила R'_A – сила, векторно равная R_A и приложенная в центре масс ЛА.

Полный аэродинамический момент M – момент, создаваемый R_A относительно центра масс ЛА.

Полная аэродинамическая сила выражается как

$$R_A = qS \cdot C_R(M, Re, \alpha, \dots)$$

где

- скоростной напор (или динамическое давление);

S – характерная площадь ЛА (часто – площадь миделевого сечения, площадь крыла и пр.);

C_R – **<u>безразмерный</u>** аэродинамический коэффициент, зависящий от формы ЛА, параметров полёта и параметров окружающей среды.

Полный аэродинамический момент выражается формулой

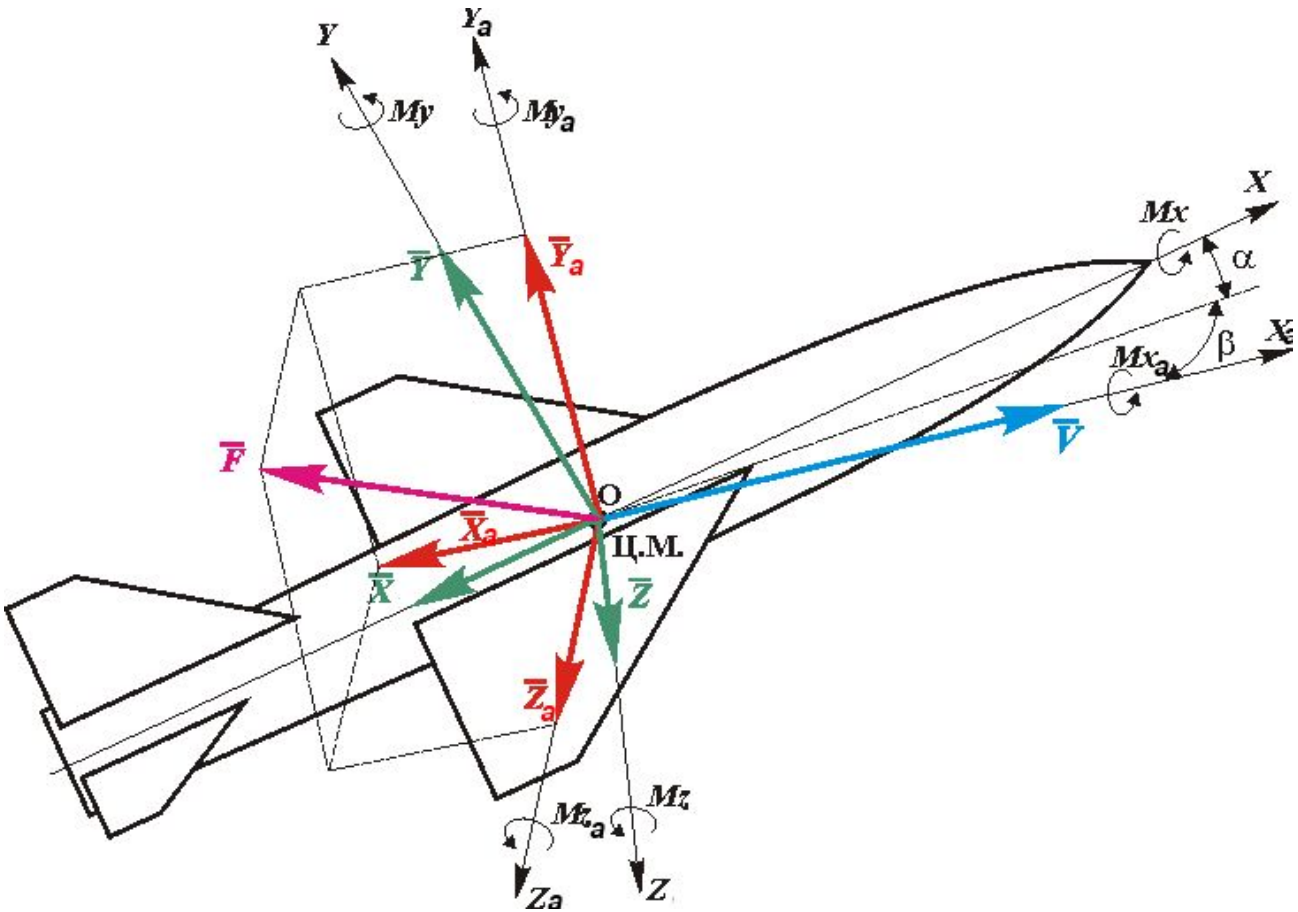
$$M = qSl \cdot m(M, Re, \alpha, \dots)$$

l – характерная длина (длина ракеты);

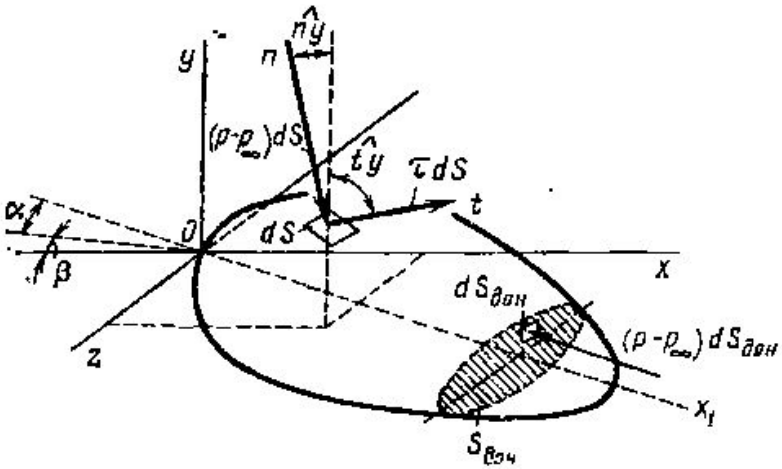
m – безразмерный аэродинамический коэффициент, зависящий от формы ЛА, параметров полёта и параметров окружающей среды.

Компоненты аэродинамической силы

Компоненты аэродинамической силы



Компоненты аэродинамической силы

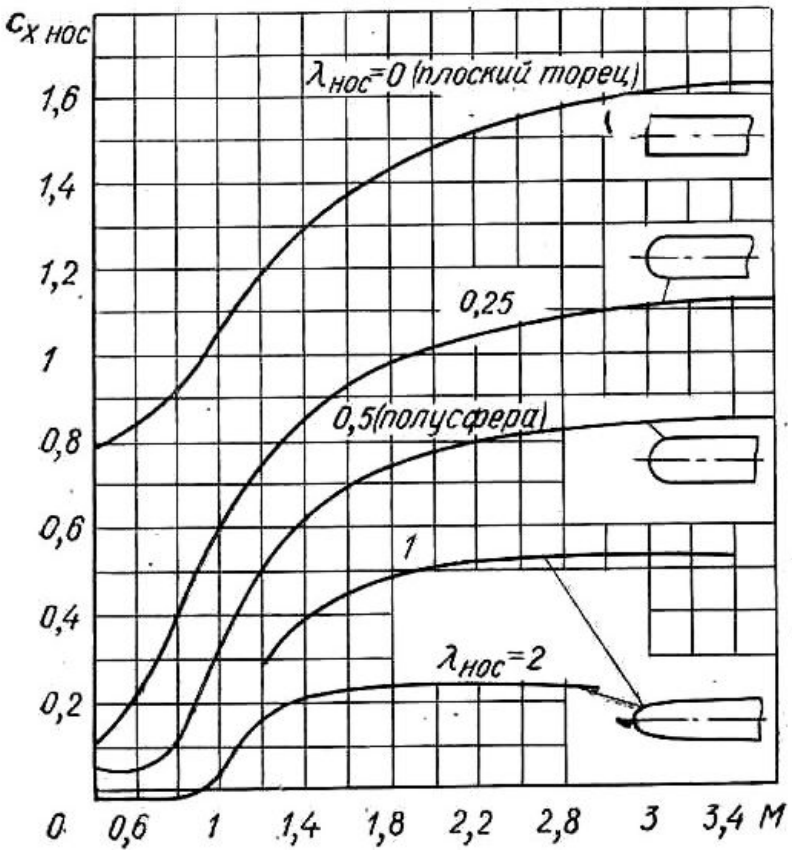


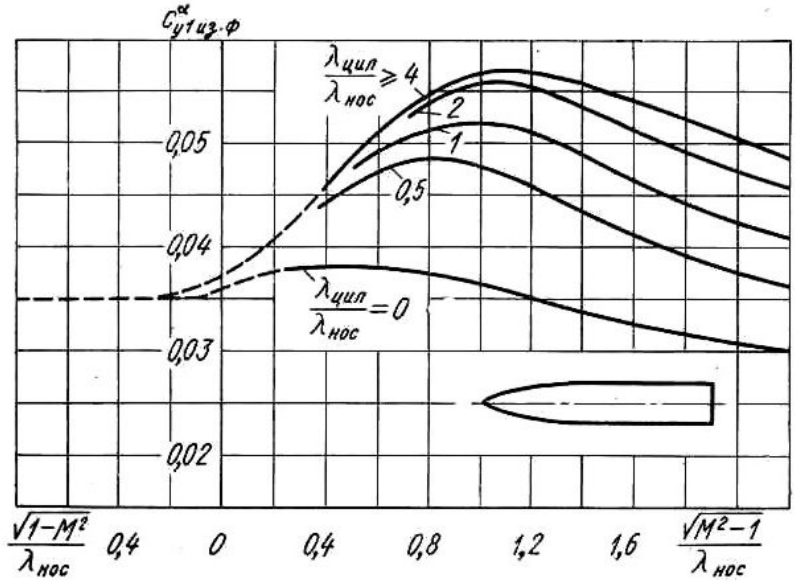
Аэродинамические коэффициенты

Методы получения значений аэродинамических коэффициентов

1. Аэродинамический эксперимент.
2. Численные методы (метод конечных объёмов и пр.).
3. Интерполяция между известными конфигурациями.

Интерполяция между известными конфигурациями (пример)





Выражение аэродинамической силы для КА

В разработке

Статическая устойчивость ЛА

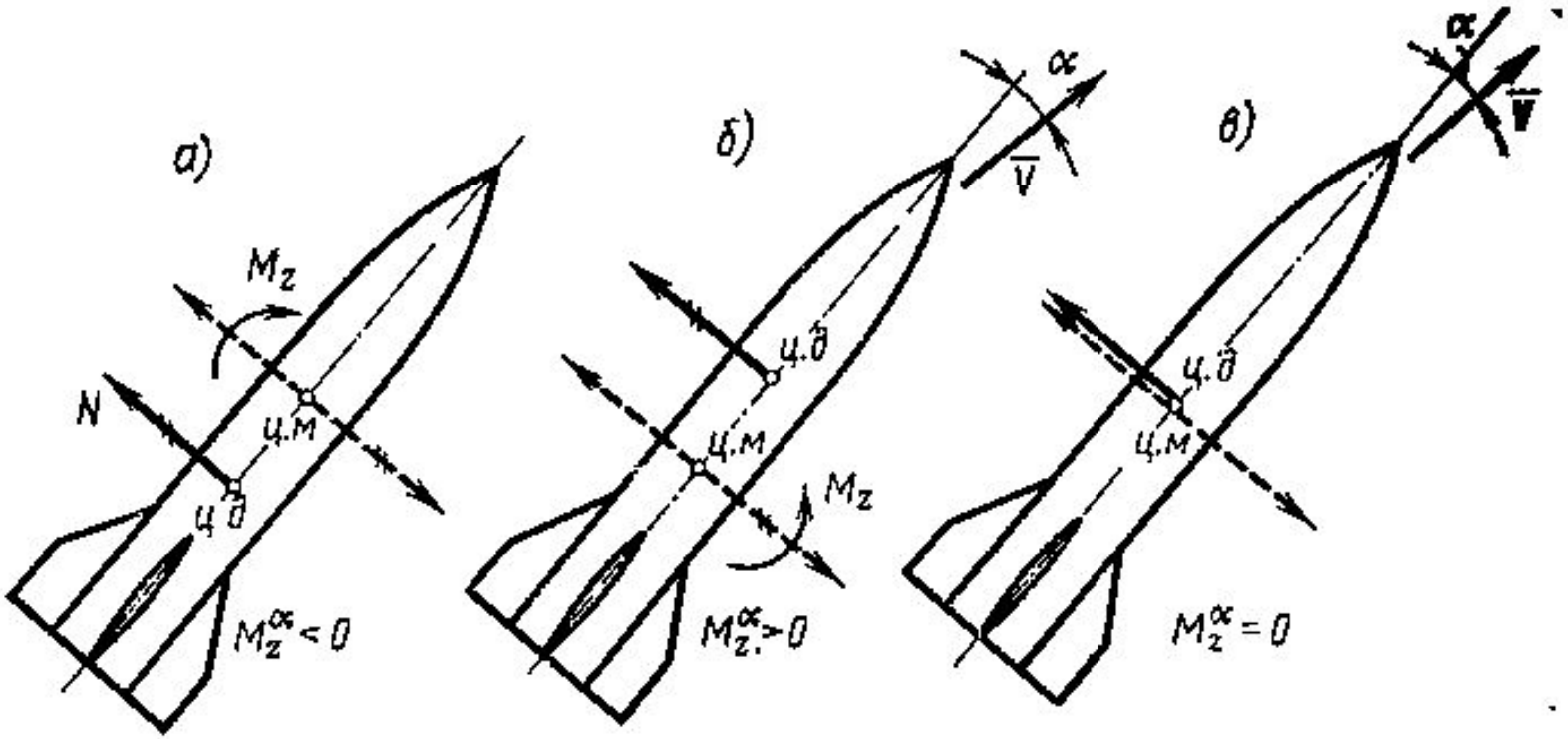
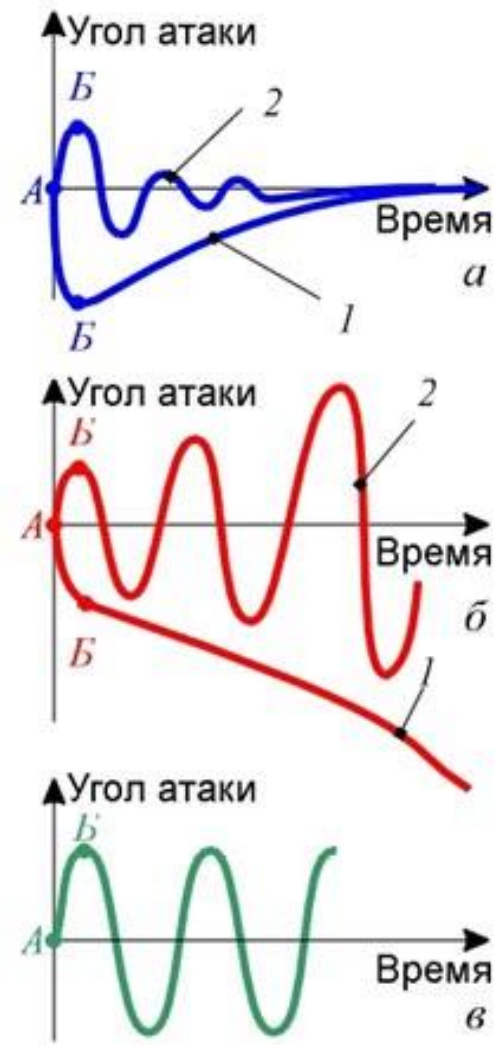


Рис 1 4.2. Анализ статической устойчивости летательного аппарата:
а — статическая неустойчивость; *б* — статическая устойчивость; *в* — нейтральность в отношении статической устойчивости

Статическая устойчивость ЛА



Статически устойчивый ЛА

Статически неустойчивый ЛА

Статически нейтральный ЛА

Критерии статической устойчивости

- Запас устойчивости

$$m_z^{c_y} = \bar{x}_{\text{ц.м.}} - \bar{x}_F$$