Взгляд на ЕГЭ по математике. 2019

Козлов Александр Иванович

Задание 1

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

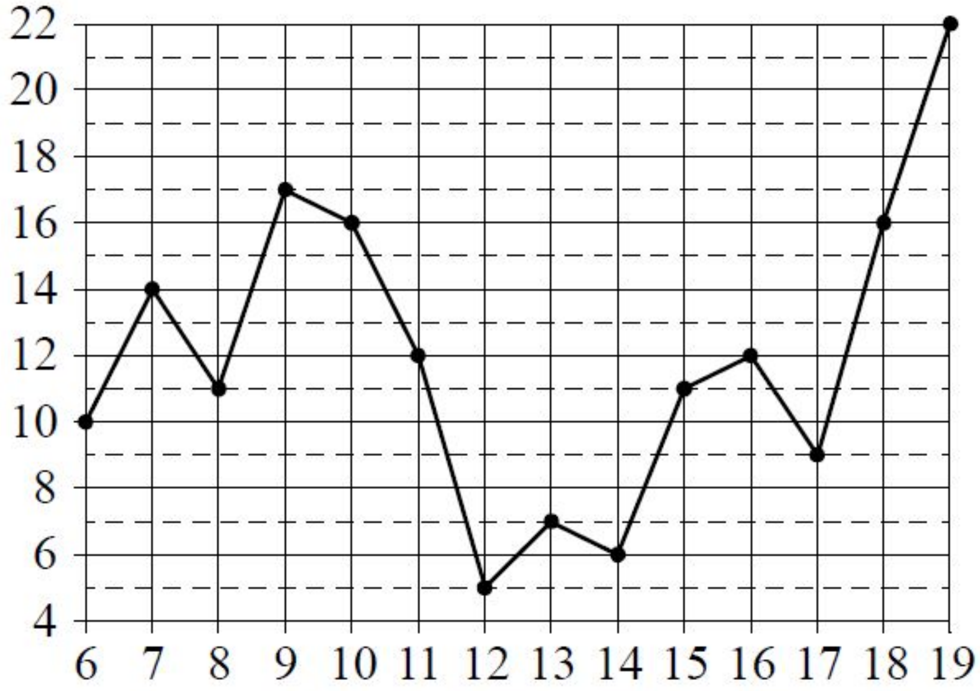
1 В среднем за день во время конференции расходуется 80 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. В пачке чая 50 пакетиков. Какого наименьшего количества пачек чая хватит на все дни конференции?

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61-80	в группе 81-100
80,56	98,28	100

Задание 2

2

На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Архангельске с 6 по 19 июня 1965 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую среднесуточную температуру в Архангельске за данный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Задание 2

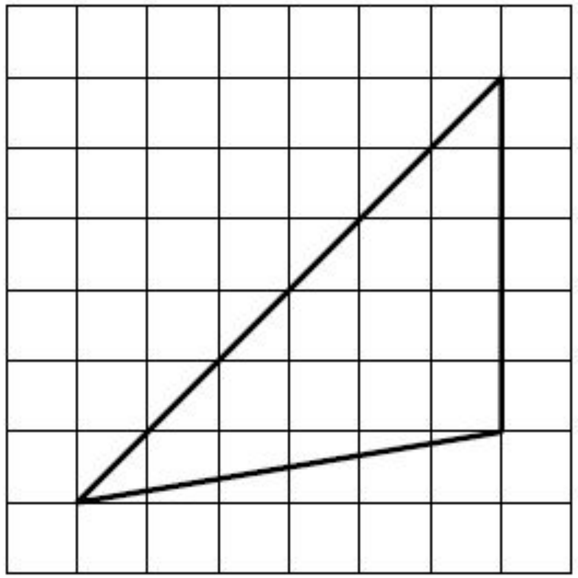
Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
72,22	97,85	100

Задание 3

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



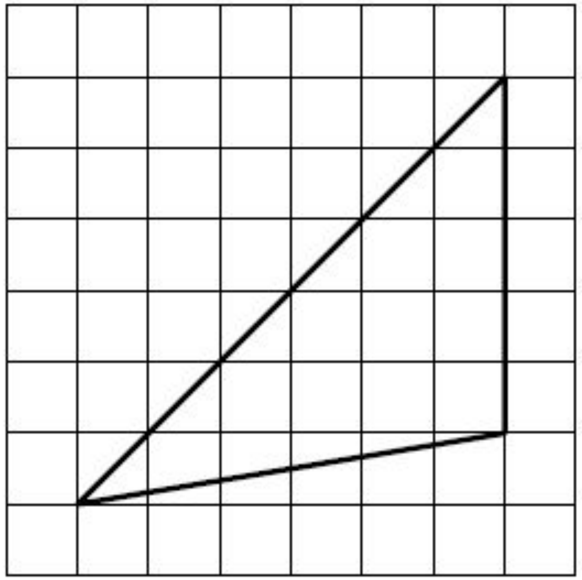
Задание 3

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
69,44	97,20	98,59

Задание 4

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Задание 4

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
2,78	98,93	98,59

Задание 5

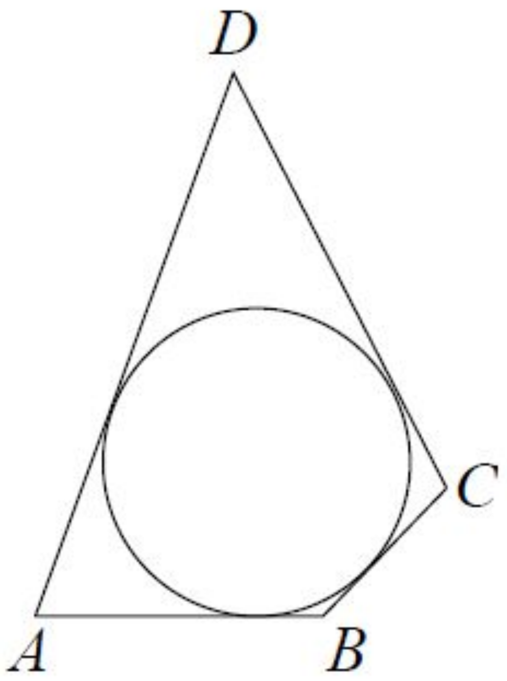
Уметь решать уравнения и неравенства

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-5} = 64$.

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
80,56	99,78	100

Задание 6

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 15$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



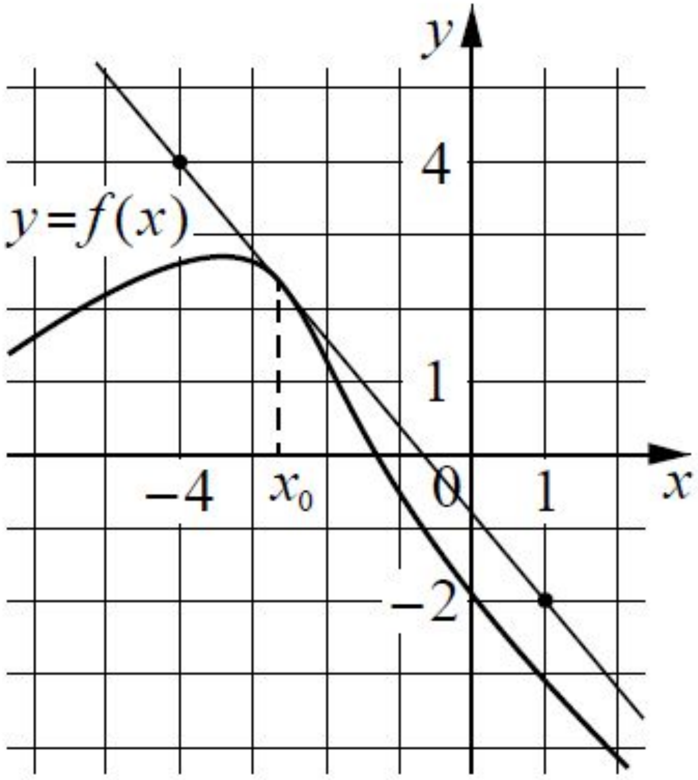
Задание 6

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
30,56	94,94	100

Задание 7

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Задание 7

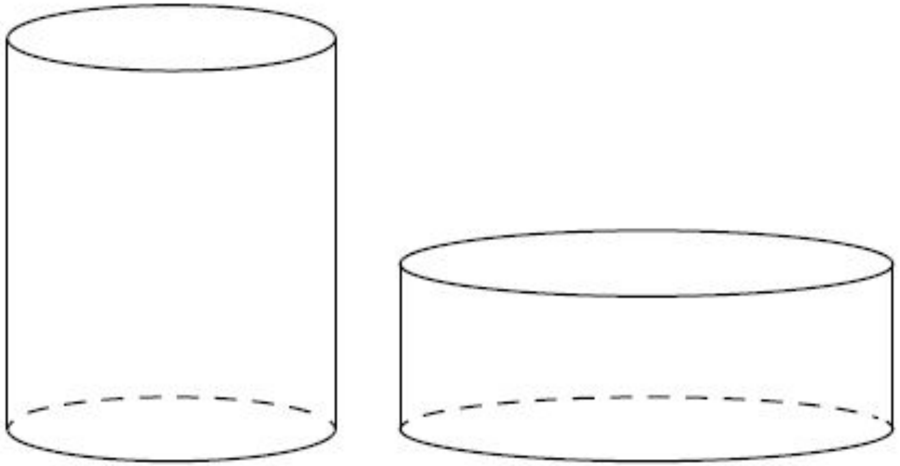
Уметь выполнять действия с функциями

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
25,00	75,78	92,25

Задание 8

8

Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 16. У второго цилиндра высота в 4 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Задание 8

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
13,89	91,60	97,89

Задание 9

9 Найдите значение выражения $8\log_{\sqrt[8]{14}} 14$.

Задание 9

Уметь выполнять вычисления и преобразования

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
8,33	90,64	96,48

Задание 10

10

Сила тока I (в А) в электросети вычисляется по закону Ома: $I=\frac{U}{R}$, где U — напряжение электросети (в В), R — сопротивление подключаемого электроприбора (в Ом). Электросеть прекращает работать, если сила тока превышает 40 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к электросети с напряжением 220 В, чтобы электросеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

Задание 10

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
0,00	98,28	99,30

Задание 11

11 Два велосипедиста одновременно отправились в 120-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 7 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 7 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Задание 11

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61-80	в группе 81-100
5,56	94,94	99,3

Задание 12

12

Найдите точку максимума функции $y = 6 + 15x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Задание 12

Уметь выполнять действия с функциями

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
2,78	90,53	99,3

Задание 13

13 а) Решите уравнение

$$8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 9 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Задание 13

Уметь решать уравнения и неравенства

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
	82,83	96,13

Задание 13. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 13. Решение для экспертов

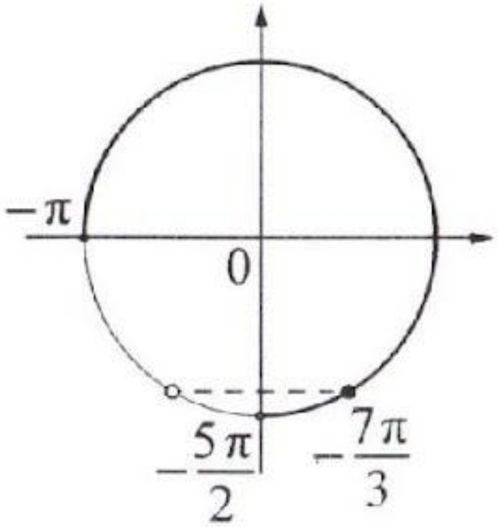
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$8\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x-9=0;\ \left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\left(4\sin x-3\sqrt{3}\right)=0.$$

Значит, $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получим число $-\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{3}$.

Задание 14

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро SA равно 6. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB=SM:MC=2:7$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $2:7$, считая от вершины S.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.

Задание 14

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61-80	в группе 81-100
	11,46	50,00

Задание 14. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 14. Решение для экспертов

Решение.

а) Пусть плоскость α пересекает рёбра SB и AC в точках L и N соответственно (рис. 1).

Поскольку прямая SA параллельна плоскости α, прямые KL и SA параллельны, а значит,

$$SL : LB = AK : KB = 2 : 7.$$

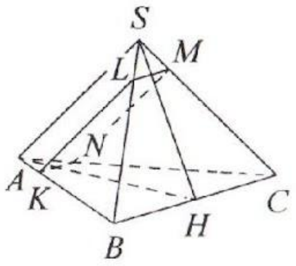


Рис. 1

б) Пусть точка H — середина ребра BC. Тогда медианы AH и SH треугольников ABC и SBC соответственно являются их высотами, а значит, плоскость ASH перпендикулярна прямой BC.

Поскольку плоскость α параллельна прямой SA, расстояние между прямыми SA и KM равно расстоянию между прямой SA и плоскостью α.

Прямые BC и LM параллельны, поскольку

$$SL : LB = SM : MC = 2 : 7.$$

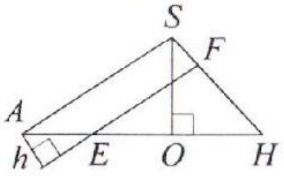


Рис. 2

Следовательно, прямая LM, параллельная прямой BC, перпендикулярна плоскости ASH, значит, плоскости ASH и α перпендикулярны.

Пусть плоскость ASH пересекает прямые KN и LM в точках E и F соответственно (рис. 2). Тогда расстояние между прямой SA и плоскостью α равно расстоянию h между прямыми SA и EF.

Высота SO пирамиды $SABC$ лежит в плоскости ASH, $AO : OH = 2 : 1$, откуда

$$AH = \frac{9\sqrt{3}}{2};\ AO = \frac{2AH}{3} = 3\sqrt{3};\ \cos\angle SAO = \frac{AO}{SA} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \angle SAO = 30^\circ;$$

$$h = AE\sin\angle SAO = \frac{2AH}{9}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 15

15 Решите неравенство $\log_3(4-4x) \geq \log_3\left(x^2-4x+3\right)+\log_3(x+2)$.

Задание 15

Уметь решать уравнения и неравенства

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
	42,09	91,20

Задание 15. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15. Решение для экспертов

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3(4(1-x)) \geq \log_3((3-x)(1-x)) + \log_3(x+2);$$

$$\log_3 4 + \log_3(1-x) \geq \log_3(3-x) + \log_3(1-x) + \log_3(x+2).$$

Неравенство определено при $-2 < x < 1$, поэтому при $-2 < x < 1$ неравенство принимает вид:

$$4 \geq (3-x)(x+2);\ 4 \geq 6 + x - x^2;\ x^2 - x - 2 \geq 0,$$

откуда $x \leq -1$; $x \geq 2$. Учитывая ограничение $-2 < x < 1$, получаем: $-2 < x \leq -1$.

Ответ: $(-2; -1]$.

Задание 16

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 8, $\angle ABC = 60^{\circ}$.

Задание 16

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
	1,09	43,66

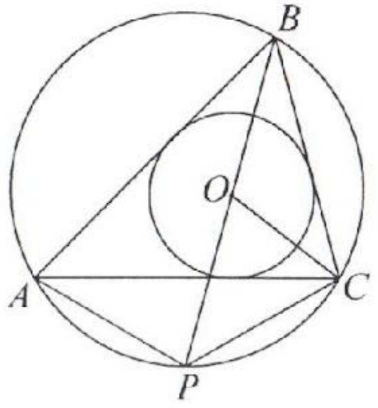
Задание 16. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 16. Решение для экспертов

Решение.

а) Поскольку точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, лучи BO и CO являются биссектрисами углов треугольника ABC. Угол POC является внешним углом треугольника BOC. Следовательно,



$$\angle POC = \angle BCO + \angle CBO = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Углы ACP и ABP равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому

$$\angle PCO = \angle ACP + \angle ACO = \angle ABP + \angle ACO = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Таким образом, $\angle POC = \angle PCO$.

б) Пусть $R = 8$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Хорды AP и CP стягивают равные дуги окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому

$$CP = AP = 2R\sin\angle ABP = 2R\sin 30^\circ = 8.$$

Таким образом, площадь треугольника APC равна

$$\frac{AP \cdot CP \cdot \sin\angle APC}{2} = \frac{AP^2 \cdot \sin(180^\circ - \angle ABC)}{2} = \frac{AP^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 16\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $16\sqrt{3}$.

Задание 17

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 13 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,56 млн рублей?

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Задание 17

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61-80	в группе 81-100
	12,70	77,70

Задание 17. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17. Решение для экспертов

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$13;\ \frac{13(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{13\cdot 2}{n};\ \frac{13}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$15{,}6;\ \frac{15{,}6(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{15{,}6\cdot 2}{n};\ \frac{15{,}6}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2{,}6+\frac{13}{n};\ \frac{2{,}6(n-1)+13}{n};\ \ldots;\ \frac{2{,}6\cdot 2+13}{n};\ \frac{2{,}6+13}{n}.$$

Получаем: $\frac{15{,}6}{n}=1{,}56$, откуда $n=10$. Значит, всего следует выплатить

$$13+2{,}6\left(1+\frac{9}{10}+\ldots+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)=13+2{,}6\cdot 5{,}5=27{,}3 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 27,3 млн рублей.

Задание 18

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Задание 18

Уметь решать уравнения и неравенства

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
	1,75	58,27

Задание 18. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = 4$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = -5$, $a = 3$ и / или $a = 4$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 18. Решение для экспертов

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $x^2-4x+a=0$, для которых выполнено условие $5x^2-6ax+a^2\neq 0$.

Уравнение $x^2-4x+a=0$ задаёт на плоскости Oxa параболу ω, ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке $(2;4)$. Значит, это уравнение имеет два корня при $a<4$, имеет один корень при $a=4$ и не имеет корней при $a>4$.

Поскольку $5x^2-6ax+a^2=(x-a)(5x-a)$, уравнение $5x^2-6ax+a^2=0$ задаёт пару прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $a=x$ и $a=5x$ соответственно.

Координаты точек пересечения параболы ω с прямой l_1 являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2-4x+a=0, \\ a=x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+x=0, \\ a=x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-3)=0, \\ a=x. \end{cases}$$

Значит, парабола ω пересекается с прямой l_1 в точках $(0;0)$ и $(3;3)$.

Координаты точек пересечения параболы ω с прямой l_2 являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2-4x+a=0, \\ a=5x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+5x=0, \\ a=5x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+1)=0, \\ a=5x. \end{cases}$$

Значит, парабола ω пересекается с прямой l_2 в точках $(0;0)$ и $(-1;-5)$.

Следовательно, условие $5x^2-6ax+a^2\neq 0$ выполнено для корней уравнения $x^2-4x+a=0$ при всех a, кроме $a=-5$, $a=0$ и $a=3$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-5$; $-5<a<0$; $0<a<3$; $3<a<4$.

Ответ: $a<-5$; $-5<a<0$; $0<a<3$; $3<a<4$.

Задание 19

19 В ящике лежит 58 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 976 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1036 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 12 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

Задание 19

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели

в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80	в группе 81–100
	2,96	26,58

Задание 19. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 19. Решение для экспертов

Решение.

а) Пусть в ящике k овощей массой меньше 1000 г, k овощей массой больше 1000 г и $(58-2k)$ овощей массой ровно 1000 г. Тогда

$$976k+1036k+1000\cdot(58-2k)=58000;\ 12k=0,$$

но все овощи не могут быть одной массы, значит, в ящике не могло оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г.

б) Пусть в ящике k овощей массой меньше 1000 г, m овощей массой ровно 1000 г и n овощей массой больше 1000 г. Тогда

$$976k+1000m+1036n=1000\cdot(k+m+n);\ 3n=2k.$$

Поскольку числа 2 и 3 взаимно просты,

$$k=3s,\ n=2t;\ 6s=6t;\ s=t.$$

Таким образом, $k+n=3s+2s=5s$. Следовательно, количество овощей с массой, отличной от 1000 г, делится на 5.

Если $m=12$, то $k+n=46$, но 46 не кратно 5, значит, не могло оказаться ровно 12 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г.

в) Пусть масса самого лёгкого овоща равна x г, тогда

$$976k\le x+999\cdot(k-1);\ x\ge 999-23k.$$

В пункте *б* было показано, что $k=3s$. Кроме того, $k+n=5s\le 58$, откуда $s\le 11$, значит,

$$k\le 33;\ x\ge 999-23\cdot 33;\ x\ge 240.$$

Покажем, что масса самого лёгкого овоща может быть 240 г. Если в ящике 1 овощ массой 240 г, 32 овоща массой 999 г, 3 овоща массой 1000 г и 22 овоща массой 1036 г, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 240 г.

Предложения

1. Провести вебинары
2. Посещать московские вебинары
3. Группа в контакте «Секреты учителей математики»
4. Добавиться ко мне в друзья в контакте и просто задать вопрос
5. Стать экспертом ЕГЭ
6. Курс для учащихся 9 классов по математике
7. Популярные лекции в школе

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ