

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ МЕРЫ

2.1. АБСТРАКТНАЯ МЕРА

Мерой называют всякую неотрицательную, аддитивную и монотонную функцию множества $\varphi(A)$, $A \in M$.

Если функция $\varphi(A)$ является мерой и счетно-аддитивна, то меру называют *счетно-аддитивной*.

Если на классе M определена мера $\varphi(A)$, то множества класса M называют *φ -измеримыми*.

Замечание. Если M – полукольцо (в частности, кольцо), то для того, чтобы функция $\varphi(A)$ была мерой достаточно потребовать неотрицательность и аддитивность функции.

Вероятностной мерой называют всякую счетно-аддитивную меру μ , заданную на некоторой борелевской алгебре M и принимающую значение 1 на единице A_0 этой алгебры.

В теории вероятностей:

– A_0 – **пространство элементарных событий** (конкретная сущность этих элементарных событий роли не играет);

– множества $A \in M$ – **случайные события**, в частности:

A_0 – **достоверное** событие,

\emptyset – **невозможное** событие;

– значение $\mu(A)$ ($0 \leq \mu(A) \leq 1$) **вероятность случайного события A** ,

в частности:

$$\mu(A_0) = 1,$$

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

Таким образом, **вероятность** – частный случай меры.

Пример 2.1. Пусть S – полукольцо множеств, являющихся конечными подмножествами множества X . Тогда, в качестве меры можно взять функция $\mu'(A) = \sum_{x \in A} 1$ – количество элементов в множестве $A \in S$.

Пример 2.2. Пусть заданы счетное множество X и сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$. Тогда функция $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$, $A \subset X$, определенная на булеане $\mathfrak{B}(X)$, является σ -аддитивной мерой.

Если дополнительно потребовать, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, то получим вероятностную меру, которую обычно называют *дискретной*.

<p>Пример 2.3. На полукольце множеств, состоящем из ограниченных полуинтервалов</p> $[a, b) \subset \mathbb{R}$	<p>прямоугольников</p> $[a, b) \times [c, d) \subset \mathbb{R}^2$	<p>параллелепипедов</p> $[a, b) \times [c, d) \times [e, f) \subset \mathbb{R}^3$
<p>естественной мерой является</p>		
<p>длина</p> $m([a, b)) = b - a$	<p>площадь</p> $m(A) = (b - a)(d - c)$	<p>объем</p> $m(A) = (b - a)(d - c)(f - e)$

Определенная таким образом мера является σ -аддитивной.

Пример 2.4. Пусть S – полукольцо параллелепипедов из примера 2.3. Если считать, что в пространстве \mathbb{R}^3 распределено вещество, то $\forall A \in S$ в качестве меры можно взять массу вещества, находящегося в параллелепипеде A .

Пример 2.5. Пусть A_0 – произвольное непустое открытое множество, и $x_0 \in A_0$, M – борелевская алгебра всех подмножеств множества A_0 . Тогда на алгебре M вероятностную меру можно определить следующим образом

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in \text{int } A \\ 0, & x_0 \notin \text{int } A \end{cases}$$

Пример 2.6. Пусть $X = \mathbb{R} \cap [0,1]$. Тогда класс S множеств, получаемых пересечением множества X с произвольными непрерывными промежутками

$$(a,b), [a,b], [a,b), (a,b], a \geq 0, b \leq 1,$$

является полукольцом и на нем можно задать меру следующим образом

$$\forall A_{ab} \in S \quad \mu(A_{ab}) = b - a.$$

Эта мера не является σ -аддитивной, так как $m(X) = 1$, и в то же время X – счетное множество точек, каждая из которых имеет меру 0.

2.2. ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ

2.2.1. Постановка задачи

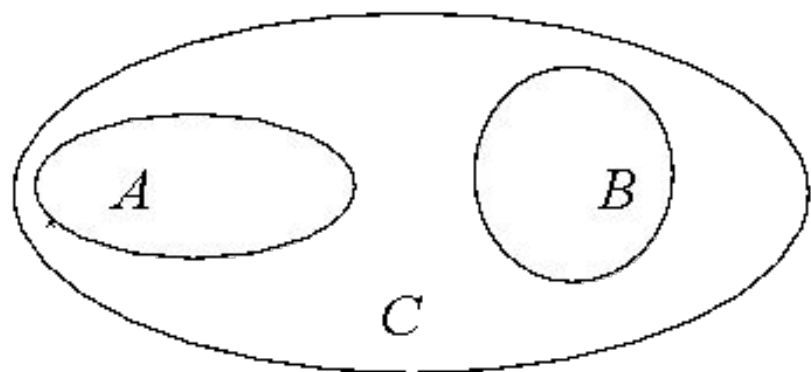
Меру μ называют *продолжением меры* t с класса M на класс H , если μ задана на $H \supset M$ и

$$\forall A \in M \quad \mu(A) = t(A).$$

При продолжении меры возникают 2 вопроса:

- 1) Всегда ли возможно продолжение меры t , заданной на произвольном классе M , хотя бы на кольцо, минимальное над M ? ►
- 2) Если продолжение меры t с класса M на упомянутое кольцо возможно, то единственно ли оно? ►

В общем случае ответ на оба эти вопроса отрицательны.



– непустые множества,

A, B, C

Пусть

$$A \subset C \quad B \subset C \quad A \cap B = \emptyset$$

Положим $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$

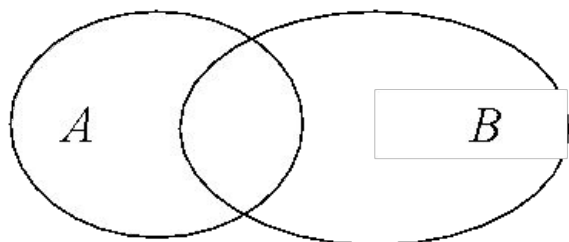
. Очевидно, – мера.

Для интересующего нас продолжения m необходимо, чтобы

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) = m(A) + m(B) = 2$$

$$\mu(A \cap B) \leq \mu(C) = m(C) = 1$$





Пусть

$$M = \{A, B\}$$

Пусть μ — мера на M . Очевидно, $\mu(A \cap B) = \mu(A \cap B)$.

Кольцо минимальное над m состоит из множеств:

$$M$$

Положим $\mu(\emptyset) = 0, \mu(A \cap B) = \alpha, \mu(A \setminus B) = 1 - \alpha, \mu(B \setminus A) = 1 - \alpha$.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset, \\ 1, & E = A, E = B, \\ \alpha, & E = A \cap B, \\ 2 - \alpha, & E = A \cup B, \\ 1 - \alpha, & E = A \setminus B \quad E = B \setminus A \\ 2 - 2\alpha, & E = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{cases}$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$\mu(E)$$

m

где μ — мера. Тогда μ — мера, она является продолжением меры m .

При этом разные значения α дают разные продолжения.



2.2.2. Продолжение меры с полукольца на кольцо, минимальное над ним

Лемма 1. Пусть мера m задана на полукольце S .

Если $A = \bigvee_{j=1}^k P_j$, $P_j \in S$ и $A = \bigvee_{i=1}^l Q_i$, $Q_i \in S$ – конечные разложения, то

$$\sum_{j=1}^k m(P_j) = \sum_{i=1}^l m(Q_i). \quad \blacktriangleright$$

Определение 0. Если $A = \bigvee_{i=1}^n A_i$, $A_i \in S$ – некоторое *конечное* разложение множества $A \in K(S)$, то

$$m'(A) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^n m(A_i). \quad (*)$$

Замечания:

1. Определение меры (*) корректно, т.к. равенство (*) определяет $m'(A)$ *однозначно*; функция $m'(A)$ неотрицательна и аддитивна.

2. Если мера m σ -аддитивна, то и мера m' будет σ -аддитивной.

Теорема 2.5. Продолжение меры с полукольца S на порожденное им минимальное кольцо $K(S)$ в пределах кольца $K(S)$ единственно. \blacktriangleright 11

Лемма 1. Пусть мера m задана на полукольце S . Тогда, если

$A = \bigotimes_{j=1}^k P_j$, $P_j \in S$ и $A = \bigotimes_{i=1}^l Q_i$, $Q_i \in S$ – конечные разложения, то

$$\sum_{j=1}^k m(P_j) = \sum_{i=1}^l m(Q_i).$$

⊗ Так как $P_j = P_j \otimes A = P_j \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^l Q_i \right) = \bigotimes_{i=1}^l (P_j \otimes Q_i)$,

$$Q_i = Q_i \otimes A = Q_i \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^k P_j \right) = \bigotimes_{j=1}^k (Q_i \otimes P_j),$$

то $\sum_{j=1}^k m(P_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l m(P_j \otimes Q_i) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k m(Q_i \otimes P_j) = \sum_{i=1}^l m(Q_i)$. ⊗



Теорема 2.5. Продолжение меры с полукольца S на порожденное им минимальное кольцо $K(S)$ в пределах кольца единственно, т.е. если μ произвольное продолжение меры m с полукольца S на некоторый класс M и $A \in M \cap K(S)$, то

$$\mu(A) = m'(A).$$

□ Если $A \in K(S)$, то существует разложение $A = \bigvee_{i=1}^n A_i$, $A_i \in S$.

Так как $A \in M$ и μ продолжение меры m , то

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i) = m'(A). \quad \square$$



2.2.3. Продолжение меры по схеме древних греков

Пусть мера μ задана на классе M множеств $E \subset A_0$, где A_0 – некоторое фиксированное множество (из него «черпаются» множества класса M). Будем считать, что $\emptyset \in M$. Для любого $A \subset A_0$ положим

$$\mu_{\text{int}}(A) = \sup_{\substack{E \in M \\ E \subset A}} \mu(E).$$

Функцию $\mu_{\text{int}}(A)$ называют *внутренней мерой* множества A , индуцированной мерой μ . Отметим, что она определена и неотрицательна для всех множеств пространства A_0 , но, вообще говоря, принимает не только конечные, но и бесконечные значения.

Рассмотрим теперь класс *мажорируемых* множеств

$$H = \{A \mid A \subset A_0 \text{ и } \exists B \in M \ A \subset B\}.$$

На классе H определим функцию

$$\mu_{\text{ext}}(A) = \inf_{\substack{E \in M \\ A \subset E}} \mu(E). \quad (*)$$

Функцию (*) называют *внешней мерой* множества A , индуцированной мерой μ . Отметим, что она также как и внутренняя мера может принимать как конечные, так и бесконечные значения. Но, в отличие от внутренней меры, определена не на всем пространстве A_0 , а лишь на H .

Пусть на классе S определена мера μ .

Теорема 2.6. Пусть $\bar{\mu}$ – произвольное продолжение меры μ с S на класс $\bar{S} \supset S$. Тогда $\forall E \in \mathcal{H} \cap \bar{S} \quad \mu_{\text{int}}(E) \leq \bar{\mu}(E) \leq \mu_{\text{ext}}(E)$.



Пусть \bar{S} класс мажорируемых множеств, для которых $\mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$. Тогда

$$\forall E \in \bar{S} \quad \bar{\mu}(E) \stackrel{df}{=} \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E). \quad (*)$$

Замечания:

1. Определение меры (*) корректно, т.к. $\bar{\mu}$ определена на \bar{S} , в силу существования и единственности супремума и инфимума; неотрицательна и монотонна. Кроме того, можно доказать, что $\bar{\mu}$ – аддитивная функция.

$$2. \forall E \in S \quad \mu(E) = \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E) \Rightarrow \forall E \in S \quad \bar{\mu}(E) = \mu(E).$$

Следовательно, $\bar{\mu}$ – некоторое продолжение меры μ с класса S на класс \bar{S} . Такое продолжение меры называют *продолжением по схеме древних греков*.

Теорема 2.6. Пусть μ – произвольное продолжение меры μ с класса S на некоторый класс $\mathcal{S} \supset S$. Тогда

$$\forall E \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S} \quad \mu_{\text{int}}(E) \leq \mu(E) \leq \mu_{\text{ext}}(E).$$

$$\begin{aligned} \forall E \in \mathcal{S} \Rightarrow \forall A \in S \quad A \subset E \Rightarrow \mu(A) = \mu(A) \leq \mu(E) \\ \Rightarrow \mu_{\text{int}}(E) \leq \mu(E). \end{aligned}$$

Так как $E \in \mathcal{H}$, то существует такое $B \in S$, что $E \subset B$, при этом

$$\forall B \in S \quad E \subset B \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(B) = \mu(B),$$

а значит, $\mu(E) \leq \mu_{\text{ext}}(E)$.



Пусть \bar{S} класс мажорируемых множеств, для которых $\mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$.

Тогда $\forall E \in \bar{S} \quad \bar{\mu}(E) \stackrel{df}{=} \mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$.

З а м е ч а н и я:

3. Условие $\mu_{\text{int}}(E) = \mu_{\text{ext}}(E)$ эквивалентно условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A, B \in S \quad A \subset E \subset B \quad \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

(или $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$, если S кольцо).

4. Если мера μ определена на **полукольце** S , то его сначала продолжают на кольцо $K(S)$, а потом применяют схему древних греков.

5. Если S кольцо, то и \bar{S} – кольцо.

6. Если исходная мера задана на **кольце** K , то $\bar{\mu}$ называют **продолжением по схеме Жордана**. Такое продолжение меры единственно в пределах кольца \bar{K} , но вне кольца \bar{K} единственность уже не имеет места.

2.2.4 Продолжение счетно-аддитивной меры с кольца K на классы $\sigma(K)$ и $\delta(K)$

Пусть *счетно-аддитивная мера* m задана на *кольце* $K \neq \sigma(K)$.

Лемма 2. Пусть $A \in \sigma(K)$, $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, $P_j \in K$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $Q_i \in K$ – *счетные разложения* множества A . Тогда $\sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) = \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)$, причем из сходимости (расходимости) одного ряда следует сходимость (расходимость) другого.

Определение 1. Пусть $A \in \sigma(K)$. Если существует *счетное разложение*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in K,$$

для которого ряд $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ *сходится*, то полагаем

$$\mu(A) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Определение 1. Пусть $A \in \sigma(K)$. Если существует счетное разложение $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$, для которого ряд $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ сходится, то $\mu(A) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. (*)

Замечания

1. Определение меры (*) корректно, т.к. μ *однозначно* определена на \bar{S} ; неотрицательна и аддитивна.

2. Если $A \in K$, то (*) выполняется в силу счетной аддитивности меры m , следовательно, μ – продолжение меры m с кольца K на класс $\mathfrak{G}(K)$ (класс множеств, удовлетворяющих требованиям определения 1).

3. Если $A \in \sigma(K)$, но ряд $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ расходится, то $\mu(A) \stackrel{df}{=} +\infty$. Тогда каждому $A \in \sigma(K)$ будет приписано *конечное* (для $A \in \mathfrak{G}(K)$) или *бесконечное* (для $A \in \sigma(K) \setminus \mathfrak{G}(K)$) значение μ .

4. Если K алгебра, то $\mathfrak{G}(K) = \sigma(K)$ и $\forall A \in \sigma(K) \mu(A) < \infty$.

Определение 1. Пусть $A \in \sigma(K)$. Если \exists -ет счетное разложение $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$,

для которого ряд $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ сходится, то $\mu(A) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Теорема 2.7. Пусть K – кольцо, $A \in \sigma(K)$, $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$ и $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$

Тогда $\mu(A) < \infty$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$ и всегда (т.е. и в случае $\mu(A) < \infty$, и в случае $\mu(A) = \infty$)

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n). \quad \blacktriangleright$$

Следствие. Пусть K – кольцо, $A \in \sigma(K)$, $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in K$. Тогда $\mu(A) < \infty$ в том и

только в том случае, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigvee_{i=1}^n A_i\right)$ и всегда

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigvee_{i=1}^n A_i\right). \quad \blacktriangleright$$

Теорема 2.8. (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\mathfrak{G}(K)$). Если μ произвольное продолжение счетно-аддитивной меры m с кольца K на некоторый класс \mathfrak{K} и $A \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}(K)$, то $\mu(A) = \mu(A)$. \blacktriangleright

Теорема. Пусть K – кольцо,

$$A \in \sigma(K), A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K \text{ и } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$$

Тогда $\mu(A) < \infty$ в том и только в том случае, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$ и всегда (т.е. и в случае $\mu(A) < \infty$, и в случае $\mu(A) = \infty$)

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n). \quad (*)$$

▣ Пусть $\mu(A) < \infty$. Очевидно, что $A = A_1 \sqcup \bigvee_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)$ – разложение, причем слагаемые принадлежат кольцу K . Поэтому

$$\mu(A) = m(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{i+1} \setminus A_i). \quad (**)$$

Число $m(A_n)$ – n -я сумма ряда (**) \Rightarrow предел (*) существует и равен $\mu(A)$.

Если конечный предел (*) существует, то сходится ряд в правой части (**). По определению 1 его сумма есть значение $\mu(A)$, т.е. справедливо (**).

Справедливость равенства (**) в случае $\mu(A) = \infty$ вытекает из уже доказанной части теоремы. ▣



Следствие. Пусть K – кольцо,

$$A \in \sigma(K), A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K.$$

Тогда значение $\mu(A)$ конечно в том и только в том случае, если

существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right)$ и всегда

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right).$$

□ Достаточно положить $\bigsqcup_{i=1}^n A_i = A'_n$ и применить теорему. □

Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\mathfrak{G}(K)$). Если μ произвольное продолжение меры m с кольца K на некоторый класс \mathfrak{K} и $A \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}(K)$, то $\mu(A) = \mu(A)$.

□ Если $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K$ – счетное разложение, то

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \mu(A). \quad \blacktriangleleft$$

Лемма 3. Пусть K – кольцо,

$$A \in \delta(K), \quad A = \bigotimes_{j=1}^{\infty} P_j = \bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad P_i, Q_i \in K$$

где $P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$, $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n \supset \dots$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n). \quad \blacktriangleright$$

Следствие. Если $A \in \delta(K)$, $A = \bigotimes_{j=1}^{\infty} P_j = \bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_i$, $P_i, Q_i \in K$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \left(\bigotimes_{j=1}^n P_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left(\bigotimes_{i=1}^n Q_i \right).$$

☐ Достаточно положить $\bigotimes_{i=1}^n P_i = P'_n$, $\bigotimes_{i=1}^n Q_i = Q'_n$ и применить теорему. ☐

Определение 2. Пусть $A \in \delta(K)$.

$$\text{Если } A = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in K, \quad \text{то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left(\bigotimes_{i=1}^n A_i \right).$$

Лемма 3. Пусть K – кольцо,

$$A \in \delta(K), A = \bigcap_{j=1}^{\infty} P_j = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i, P_i, Q_i \in K,$$

$$P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots, Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n \supset \dots$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n). \quad (*)$$

□ Пусть $B = P_1 \cap Q_1$. Тогда $B \setminus A = \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus P_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus Q_i)$, где

$$B \setminus P_1 \subset B \setminus P_2 \subset \dots \subset B \setminus P_n \subset \dots,$$

$$B \setminus Q_1 \subset B \setminus Q_2 \subset \dots \subset B \setminus Q_n \subset \dots,$$

причем все эти множества принадлежат кольцу K . Таким образом, $B \setminus A \in \sigma(K)$ и $B \setminus A \subset B \in K$, постольку значение $\mu(B \setminus A) < \infty$. В силу предыдущей теоремы

$$\mu(B \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B \setminus P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B \setminus Q_n). \quad (**)$$

Равенство (*) следует из (**), так как

$$m(P_n) = m(B \setminus (B \setminus P_n)) = m(B) - m(B \setminus P_n),$$

$$m(Q_n) = m(B \setminus (B \setminus Q_n)) = m(B) - m(B \setminus Q_n). \quad \square$$



Определение 2. Пусть $A \in \delta(K)$.

$$\text{Если } A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigvee_{i=1}^n A_i\right). \quad (*)$$

Замечания:

1. Такое определение меры корректно, т.к. μ *однозначно* определена на \bar{S} ; неотрицательна и аддитивна.

2. Если $A \in K$ справедливость равенства (*) следует из свойств непрерывности счетно-аддитивной меры, следовательно, мера $\mu(A)$ является продолжением меры m с кольца K на класс $\delta(K)$.

3. Непосредственно из определения следует, что если

$$A \in \delta(K), A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K \text{ и } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_i \supset \dots, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

$$\boxtimes \text{ В этом случае } A_n = \bigvee_{i=1}^n A_i. \boxtimes$$

Определение 2. Пусть $A \in \delta(K)$.

$$\text{Если } A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K, \text{ то } \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left(\bigvee_{i=1}^n A_i \right).$$

Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\delta(K)$). Если μ произвольное продолжение меры m с кольца K на некоторый класс \mathcal{K} и $A \in \mathcal{K} \cap \delta(K)$, то

$$\mu(A) = \mu(A).$$

\square Если $A = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in K$, то в условиях теоремы

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left(\bigvee_{i=1}^n A_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigvee_{i=1}^n A_i \right) = \mu \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \mu(A). \square$$

Теорема. Функция μ , заданная на $\mathfrak{G}(K)$ определением 1 и на $\delta(K)$ определением 2, является продолжением меры m с кольца K на класс $\mathfrak{G}(K) \cap \delta(K)$ (или на класс $\sigma(K) \cap \delta(K)$, если рассматривать и бесконечные значения μ).

Теорема (единственность счетно-аддитивного продолжения меры в пределах класса $\mathfrak{G}(K) \cap \delta(K)$). Если μ произвольное счетно-аддитивное продолжение меры m с кольца K на некоторый класс K' и $A \in K' \cap [\mathfrak{G}(K) \cap \delta(K)]$, то $\mu(A) = \mu(A)$.

Пусть m счетно-аддитивная мера, заданная на полукольце S . Продолжим m продолжим на кольцо $K(S)$, далее на класс $H = \mathfrak{G}(K) \cap \delta(K)$ в соответствии с определениями 1 и 2, и, наконец, по схеме древних греков на класс \bar{S} . Полученную меру μ называют продолжением меры m с полукольца S на класс \bar{S} *по схеме Лебега*.

МЕРЫ СТИЛТЬЕСА

Мера Стильеса на прямой

Мерой Стильеса на прямой называют всякую меру, заданную на каком-нибудь классе *промежутков* числовой прямой.

Теорема 2.8. Если I – некоторый числовой промежуток; H – полукольцо всевозможных полуинтервалов $E = [\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in I$, то произвольная неубывающая функция φ , определенная на I , задает меру Стильеса, определенную на H :

$$\mu(E) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha). \quad (**)$$

☒ Так как функция $\mu(E)$ определена на полукольце, то достаточно доказать, что она неотрицательна и аддитивна.

Неотрицательность следует из неубывания φ .

Аддитивность φ . Пусть $E = [\alpha, \beta) \in H$, $E = E_1 \boxplus E_2$, $E_1 \boxplus E_2 = \emptyset$, тогда

$$E_1 = [\alpha, \gamma), E_2 = [\gamma, \beta), \alpha < \gamma < \beta \text{ (или } E_2 = [\alpha, \gamma), E_1 = [\gamma, \beta)).$$

Следовательно,

$$\mu(E) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = [\varphi(\beta) - \varphi(\gamma)] + [\varphi(\gamma) - \varphi(\alpha)] = \mu(E_1) + \mu(E_2). \quad \boxplus$$

Меру (***) называют *мерой Стильеса, порожденной функцией φ* , а φ – *производящей функцией меры (***)*.

$$\mu(E) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha), \quad E = [\alpha, \beta], \quad \alpha, \beta \in I \quad (**)$$

Теорема 2.9. Функции φ и $\varphi + \text{const}$ порождают одну и ту же меру (**).
 Более того, формула $\varphi + \text{const}$ исчерпывает **все** возможные меры (**).

☒ Пусть ψ , как и φ , – производящие функции меры (**).

Фиксируем какое-нибудь значение $x_0 \in I$ и рассмотрим произвольное $x \in I$:

1) если $x_0 \leq x$, то для $E = [x_0, x)$ $\mu(E) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \psi(x) - \psi(x_0)$,

откуда

$$\varphi(x) - \psi(x) = \varphi(x_0) - \psi(x_0); \quad (*)$$

2) если $x \leq x_0$, то для $E = [x, x_0)$ $\mu(E) = \varphi(x_0) - \varphi(x) = \psi(x_0) - \psi(x)$,

откуда опять получим (*).

Следовательно, $\varphi(x) - \psi(x) = c = \text{const}$, т.е. $\forall x \in I \quad \varphi(x) = \psi(x) + c$. ☒

Замечание. Если $\varphi(x) = x + c$, то $\mu(E) = \beta - \alpha$ – длина $[\alpha, \beta)$.

Теорема 2.10. Пусть функция φ задана и не убывает на всей числовой прямой, мера Стильеса (**), заданная на полукольце H всевозможных *ограниченных* полуинтервалов $E = [\alpha, \beta)$. Для счетной аддитивности такой меры необходимо и достаточно, чтобы производящая функция φ была всюду непрерывной слева.

Следствие. Для полуинтервала $E = [\alpha, \beta)$ длина $\mu(E) = \beta - \alpha$ – счетно аддитивная мера.

Замечание. Все изложенное выше сохраняет силу, если вместо полуинтервалов $[\alpha, \beta)$ взять полуинтервалы вида $(\alpha, \beta]$ – лишь в теореме нужно потребовать непрерывности φ справа (а не слева).

Мера Стильеса на плоскости и в n -мерном пространстве

Мерой Стильеса в n -мерном евклидовом пространстве называют всякую меру, заданную на каком-нибудь классе n -мерных параллелепипедов

$$E = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n \right\},$$

где A_1, A_2, \dots, A_n – числовые промежутки. Если $n = 2$ ($n = 3$), то меру Стильеса называют *плоской* (*объемной*).

Пусть H – класс всевозможных n -мерных параллелепипедов

$$E = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \alpha_1 \leq x_1 < \beta_1, \alpha_2 \leq x_2 < \beta_2, \dots, \alpha_n \leq x_n < \beta_n \right\},$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда произвольные n определенные и *неубывающие* на всей числовой прямой функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (*)$$

задают меру Стильеса, определенную на H :

$$\mu(E) = [\varphi_1(\beta_1) - \varphi_1(\alpha_1)][\varphi_2(\beta_2) - \varphi_2(\alpha_2)] \dots [\varphi_n(\beta_n) - \varphi_n(\alpha_n)].$$

Замечание. Если дополнительно потребовать, чтобы все функции (*) были непрерывны слева, то мера $\mu(E)$ будет счетно-аддитивной.