ОБЩЕЕ
ПОНЯТИЕ МЕРЫ

2.1. АБСТРАКТНАЯ МЕРА

Мерой называют всякую неотрицательную, аддитивную и монотонную функцию множества $\varphi(A)$, $A \in M$.

Если функция $\varphi(A)$ является мерой и счетно-аддитивна, то меру называют ***счетно-аддитивной.***

Если на классе M определена мера $\varphi(A)$, то множества класса M называют φ***-измеримыми.***

Замечание. Если M – полукольцо (в частности, кольцо), то для того, чтобы функция $\varphi(A)$ была мерой достаточно потребовать неотрицательность и аддитивность функции.

Вероятностой мерой называют всякую счетно-аддитивную меру μ, заданную на некоторой борелевской алгебре M и принимающую значение 1 на единице A_0 этой алгебры.

В теории вероятностей:

– A_0 – ***пространство элементарных событий*** (конкретная сущность этих элементарных событий роли не играет);

– множества $A \in M$ – ***случайные события***, в частности:

A_0 – ***достоверное*** событие,

$\varnothing$ – ***невозможное*** событие;

– значение $\mu(A)$ $(0 \le \mu(A) \le 1)$ ***вероятность случайного события*** A, в частности:

$$\mu(A_0) = 1,$$

$$\mu(\varnothing) = 0.$$

Таким образом, ***вероятность*** – частный случай меры.

Пример 2.1. Пусть S – полукольцо множеств, являющихся конечными подмножествами множества X. Тогда, в качестве меры можно взять функция $\mu'(A)=\sum\limits_{x\in A}1$ – количество элементов в множестве $A\in S$.

Пример 2.2. Пусть заданы счетное множество X и сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$. Тогда функция $\mu(A)=\sum\limits_{x_n\in A}^{\infty}p_n$, $A\subset X$, определенная на булеане (X), является σ-аддитивной мерой.

Если дополнительно потребовать, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=1$, то получим вероятностную меру, которую обычно называют ***дискретной***.

Пример 2.3. На полукольце множеств, состоящем из ограниченных

полуинтервалов	прямоугольников	параллелепипедов
$[a,b)\subset\mathbb{R}$	$[a,b)\times[c,d)\subset\mathbb{R}^2$	$[a,b)\times[c,d)\times[e,f)\subset\mathbb{R}^3$

естественной мерой является

длина	площадь	объем
$m([a,b))=b-a$	$m(A)=(b-a)(d-c)$	$m(A)=(b-a)(d-c)(f-e)$

Определенная таким образом мера является σ-аддитивной.

Пример 2.4. Пусть S – полукольцо параллелепипедов из примера 2.3. Если считать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ распределено вещество, то $\forall A\in S$ в качестве меры можно взять массу вещества, находящегося в параллелепипеде A.

Пример 2.5. Пусть A_0 – произвольное непустое открытое множество, и $x_0 \in A_0$, M – борелевская алгебра всех подмножеств множества A_0. Тогда на алгебре M вероятностную меру можно определить следующим образом

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, x_0 \in \operatorname{int} A \\ 0, x_0 \notin \operatorname{int} A \end{cases}.$$

Пример 2.6. Пусть $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Тогда класс S множеств, получаемых пересечением множества X с произвольными непрерывными промежутками

$$(a,b),\ [a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ a \geq 0,\ b \leq 1,$$

является полукольцом и на нем можно задать меру следующим образом

$$\forall A_{ab} \in S \ \ \mu(A_{ab}) = b - a\,.$$

Эта мера не является σ-аддитивной, так как $m(X) = 1$, и в то же время X – счетное множество точек, каждая из которых имеет меру 0.

2.2. ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ

2.2.1. Постановка задачи

Меру μ называют ***продолжением меры*** m с класса M на класс H, если μ задана на $H \supset M$ и

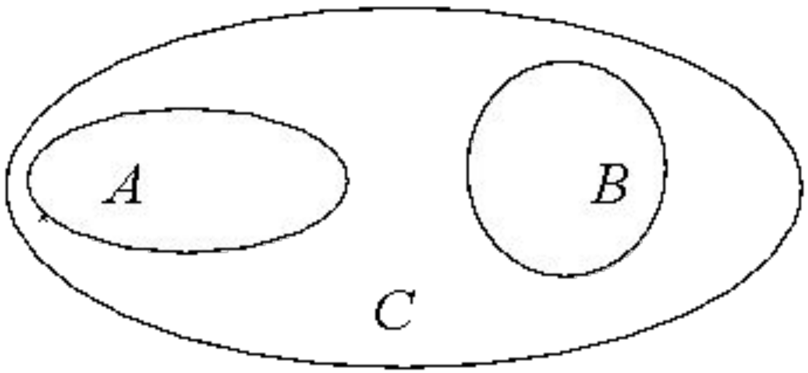
$$\forall A \in M \quad \mu(A) = m(A).$$

При продолжении меры возникают 2 вопроса:

1) Всегда ли возможно продолжение меры m, заданной на произвольном классе M, хотя бы на кольцо, минимальное над M?

2) Если продолжение меры m с класса M на упомянутое кольцо возможно, то единственно ли оно?

В общем случае ответ на оба эти вопроса отрицательны.



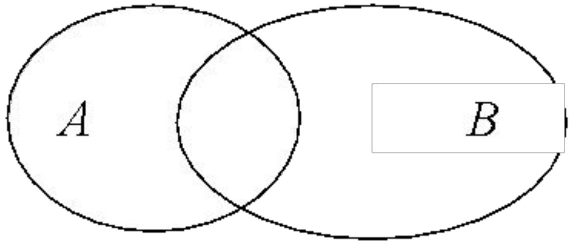
Пусть A, B, C – непустые множества, $A \subset C$, $B \subset C$, $A \cap B = \varnothing$.

Положим $M = \{A, B, C\}$, $m(A) = m(B) = m(C) = 1$. Очевидно, m – мера.

Для интересующего нас продолжения необходимо, чтобы

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = m(A) + m(B) = 2,$$

$$\mu(A \cup B) \le \mu(C) = m(C) = 1.$$



Пусть ,

.

$M = \{A, B\}$

Пусть . Очевидно, – мера. $A \cap B \neq \varnothing, A \setminus B \neq \varnothing, B \setminus A \neq \varnothing$

Кольцо, минимальное над m состоит из множеств: $m(A) = m(B) = 1$

M .

Положим $\varnothing, A, B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \varnothing, \\ 1, & E = A, E = B, \\ \alpha, & E = A \cap B, \\ 2 - \alpha, & E = A \cup B, \\ 1 - \alpha, & E = A \setminus B \text{ или } E = B \setminus A, \\ 2 - 2\alpha, & E = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{cases}$$

$\alpha \in [0,1]$ $\mu(E)$ m

где . Тогда α – мера, она является продолжением меры .

При этом разные значения дают разные продолжения.

2.2.2. Продолжение меры с полукольца на кольцо, минимальное над ним

Лемма 1. Пусть мера m задана на полукольце S.

Если $A = \bigsqcup_{j=1}^{k} P_j$, $P_j \in S$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{l} Q_i$, $Q_i \in S$ – *конечные* разложения, то

$$\sum_{j=1}^{k} m(P_j) = \sum_{i=1}^{l} m(Q_i).$$

Определение 0. Если $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in S$ – некоторое *конечное* разложение множества $A \in K(S)$, то

$$m'(A) \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} m(A_i). \qquad (*)$$

Замечания:

1. Определение меры (*) корректно, т.к. равенство (*) определяет $m'(A)$ *однозначно*; функция $m'(A)$ неотрицательна и аддитивна.

2. Если мера m σ-аддитивна, то и мера m' будет σ-аддитивной.

Теорема 2.5. Продолжение меры с полукольца S на порожденное им минимальное кольцо $K(S)$ в пределах кольца $K(S)$ единственно.

Лемма 1. Пусть мера m задана на полукольце S. Тогда, если $A=\bigsqcup\limits_{j=1}^{k} P_j$, $P_j \in S$ и $A=\bigsqcup\limits_{i=1}^{l} Q_i$, $Q_i \in S$ – *конечные* разложения, то

$$\sum_{j=1}^{k} m\left(P_j\right)=\sum_{i=1}^{l} m\left(Q_i\right).$$

Так как $P_j=P_j \cap A=P_j \cap\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{l} Q_i\right)=\bigsqcup\limits_{i=1}^{l}\left(P_j \cap Q_i\right)$,

$$Q_i=Q_i \cap A=Q_i \cap\left(\bigsqcup_{j=1}^{k} P_j\right)=\bigsqcup_{j=1}^{k}\left(Q_i \cap P_j\right),$$

то $\sum\limits_{j=1}^{k} m\left(P_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{i=1}^{l} m\left(P_j \cap Q_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{l} \sum\limits_{j=1}^{k} m\left(Q_i \cap P_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{l} m\left(Q_i\right)$.

Теорема 2.5. Продолжение меры с полукольца S на порожденное им минимальное кольцо $K(S)$ в пределах кольца единственно, т.е. если μ произвольное продолжение меры m с полукольца S на некоторый класс M и $A \in M \cap K(S)$, то

$$\mu(A) = m'(A).$$

Если $A \in K(S)$, то существует разложение $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S$.

Так как $A \in M$ и μ продолжение меры m, то

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = m'(A).$$

2.2.3. Продолжение меры по схеме древних греков

Пусть мера μ задана на классе M множеств $E \subset A_0$, где A_0 – некоторое фиксированное множество (из него «черпаются» множества класса M). Будем считать, что $\varnothing \in M$. Для любого $A \subset A_0$ положим

$$\mu_{\text{int}}(A) = \sup_{\substack{E \in M \\ E \subset A}} \mu(E).$$

Функцию $\mu_{\text{int}}(A)$ называют ***внутренней мерой*** множества A, ***индуцированной мерой*** μ. Отметим, что она определена и *неотрицательна* для *всех* множеств пространства A_0, но, вообще говоря, принимает не только *конечные*, но и *бесконечные* значения.

Рассмотрим теперь класс ***мажорируемых*** множеств

$$\mathrm{H} = \left\{ A \middle| A \subset A_0 \text{ и } \exists B \in M \ A \subset B \right\}.$$

На классе H определим функцию

$$\mu_{\text{ext}}(A) = \inf_{\substack{E \in M \\ A \subset E}} \mu(E). \qquad (*)$$

Функцию (*) называют ***внешней мерой*** множества A, индуцированной мерой μ. Отметим, что она также как и внутренняя мера может принимать как конечные, так и бесконечные значения. Но, в отличие от внутренней меры, определена не на всем пространстве A_0, а лишь на H.

Пусть на классе S определена мера μ.

Теорема 2.6. Пусть $\tilde{\mu}$ – произвольное продолжение меры μ с S на класс $\tilde{S} \supset S$. Тогда $\forall E \in \mathrm{H} \cap \tilde{S}$ $\mu_{\text{int}}(E) \le \tilde{\mu}(E) \le \mu_{\text{ext}}(E)$.

Пусть $\bar{S}$ класс мажорируемых множеств, для которых $\mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$. Тогда

$$\forall E \in \bar{S} \quad \bar{\mu}(E) \overset{df}{=} \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E). \qquad (*)$$

Замечания:

1. Определение меры (*) корректно, т.к. $\bar{\mu}$ определена на $\bar{S}$, в силу существования и единственности супремума и инфимума; неотрицательна и монотонна. Кроме того, можно доказать, что $\bar{\mu}$ – аддитивная функция.

2. $\forall E \in S$ $\mu(E) = \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E) \quad \Rightarrow \quad \forall E \in S$ $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$.

Следовательно, $\bar{\mu}$ – некоторое продолжение меры μ с класса S на класс $\bar{S}$. Такое продолжение меры называют ***продолжением по схеме древних греков***.

Теорема 2.6. Пусть $\tilde{\mu}$ – произвольное продолжение меры μ с класса S на некоторый класс $\tilde{S} \supset S$. Тогда

$$\forall E \in H \cap \tilde{S} \quad \mu_{\text{int}}(E) \le \tilde{\mu}(E) \le \mu_{\text{ext}}(E).$$

$$E \in \tilde{S} \;\Rightarrow\; \forall A \in S \;\; A \subset E \;\Rightarrow\; \mu(A) = \tilde{\mu}(A) \le \tilde{\mu}(E)$$

$$\Rightarrow\; \mu_{\text{int}}(E) \le \tilde{\mu}(E).$$

Так как $E \in H$, то существует такое $B \in S$, что $E \subset B$, при этом

$$\forall B \in S \quad E \subset B \;\Rightarrow\; \tilde{\mu}(E) \le \tilde{\mu}(B) = \mu(B),$$

а значит, $\tilde{\mu}(E) \le \mu_{\text{ext}}(E)$.

Пусть $\overline{S}$ класс мажорируемых множеств, для которых $\mu_{\text{int}}(E)=\mu_{\text{ext}}(E)$.

Тогда $\forall E\in\overline{S}\quad \overline{\mu}(E)\overset{df}{=}\mu_{\text{int}}(E)=\mu_{\text{ext}}(E)$.

Замечания:

3. Условие $\mu_{\text{int}}(E)=\mu_{\text{ext}}(E)$ эквивалентно условию:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A,B\in S\ \ A\subset E\subset B\quad \mu(B)-\mu(A)<\varepsilon$$

(или $\mu(B\setminus A)<\varepsilon$, если S кольцо).

4. Если мера μ определена на полукольце S, то его сначала продолжают на кольцо $K(S)$, а потом применяют схему древних греков.

5. Если S кольцо, то и $\overline{S}$ – кольцо.

6. Если исходная мера задана на *кольце* K, то $\overline{\mu}$ называют ***продолжением по схеме Жордана***. Такое продолжение меры единственно в пределах кольца $\overline{K}$, но вне кольца $\overline{K}$ единственность уже не имеет места.

2.2.4 Продолжение счетно-аддитивной меры с кольца K на классы $\sigma(K)$ и $\delta(K)$

Пусть *счетно-аддитивная мера* m задана на *кольце* $K \neq \sigma(K)$.

Лемма 2. Пусть $A \in \sigma(K)$, $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, $P_j \in K$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $Q_i \in K$ – счетные разложения множества A. Тогда $\sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) = \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)$, причем из сходимости (расходимости) одного ряда следует сходимость (расходимость) другого.

Определение 1. Пусть $A \in \sigma(K)$. Если существует счетное разложение

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, \ A_i \in K,$$

для которого ряд $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ *сходится*, то полагаем

$$\mu(A) \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Определение 1. Пусть $A \in \sigma(K)$. Если существует счетное разложение $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$, для которого ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ *сходится*, то $\mu(A) \overset{df}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. (*)

Замечания

1. Определение меры (*) корректно, т.к. μ *однозначно* определена на $\overline{S}$; неотрицательна и аддитивна.

2. Если $A \in K$, то (*) выполняется в силу счетной аддитивности меры m, следовательно, μ – продолжение меры m с кольца K на класс $\tilde{\sigma}(K)$ (класс множеств, удовлетворяющих требованиям определения 1).

3. Если $A \in \sigma(K)$, но ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ расходится, то $\mu(A) \overset{df}{=} +\infty$. Тогда каждому $A \in \sigma(K)$ будет приписано *конечное* (для $A \in \tilde{\sigma}(K)$) или *бесконечное* (для $A \in \sigma(K) \setminus \tilde{\sigma}(K)$) значение μ.

4. Если K алгебра, то $\tilde{\sigma}(K) = \sigma(K)$ и $\forall A \in \sigma(K)$ $\mu(A) < \infty$.

Определение 1. Пусть $A \in \sigma(K)$. Если $\exists$-ет счетное разложение $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$, для которого ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ *сходится*, то $\mu(A) \overset{df}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Теорема 2.7. Пусть K – кольцо, $A \in \sigma(K)$, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$ и $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_i \subset \ldots$ Тогда $\mu(A) < \infty$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$ и всегда (т.е. и в случае $\mu(A) < \infty$, и в случае $\mu(A) = \infty$)

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Следствие. Пусть K – кольцо, $A \in \sigma(K)$, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$. Тогда $\mu(A) < \infty$ в том и только в том случае, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$ и всегда

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Теорема 2.8. (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\mathfrak{S}(K)$). Если $\tilde{\mu}$ произвольное продолжение счетно-аддитвной меры m с кольца K на некоторый класс $\tilde{K}$ и $A \in \tilde{K} \cap \mathfrak{S}(K)$, то $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$.

Теорема. Пусть K – кольцо,

$$A \in \sigma(K),\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in K \text{ и } A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_i \subset \ldots$$

Тогда $\mu(A) < \infty$ в том и только в том случае, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$ и всегда (т.е. и в случае $\mu(A) < \infty$, и в случае $\mu(A) = \infty$)

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n). \qquad (*)$$

◄ Пусть $\mu(A) < \infty$. Очевидно, что $A = A_1 \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)$ – разложение, причем слагаемые принадлежат кольцу K. Поэтому

$$\mu(A) = m(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{i+1} \setminus A_i). \qquad (**)$$

Число $m(A_n)$ – n-я сумма ряда (**) $\Rightarrow$ предел (*) существует и равен $\mu(A)$.

Если конечный предел (*) существует, то сходится ряд в правой части (**). По опредлению 1 его сумма есть значение $\mu(A)$, т.е. справедливо (**).

Справедливость равенства (**) в случае $\mu(A) = \infty$ вытекает из уже доказанной части теоремы.►

Следствие. Пусть K – кольцо,

$$A \in \sigma(K),\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in K.$$

Тогда значение $\mu(A)$ *конечно* в том и только в том случае, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$ и всегда

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Достаточно положить $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_n'$ и применить теорему.

Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\sigma(K)$). Если $\tilde\mu$ произвольное продолжение меры m с кольца K на некоторый класс $\tilde K$ и $A \in \tilde K \cap \sigma(K)$, то $\tilde\mu(A) = \mu(A)$.

Если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$ – счетное разложение, то

$$\tilde\mu(A) = \tilde\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \mu(A).$$

Лемма 3. Пусть K – кольцо,

$$A \in \delta(K),\ \ A = \bigcap_{j=1}^{\infty} P_j = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i\ ,\ P_i, Q_i \in K$$

где $P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n \supset \ldots,\ \ Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n).$$ ►

Следствие. Если $A \in \delta(K),\ \ A = \bigcap_{j=1}^{\infty} P_j = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i\ ,\ P_i, Q_i \in K$, то

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcap_{j=1}^{n} P_j\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right).$$

◄ Достаточно положить $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = P'_n$, $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i = Q'_n$ и применить теорему.►

Определение 2. Пусть $A \in \delta(K)$.

Если $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\ ,\ A_i \in K$, то $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Лемма 3. Пусть K – кольцо,

$$A \in \delta(K),\ A = \bigcap_{j=1}^{\infty} P_j = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i,\ P_i, Q_i \in K,$$

$$P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n \supset \ldots,\ Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots .$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n). \qquad (*)$$

► Пусть $B = P_1 \cup Q_1$. Тогда $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \setminus P_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \setminus Q_i)$, где

$$B \setminus P_1 \subset B \setminus P_2 \subset \ldots \subset B \setminus P_n \subset \ldots,$$

$$B \setminus Q_1 \subset B \setminus Q_2 \subset \ldots \subset B \setminus Q_n \subset \ldots,$$

причем все эти множества принадлежат кольцу K. Таким образом, $B \setminus A \in \sigma(K)$ и $B \setminus A \subset B \in K$, постольку значение $\mu(B \setminus A) < \infty$. В силу предыдущей теоремы

$$\mu(B \setminus A) = \lim_{n\to\infty} m(B \setminus P_n) = \lim_{n\to\infty} m(B \setminus Q_n). \qquad (**)$$

Равенство (*) следует из (**), так как

$$m(P_n) = m(B \setminus (B \setminus P_n)) = m(B) - m(B \setminus P_n),$$

$$m(Q_n) = m(B \setminus (B \setminus Q_n)) = m(B) - m(B \setminus Q_n). ◄$$

Определение 2. Пусть $A \in \delta(K)$.

$$\text{Если } A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in K, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \qquad (*)$$

Замечания:

1. Такое определение меры корректно, т.к. μ *однозначно* определена на $\overline{S}$; неотрицательна и аддитивна.

2. Если $A \in K$ справедливость равенства (*) следует из свойств непрерывности счетно-аддитивной меры, следовательно, мера $\mu(A)$ является продолжением меры m с кольца K на класс $\delta(K)$.

3. Непосредственно из определения следует, что если

$$A \in \delta(K),\ A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in K \text{ и } A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_i \supset \ldots, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

◄ В этом случае $A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. ►

Определение 2. Пусть $A \in \delta(K)$.

$$\text{Если } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in K, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\delta(K)$). Если $\tilde{\mu}$ произвольное продолжение меры m с кольца K на некоторый класс $\tilde{K}$ и $A \in \tilde{K} \cap \delta(K)$, то

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A).$$

Если $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$, то в условиях теоремы

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \tilde{\mu}(A).$$

Теорема. Функция μ, заданная на $\tilde{\sigma}(K)$ определением 1 и на $\delta(K)$ определением 2, является продолжением меры m с кольца K на класс $\tilde{\sigma}(K) \cup \delta(K)$ (или на класс $\sigma(K) \cup \delta(K)$, если рассматривать и бесконечные значения μ).

Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\tilde{\sigma}(K) \cup \delta(K)$**).** Если $\tilde{\mu}$ произвольное счетно-аддитивное продолжение меры m с кольца K на некоторый класс $\tilde{K}$ и $A \in \tilde{K} \cap \left[\tilde{\sigma}(K) \cup \delta(K)\right]$, то $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$.

Пусть m счетно-аддитивная мера, заданная на полукольце S. Продолжим m продолжим на кольцо $K(S)$, далее на класс $H = \tilde{\sigma}(K) \cup \delta(K)$ в соответствии с определениями 1 и 2, и, наконец, по схеме древних греков на класс $\overline{S}$. Полученную меру μ называют продолжением меры m с полукольца S на класс $\overline{S}$ ***по схеме Лебега***.

МЕРЫ СТИЛТЬЕСА

Мера Стилтьеса на прямой

Мерой Стилтьеса на прямой называют всякую меру, заданную на каком-нибудь классе *промежутков* числовой прямой.

Теорема 2.8. Если I – некоторый числовой промежуток; H – полукольцо всевозможных полуинтервалов $E=[\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in I$, то произвольная неубывающая фукнция φ, определенная на I, задает меру Стилтьеса, определенную на H:

$$\mu(E)=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha). \qquad (**)$$

◄ Так как функция $\mu(E)$ определена на полукольце, то достаточно доказать, что она неотрицательна и аддитивна.

Неотрицательность следует из неубывания φ.

Аддитивность φ. Пусть $E=[\alpha,\beta)\in H$, $E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$, тогда

$$E_1=[\alpha,\gamma),\ E_2=[\gamma,\beta),\ \alpha<\gamma<\beta\ (\text{или } E_2=[\alpha,\gamma),\ E_1=[\gamma,\beta)).$$

Следовательно,

$$\mu(E)=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\left[\varphi(\beta)-\varphi(\gamma)\right]+\left[\varphi(\gamma)-\varphi(\alpha)\right]=\mu(E_1)+\mu(E_2).$$ ►

Меру (**) называют ***мерой Стилтьеса, порожденной функцией*** φ, а φ – ***производящей функцией меры*** (**).

$$\mu(E)=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha),\ E=[\alpha,\beta),\ \alpha,\beta\in I \quad (**)$$

Теорема 2.9. Функции φ и $\varphi+\text{const}$ порождают одну и ту же меру (**). Более того, формула $\varphi+\text{const}$ исчерпывает **все** возможные меры (**).

 Пусть ψ, как и φ, – производящие функции меры (**).

Фиксируем какое-нибудь значение $x_0\in I$ и рассмотрим произвольное $x\in I$:

1) если $x_0\le x$, то для $E=[x_0,x)$ $\mu(E)=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\psi(x)-\psi(x_0)$,

откуда

$$\varphi(x)-\psi(x)=\varphi(x_0)-\psi(x_0); \qquad (*)$$

2) если $x\le x_0$, то для $E=[x,x_0)$ $\mu(E)=\varphi(x_0)-\varphi(x)=\psi(x_0)-\psi(x)$,

откуда опять получим (*).

Следовательно, $\varphi(x)-\psi(x)=c=\text{const}$, т.е. $\forall x\in I$ $\varphi(x)=\psi(x)+c$.

Замечание. Если $\varphi(x)=x+c$, то $\mu(E)=\beta-\alpha$ – длина $[\alpha,\beta)$.

Теорема 2.10. Пусть функция φ задана и не убывает на всей числовой прямой, мера Стилтьеса (**), заданная на полукольце H всевозможных *ограниченных* полуинтервалов $E=[\alpha,\beta)$. Для счетной аддитивности такой меры необходимо и достаточно, чтобы производящая функция φ была всюду непрерывной слева.

Следствие. Для полуинтервала $E=[\alpha,\beta)$ длина $\mu(E)=\beta-\alpha$ – счетно аддитивная мера.

Замечание. Все изложенное выше сохраняет силу, если вместо полуинтервалов $[\alpha,\beta)$ взять полуинтервалы вида $(\alpha,\beta]$ – лишь в теореме нужно потребовать непрерывности φ справа (а не слева).

Мера Стилтьеса на плоскости и в *n*-мерном пространстве

Мерой Стилтьеса в n-мерном евклидовом пространстве называют всякую меру, заданную на каком-нибудь классе n-мерных параллелепипедов

$$E = \left\{ \left(x_1, x_2, \dots, x_n \right) \middle| \; x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n \right\},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – числовые промежутки. Если $n = 2$ ($n = 3$), то меру Стилтьеса называют ***плоской*** (***объемной***).

Пусть H – класс всевозможных n-мерных параллелепипедов

$$E = \left\{ \left(x_1, x_2, \dots, x_n \right) \middle| \; \alpha_1 \le x_1 < \beta_1, \, \alpha_2 \le x_2 < \beta_2, \, \dots, \, \alpha_n \le x_n < \beta_n \right\},$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R} .$$

Тогда произвольные n определенные и *неубывающие* на всей числовой прямой функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \qquad (*)$$

задают меру Стилтьеса, определенную на H:

$$\mu(E) = \left[\varphi_1(\beta_1) - \varphi_1(\alpha_1) \right] \left[\varphi_2(\beta_2) - \varphi_2(\alpha_2) \right] \dots \left[\varphi_n(\beta_n) - \varphi_n(\alpha_n) \right].$$

Замечание. Если дополнительно потребовать, чтобы все функции (*) были непрерывны слева, то мера $\mu(E)$ будет счетно-аддитивной.