

# **ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ МЕРЫ**

## 2.1. АБСТРАКТНАЯ МЕРА

*Мерой* называют всякую неотрицательную, аддитивную и монотонную функцию множества  $\varphi(A)$ ,  $A \in M$ .

Если функция  $\varphi(A)$  является мерой и счетно-аддитивна, то меру называют *счетно-аддитивной*.

Если на классе  $M$  определена мера  $\varphi(A)$ , то множества класса  $M$  называют  *$\varphi$ -измеримыми*.

**Замечание.** Если  $M$  – полукольцо (в частности, кольцо), то для того, чтобы функция  $\varphi(A)$  была мерой достаточно потребовать неотрицательность и аддитивность функции.

**Вероятностной мерой** называют всякую счетно-аддитивную меру  $\mu$ , заданную на некоторой борелевской алгебре  $M$  и принимающую значение 1 на единице  $A_0$  этой алгебры.

В теории вероятностей:

–  $A_0$  – **пространство элементарных событий** (конкретная сущность этих элементарных событий роли не играет);

– множества  $A \in M$  – **случайные события**, в частности:

$A_0$  – **достоверное** событие,

$\emptyset$  – **невозможное** событие;

– значение  $\mu(A)$  ( $0 \leq \mu(A) \leq 1$ ) **вероятность случайного события  $A$** ,

в частности:

$$\mu(A_0) = 1,$$

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

Таким образом, **вероятность** – частный случай меры.

Пример 2.1. Пусть  $S$  – полукольцо множеств, являющихся конечными подмножествами множества  $X$ . Тогда, в качестве меры можно взять функция  $\mu'(A) = \sum_{x \in A} 1$  – количество элементов в множестве  $A \in S$ .

Пример 2.2. Пусть заданы счетное множество  $X$  и сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ . Тогда функция  $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$ ,  $A \subset X$ , определенная на булеане  $\mathfrak{B}(X)$ , является  $\sigma$ -аддитивной мерой.

Если дополнительно потребовать, чтобы  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ , то получим вероятностную меру, которую обычно называют *дискретной*.

<p>Пример 2.3. На полукольце множеств, состоящем из ограниченных полуинтервалов</p> $[a, b) \subset \mathbb{R}$	<p>прямоугольников</p> $[a, b) \times [c, d) \subset \mathbb{R}^2$	<p>параллелепипедов</p> $[a, b) \times [c, d) \times [e, f) \subset \mathbb{R}^3$
<p>естественной мерой является</p>		
<p>длина</p> $m([a, b)) = b - a$	<p>площадь</p> $m(A) = (b - a)(d - c)$	<p>объем</p> $m(A) = (b - a)(d - c)(f - e)$

Определенная таким образом мера является  $\sigma$ -аддитивной.

Пример 2.4. Пусть  $S$  – полукольцо параллелепипедов из примера 2.3. Если считать, что в пространстве  $\mathbb{R}^3$  распределено вещество, то  $\forall A \in S$  в качестве меры можно взять массу вещества, находящегося в параллелепипеде  $A$ .

Пример 2.5. Пусть  $A_0$  – произвольное непустое открытое множество, и  $x_0 \in A_0$ ,  $M$  – борелевская алгебра всех подмножеств множества  $A_0$ . Тогда на алгебре  $M$  вероятностную меру можно определить следующим образом

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in \text{int } A \\ 0, & x_0 \notin \text{int } A \end{cases}$$

Пример 2.6. Пусть  $X = \mathbb{R} \cap [0,1]$ . Тогда класс  $S$  множеств, получаемых пересечением множества  $X$  с произвольными непрерывными промежутками

$$(a,b), [a,b], [a,b), (a,b], a \geq 0, b \leq 1,$$

является полукольцом и на нем можно задать меру следующим образом

$$\forall A_{ab} \in S \quad \mu(A_{ab}) = b - a.$$

Эта мера не является  $\sigma$ -аддитивной, так как  $m(X) = 1$ , и в то же время  $X$  – счетное множество точек, каждая из которых имеет меру 0.

## 2.2. ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ

### 2.2.1. Постановка задачи

Меру  $\mu$  называют *продолжением меры*  $t$  с класса  $M$  на класс  $H$ , если  $\mu$  задана на  $H \supset M$  и

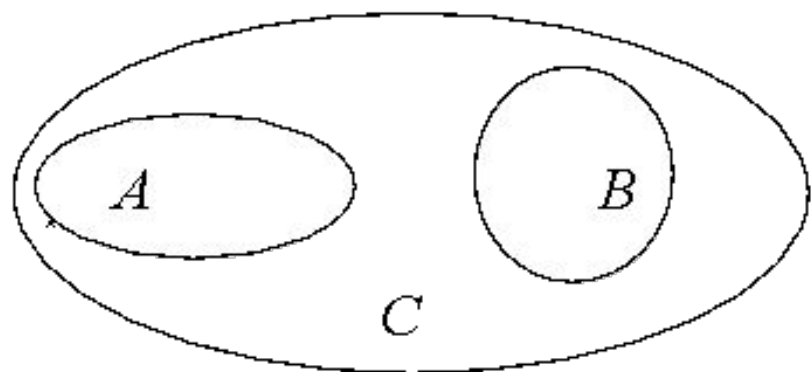
$$\forall A \in M \quad \mu(A) = t(A).$$

При продолжении меры возникают 2 вопроса:

- 1) Всегда ли возможно продолжение меры  $t$ , заданной на произвольном классе  $M$ , хотя бы на кольцо, минимальное над  $M$ ? ►
- 2) Если продолжение меры  $t$  с класса  $M$  на упомянутое кольцо возможно, то единственно ли оно? ►

В общем случае ответ на оба эти вопроса отрицательны.





– непустые множества,

$A, B, C$

Пусть

$$A \subset C \quad B \subset C \quad A \cap B = \emptyset$$

Положим  $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$

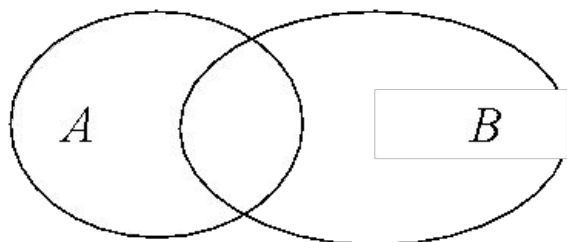
. Очевидно, – мера.

Для интересующего нас продолжения  $m$  необходимо, чтобы

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) = m(A) + m(B) = 2$$

$$\mu(A \cap B) \leq \mu(C) = m(C) = 1$$





Пусть

$$M = \{A, B\}$$

Пусть  $\mu$  — мера на  $M$ . Очевидно,  $\mu(A \cap B) = \mu(A \cap B)$ .

Кольцо минимальное над  $m$  состоит из множеств:

$$M$$

Положим  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(A \cap B) = \alpha, \mu(A \setminus B) = 1 - \alpha, \mu(B \setminus A) = 1 - \alpha$ .

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset, \\ 1, & E = A, E = B, \\ \alpha, & E = A \cap B, \\ 2 - \alpha, & E = A \cup B, \\ 1 - \alpha, & E = A \setminus B \quad E = B \setminus A \\ 2 - 2\alpha, & E = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{cases}$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$\mu(E)$$

$m$

где  $\mu$  — мера. Тогда  $\mu$  — мера, она является продолжением меры  $m$ .

При этом разные значения  $\alpha$  дают разные продолжения.



## 2.2.2. Продолжение меры с полукольца на кольцо, минимальное над ним

**Лемма 1.** Пусть мера  $m$  задана на полукольце  $S$ .

Если  $A = \bigvee_{j=1}^k P_j$ ,  $P_j \in S$  и  $A = \bigvee_{i=1}^l Q_i$ ,  $Q_i \in S$  – конечные разложения, то

$$\sum_{j=1}^k m(P_j) = \sum_{i=1}^l m(Q_i). \quad \blacktriangleright$$

Определение 0. Если  $A = \bigvee_{i=1}^n A_i$ ,  $A_i \in S$  – некоторое *конечное* разложение множества  $A \in K(S)$ , то

$$m'(A) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n m(A_i). \quad (*)$$

Замечания:

1. Определение меры (\*) корректно, т.к. равенство (\*) определяет  $m'(A)$  *однозначно*; функция  $m'(A)$  неотрицательна и аддитивна.

2. Если мера  $m$   $\sigma$ -аддитивна, то и мера  $m'$  будет  $\sigma$ -аддитивной.

**Теорема 2.5.** Продолжение меры с полукольца  $S$  на порожденное им минимальное кольцо  $K(S)$  в пределах кольца  $K(S)$  единственно.  $\blacktriangleright$  11

**Лемма 1.** Пусть мера  $m$  задана на полукольце  $S$ . Тогда, если

$A = \bigotimes_{j=1}^k P_j$ ,  $P_j \in S$  и  $A = \bigotimes_{i=1}^l Q_i$ ,  $Q_i \in S$  – конечные разложения, то

$$\sum_{j=1}^k m(P_j) = \sum_{i=1}^l m(Q_i).$$

⊗ Так как  $P_j = P_j \otimes A = P_j \otimes \left( \bigotimes_{i=1}^l Q_i \right) = \bigotimes_{i=1}^l (P_j \otimes Q_i)$ ,

$$Q_i = Q_i \otimes A = Q_i \otimes \left( \bigotimes_{j=1}^k P_j \right) = \bigotimes_{j=1}^k (Q_i \otimes P_j),$$

то  $\sum_{j=1}^k m(P_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l m(P_j \otimes Q_i) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k m(Q_i \otimes P_j) = \sum_{i=1}^l m(Q_i)$ . ⊗



**Теорема 2.5.** Продолжение меры с полукольца  $S$  на порожденное им минимальное кольцо  $K(S)$  в пределах кольца единственно, т.е. если  $\mu$  произвольное продолжение меры  $m$  с полукольца  $S$  на некоторый класс  $M$  и  $A \in M \cap K(S)$ , то

$$\mu(A) = m'(A).$$

⊠ Если  $A \in K(S)$ , то существует разложение  $A = \bigvee_{i=1}^n A_i$ ,  $A_i \in S$ .

Так как  $A \in M$  и  $\mu$  продолжение меры  $m$ , то

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i) = m'(A). \quad \boxtimes$$



### 2.2.3. Продолжение меры по схеме древних греков

Пусть мера  $\mu$  задана на классе  $M$  множеств  $E \subset A_0$ , где  $A_0$  – некоторое фиксированное множество (из него «черпаются» множества класса  $M$ ). Будем считать, что  $\emptyset \in M$ . Для любого  $A \subset A_0$  положим

$$\mu_{\text{int}}(A) = \sup_{\substack{E \in M \\ E \subset A}} \mu(E).$$

Функцию  $\mu_{\text{int}}(A)$  называют *внутренней мерой* множества  $A$ , индуцированной мерой  $\mu$ . Отметим, что она определена и неотрицательна для всех множеств пространства  $A_0$ , но, вообще говоря, принимает не только конечные, но и бесконечные значения.

Рассмотрим теперь класс *мажорируемых* множеств

$$H = \{A \mid A \subset A_0 \text{ и } \exists B \in M \ A \subset B\}.$$

На классе  $H$  определим функцию

$$\mu_{\text{ext}}(A) = \inf_{\substack{E \in M \\ A \subset E}} \mu(E). \quad (*)$$

Функцию (\*) называют *внешней мерой* множества  $A$ , индуцированной мерой  $\mu$ . Отметим, что она также как и внутренняя мера может принимать как конечные, так и бесконечные значения. Но, в отличие от внутренней меры, определена не на всем пространстве  $A_0$ , а лишь на  $H$ .

Пусть на классе  $S$  определена мера  $\mu$ .

**Теорема 2.6.** Пусть  $\bar{\mu}$  – произвольное продолжение меры  $\mu$  с  $S$  на класс  $\bar{S} \supset S$ . Тогда  $\forall E \in \mathcal{H} \bar{S} \quad \mu_{\text{int}}(E) \leq \bar{\mu}(E) \leq \mu_{\text{ext}}(E)$ .



Пусть  $\bar{S}$  класс мажорируемых множеств, для которых  $\mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$ . Тогда

$$\forall E \in \bar{S} \quad \bar{\mu}(E) \stackrel{df}{=} \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E). \quad (*)$$

Замечания:

1. Определение меры (\*) корректно, т.к.  $\bar{\mu}$  определена на  $\bar{S}$ , в силу существования и единственности супремума и инфимума; неотрицательна и монотонна. Кроме того, можно доказать, что  $\bar{\mu}$  – аддитивная функция.

$$2. \forall E \in S \quad \mu(E) = \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E) \Rightarrow \forall E \in S \quad \bar{\mu}(E) = \mu(E).$$

Следовательно,  $\bar{\mu}$  – некоторое продолжение меры  $\mu$  с класса  $S$  на класс  $\bar{S}$ . Такое продолжение меры называют *продолжением по схеме древних греков*.

**Теорема 2.6.** Пусть  $\mu$  – произвольное продолжение меры  $\mu$  с класса  $S$  на некоторый класс  $S' \supset S$ . Тогда

$$\forall E \in \mathcal{H} \cap S' \quad \mu_{\text{int}}(E) \leq \mu(E) \leq \mu_{\text{ext}}(E).$$

$$\begin{aligned} \forall E \in S' \Rightarrow \forall A \in S \quad A \subset E \Rightarrow \mu(A) = \mu(A) \leq \mu(E) \\ \Rightarrow \mu_{\text{int}}(E) \leq \mu(E). \end{aligned}$$

Так как  $E \in \mathcal{H}$ , то существует такое  $B \in S$ , что  $E \subset B$ , при этом

$$\forall B \in S \quad E \subset B \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(B) = \mu(B),$$

а значит,  $\mu(E) \leq \mu_{\text{ext}}(E)$ .





Пусть  $\bar{S}$  класс мажорируемых множеств, для которых  $\mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$ .

Тогда  $\forall E \in \bar{S} \quad \bar{\mu}(E) \stackrel{df}{=} \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$ .

---

Замечания:

3. Условие  $\mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$  эквивалентно условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A, B \in S \quad A \subset E \subset B \quad \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

(или  $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$ , если  $S$  кольцо).

4. Если мера  $\mu$  определена на **полукольце**  $S$ , то его сначала продолжают на кольцо  $K(S)$ , а потом применяют схему древних греков.

5. Если  $S$  кольцо, то и  $\bar{S}$  – кольцо.

6. Если исходная мера задана на **кольце**  $K$ , то  $\bar{\mu}$  называют **продолжением по схеме Жордана**. Такое продолжение меры единственно в пределах кольца  $\bar{K}$ , но вне кольца  $\bar{K}$  единственность уже не имеет места.

## 2.2.4 Продолжение счетно-аддитивной меры с кольца $K$ на классы $\sigma(K)$ и $\delta(K)$

Пусть *счетно-аддитивная мера*  $m$  задана на *кольце*  $K \neq \sigma(K)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $A \in \sigma(K)$ ,  $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ ,  $P_j \in K$  и  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ ,  $Q_i \in K$  – *счетные* разложения множества  $A$ . Тогда  $\sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) = \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)$ , причем из сходимости (расходимости) одного ряда следует сходимость (расходимость) другого.

**Определение 1.** Пусть  $A \in \sigma(K)$ . Если существует *счетное* разложение

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in K,$$

для которого ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$  *сходится*, то полагаем

$$\mu(A) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

**Определение 1.** Пусть  $A \in \sigma(K)$ . Если существует счетное разложение  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A_i \in K$ , для которого ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$  сходится, то  $\mu(A) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ . (\*)

---

### Замечания

1. Определение меры (\*) корректно, т.к.  $\mu$  *однозначно* определена на  $\bar{S}$ ; неотрицательна и аддитивна.

2. Если  $A \in K$ , то (\*) выполняется в силу счетной аддитивности меры  $m$ , следовательно,  $\mu$  – продолжение меры  $m$  с кольца  $K$  на класс  $\mathfrak{G}(K)$  (класс множеств, удовлетворяющих требованиям определения 1).

3. Если  $A \in \sigma(K)$ , но ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$  расходится, то  $\mu(A) \stackrel{df}{=} +\infty$ . Тогда каждому  $A \in \sigma(K)$  будет приписано *конечное* (для  $A \in \mathfrak{G}(K)$ ) или *бесконечное* (для  $A \in \sigma(K) \setminus \mathfrak{G}(K)$ ) значение  $\mu$ .

4. Если  $K$  алгебра, то  $\mathfrak{G}(K) = \sigma(K)$  и  $\forall A \in \sigma(K) \mu(A) < \infty$ .

Определение 1. Пусть  $A \in \sigma(K)$ . Если  $\exists$ -ет счетное разложение  $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A_i \in K$ ,

для которого ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$  сходится, то  $\mu(A) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ .

---

**Теорема 2.7.** Пусть  $K$  – кольцо,  $A \in \sigma(K)$ ,  $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A_i \in K$  и  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$

Тогда  $\mu(A) < \infty$  тогда и только тогда, когда существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$  и всегда (т.е. и в случае  $\mu(A) < \infty$ , и в случае  $\mu(A) = \infty$ )

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n). \quad \blacktriangleright$$

**Следствие.** Пусть  $K$  – кольцо,  $A \in \sigma(K)$ ,  $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A_i \in K$ . Тогда  $\mu(A) < \infty$  в том и

только в том случае, если существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigvee_{i=1}^n A_i\right)$  и всегда

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigvee_{i=1}^n A_i\right). \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 2.8.** (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса  $\mathfrak{G}(K)$ ). Если  $\mu$  произвольное продолжение счетно-аддитивной меры  $m$  с кольца  $K$  на некоторый класс  $\mathfrak{K}$  и  $A \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}(K)$ , то  $\mu(A) = \mu(A)$ .  $\blacktriangleright$

**Теорема.** Пусть  $K$  – кольцо,

$$A \in \sigma(K), A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K \text{ и } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$$

Тогда  $\mu(A) < \infty$  в том и только в том случае, если существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$  и всегда (т.е. и в случае  $\mu(A) < \infty$ , и в случае  $\mu(A) = \infty$ )

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n). \quad (*)$$

▣ Пусть  $\mu(A) < \infty$ . Очевидно, что  $A = A_1 \sqcup \bigvee_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)$  – разложение, причем слагаемые принадлежат кольцу  $K$ . Поэтому

$$\mu(A) = m(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{i+1} \setminus A_i). \quad (**)$$

Число  $m(A_n)$  –  $n$ -я сумма ряда (\*\*),  $\Rightarrow$  предел (\*) существует и равен  $\mu(A)$ .

Если конечный предел (\*) существует, то сходится ряд в правой части (\*\*). По определению 1 его сумма есть значение  $\mu(A)$ , т.е. справедливо (\*\*).

Справедливость равенства (\*\*) в случае  $\mu(A) = \infty$  вытекает из уже доказанной части теоремы. ▣



**Следствие.** Пусть  $K$  – кольцо,

$$A \in \sigma(K), A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K.$$

Тогда значение  $\mu(A)$  конечно в том и только в том случае, если

существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right)$  и всегда

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right).$$

□ Достаточно положить  $\bigsqcup_{i=1}^n A_i = A'_n$  и применить теорему. □

**Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса  $\mathfrak{G}(K)$ ).** Если  $\mu$  произвольное продолжение меры  $m$  с кольца  $K$  на некоторый класс  $\mathfrak{K}$  и  $A \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}(K)$ , то  $\mu(A) = \mu(A)$ .

□ Если  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K$  – счетное разложение, то

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \mu(A). \quad \blacktriangleleft$$

**Лемма 3.** Пусть  $K$  – кольцо,

$$A \in \delta(K), \quad A = \bigotimes_{j=1}^{\infty} P_j = \bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad P_i, Q_i \in K$$

где  $P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$ ,  $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n \supset \dots$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n). \quad \blacktriangleright$$

**Следствие.** Если  $A \in \delta(K)$ ,  $A = \bigotimes_{j=1}^{\infty} P_j = \bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_i$ ,  $P_i, Q_i \in K$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \left( \bigotimes_{j=1}^n P_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left( \bigotimes_{i=1}^n Q_i \right).$$

☒ Достаточно положить  $\bigotimes_{i=1}^n P_i = P'_n$ ,  $\bigotimes_{i=1}^n Q_i = Q'_n$  и применить теорему. ☒

**Определение 2.** Пусть  $A \in \delta(K)$ .

$$\text{Если } A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in K, \quad \text{то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left( \bigotimes_{i=1}^n A_i \right).$$

**Лемма 3.** Пусть  $K$  – кольцо,

$$A \in \delta(K), A = \bigcap_{j=1}^{\infty} P_j = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i, P_i, Q_i \in K,$$

$$P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots, Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n \supset \dots$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n). \quad (*)$$

▣ Пусть  $B = P_1 \cap Q_1$ . Тогда  $B \setminus A = \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus P_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus Q_i)$ , где

$$B \setminus P_1 \subset B \setminus P_2 \subset \dots \subset B \setminus P_n \subset \dots,$$

$$B \setminus Q_1 \subset B \setminus Q_2 \subset \dots \subset B \setminus Q_n \subset \dots,$$

причем все эти множества принадлежат кольцу  $K$ . Таким образом,  $B \setminus A \in \sigma(K)$  и  $B \setminus A \subset B \in K$ , постольку значение  $\mu(B \setminus A) < \infty$ . В силу предыдущей теоремы

$$\mu(B \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B \setminus P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B \setminus Q_n). \quad (**)$$

Равенство (\*) следует из (\*\*), так как

$$m(P_n) = m(B \setminus (B \setminus P_n)) = m(B) - m(B \setminus P_n),$$

$$m(Q_n) = m(B \setminus (B \setminus Q_n)) = m(B) - m(B \setminus Q_n). \quad \blacktriangleleft$$



Определение 2. Пусть  $A \in \delta(K)$ .

$$\text{Если } A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigvee_{i=1}^n A_i\right). \quad (*)$$

Замечания:

1. Такое определение меры корректно, т.к.  $\mu$  *однозначно* определена на  $\bar{S}$ ; неотрицательна и аддитивна.

2. Если  $A \in K$  справедливость равенства (\*) следует из свойств непрерывности счетно-аддитивной меры, следовательно, мера  $\mu(A)$  является продолжением меры  $m$  с кольца  $K$  на класс  $\delta(K)$ .

3. Непосредственно из определения следует, что если

$$A \in \delta(K), A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K \text{ и } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_i \supset \dots, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

$$\boxtimes \text{ В этом случае } A_n = \bigvee_{i=1}^n A_i. \boxtimes$$

Определение 2. Пусть  $A \in \delta(K)$ .

$$\text{Если } A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left( \bigvee_{i=1}^n A_i \right).$$


---

**Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса  $\delta(K)$ ).** Если  $\mu$  произвольное продолжение меры  $m$  с кольца  $K$  на некоторый класс  $\mathcal{K}$  и  $A \in \mathcal{K} \cap \delta(K)$ , то

$$\mu(A) = \mu(A).$$

$\square$  Если  $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K$ , то в условиях теоремы

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left( \bigvee_{i=1}^n A_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigvee_{i=1}^n A_i \right) = \mu \left( \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \mu(A). \square$$

**Теорема.** Функция  $\mu$ , заданная на  $\mathfrak{G}(K)$  определением 1 и на  $\delta(K)$  определением 2, является продолжением меры  $m$  с кольца  $K$  на класс  $\mathfrak{G}(K) \setminus \delta(K)$  (или на класс  $\sigma(K) \setminus \delta(K)$ , если рассматривать и бесконечные значения  $\mu$ ).

**Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса  $\mathfrak{G}(K) \setminus \delta(K)$ ).** Если  $\mu$  произвольное счетно-аддитивное продолжение меры  $m$  с кольца  $K$  на некоторый класс  $K^*$  и  $A \in K^* \setminus [\mathfrak{G}(K) \setminus \delta(K)]$ , то  $\mu(A) = \mu(A)$ .

Пусть  $m$  счетно-аддитивная мера, заданная на полукольце  $S$ . Продолжим  $m$  продолжим на кольцо  $K(S)$ , далее на класс  $H = \mathfrak{G}(K) \setminus \delta(K)$  в соответствии с определениями 1 и 2, и, наконец, по схеме древних греков на класс  $\bar{S}$ . Полученную меру  $\mu$  называют продолжением меры  $m$  с полукольца  $S$  на класс  $\bar{S}$  *по схеме Лебега*.

# МЕРЫ СТИЛТЬЕСА

## Мера Стильеса на прямой

*Мерой Стильеса на прямой* называют всякую меру, заданную на каком-нибудь классе *промежутков* числовой прямой.

**Теорема 2.8.** Если  $I$  – некоторый числовой промежуток;  $H$  – полукольцо всевозможных полуинтервалов  $E = [\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta \in I$ , то произвольная неубывающая функция  $\varphi$ , определенная на  $I$ , задает меру Стильеса, определенную на  $H$  :

$$\mu(E) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha). \quad (**)$$

☒ Так как функция  $\mu(E)$  определена на полукольце, то достаточно доказать, что она неотрицательна и аддитивна.

Неотрицательность следует из неубывания  $\varphi$ .

Аддитивность  $\varphi$ . Пусть  $E = [\alpha, \beta) \in H$ ,  $E = E_1 \boxplus E_2$ ,  $E_1 \boxplus E_2 = \emptyset$ , тогда

$$E_1 = [\alpha, \gamma), E_2 = [\gamma, \beta), \alpha < \gamma < \beta \text{ (или } E_2 = [\alpha, \gamma), E_1 = [\gamma, \beta)).$$

Следовательно,

$$\mu(E) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = [\varphi(\beta) - \varphi(\gamma)] + [\varphi(\gamma) - \varphi(\alpha)] = \mu(E_1) + \mu(E_2). \quad \boxplus$$

Меру (\*\*\*) называют *мерой Стильеса, порожденной функцией  $\varphi$* , а  $\varphi$  – *производящей функцией меры (\*\*\*)*.

$$\mu(E) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha), \quad E = [\alpha, \beta], \quad \alpha, \beta \in I \quad (**)$$

---

**Теорема 2.9.** Функции  $\varphi$  и  $\varphi + \text{const}$  порождают одну и ту же меру (\*\*).  
Более того, формула  $\varphi + \text{const}$  исчерпывает **все** возможные меры (\*\*).

☒ Пусть  $\psi$ , как и  $\varphi$ , – производящие функции меры (\*\*).

Фиксируем какое-нибудь значение  $x_0 \in I$  и рассмотрим произвольное  $x \in I$ :

1) если  $x_0 \leq x$ , то для  $E = [x_0, x)$   $\mu(E) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \psi(x) - \psi(x_0)$ ,

откуда

$$\varphi(x) - \psi(x) = \varphi(x_0) - \psi(x_0); \quad (*)$$

2) если  $x \leq x_0$ , то для  $E = [x, x_0)$   $\mu(E) = \varphi(x_0) - \varphi(x) = \psi(x_0) - \psi(x)$ ,

откуда опять получим (\*).

Следовательно,  $\varphi(x) - \psi(x) = c = \text{const}$ , т.е.  $\forall x \in I \quad \varphi(x) = \psi(x) + c$ . ☒

**Замечание.** Если  $\varphi(x) = x + c$ , то  $\mu(E) = \beta - \alpha$  – длина  $[\alpha, \beta)$ .

**Теорема 2.10.** Пусть функция  $\varphi$  задана и не убывает на всей числовой прямой, мера Стильеса (\*\*), заданная на полукольце  $\mathcal{H}$  всевозможных *ограниченных* полуинтервалов  $E = [\alpha, \beta)$ . Для счетной аддитивности такой меры необходимо и достаточно, чтобы производящая функция  $\varphi$  была всюду непрерывной слева.

**Следствие.** Для полуинтервала  $E = [\alpha, \beta)$  длина  $\mu(E) = \beta - \alpha$  – счетно аддитивная мера.

**Замечание.** Все изложенное выше сохраняет силу, если вместо полуинтервалов  $[\alpha, \beta)$  взять полуинтервалы вида  $(\alpha, \beta]$  – лишь в теореме нужно потребовать непрерывности  $\varphi$  справа (а не слева).

## Мера Стильеса на плоскости и в $n$ -мерном пространстве

*Мерой Стильеса* в  $n$ -мерном евклидовом пространстве называют всякую меру, заданную на каком-нибудь классе  $n$ -мерных параллелепипедов

$$E = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n \right\},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – числовые промежутки. Если  $n = 2$  ( $n = 3$ ), то меру Стильеса называют *плоской* (*объемной*).

Пусть  $H$  – класс всевозможных  $n$ -мерных параллелепипедов

$$E = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \alpha_1 \leq x_1 < \beta_1, \alpha_2 \leq x_2 < \beta_2, \dots, \alpha_n \leq x_n < \beta_n \right\},$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда произвольные  $n$  определенные и *неубывающие* на всей числовой прямой функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (*)$$

задают меру Стильеса, определенную на  $H$ :

$$\mu(E) = [\varphi_1(\beta_1) - \varphi_1(\alpha_1)][\varphi_2(\beta_2) - \varphi_2(\alpha_2)] \dots [\varphi_n(\beta_n) - \varphi_n(\alpha_n)].$$

Замечание. Если дополнительно потребовать, чтобы все функции (\*) были непрерывны слева, то мера  $\mu(E)$  будет счетно-аддитивной.