Наименование темы

- ***ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА.***

Оглавление:

Содержание темы

- Широкое применение в электро- и радиоустановках находят периодические эдс, напряжения и токи.
- Периодические величины изменяются по величине и направлению во времени, причём эти изменения повторяются через равные промежутки времени Т, называемые периодом.
- Переменный ток – это ток, изменяющийся во времени.
- Синусоидальный ток – ток изменяющийся по закону синуса.

Цель лекции:

- Изучить способ получения переменного тока, понять устройство генератора переменного тока и принцип его работы. Изучить действующее и среднее значение синусоидального тока. Уметь представлять синусоидальные величины в виде векторов. Освоить символический метод расчета, а также законы Ома и Кирхгофа для цепей переменного тока и уметь применять их в расчетах.

После изучения вы сможете

- Представлять синусоидальные величины в виде векторов. Применять в расчетах символический метод расчета, а также законы Ома и Кирхгофа для цепей переменного тока.

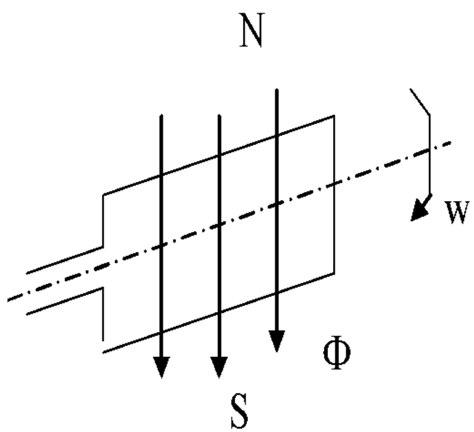
Основное преимущество синусоидального тока

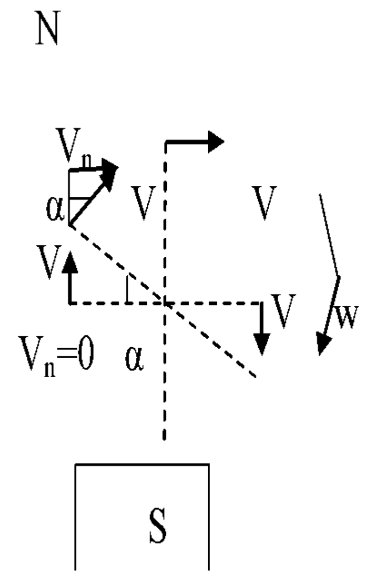
- Основное преимущество такого закона изменения эдс и напряжения, заключается в том, что в процессе передачи электроэнергии на большие расстояния и при многократной трансформации (изменении) напряжения. Его временная зависимость остается постоянной, т.е. синусоидальной. Как увидим дальше, передавать электроэнергию экономически выгодно высоким напряжением, а распределять из соображений безопасности низким. Поэтому и приходится его трансформировать.

. Получение переменного синусоидального тока

- Получение переменного тока основано на явлении электромагнитной индукции. Рассмотрим вращение прямоугольного витка с угловой скоростью и помещенного в однородное магнитное поле с потоком Ф.

Принцип получения





Проводник движется с постоянной линейной скоростью V

Получение синусоидальной ЭДС

Когда он пересекает линии магнитного поля тока, в нем индуцируется эдс:

$$e_{пр} = Bl\,V_n,$$

где B – магнитная индукция;

l – активная длина проводника;

V_n – составляющая линейной скорости, нормальная к магнитному потоку.

Синусоидальная ЭДС

При перемещении (повороте) рамки на угол $\alpha = \omega t$, $V_n = V \sin \omega t$.

Тогда $e_{пр} = BlV \sin \omega t$, обозначим BlV – E_m – величина постоянная и запишем:

$$\boxed{e_{пр} = E_m \sin \omega t}$$

Начальная фаза ЭДС

Если в начальный момент рамка находилась под углом ψ к полю, то через время t она окажется к нему под углом $(\omega t + \psi)$ и наводимая эдс будет равна:

$$\boxed{e_{пр} = E_m \sin(\omega t + \psi)}$$

E_m – максимальное значение эдс;

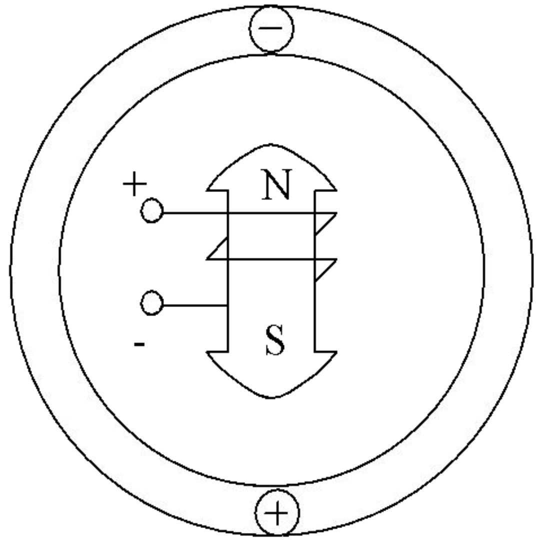
$(\omega t + \psi)$ – фаза эдс;

ψ – начальная фаза эдс.

. Генератор переменного тока

- Переменный ток создают синхронные генераторы. Простейший синхронный генератор состоит из неподвижной части – статора, и вращающейся – ротора.
- Статор имеет форму полого цилиндра, в пазах которого уложены изолированные проводники, образующие обмотку статора.

Устройство генератора синусоидального тока



Ротор в профильном случае представляет собой электромагнит, возбуждаемый постоянным током.

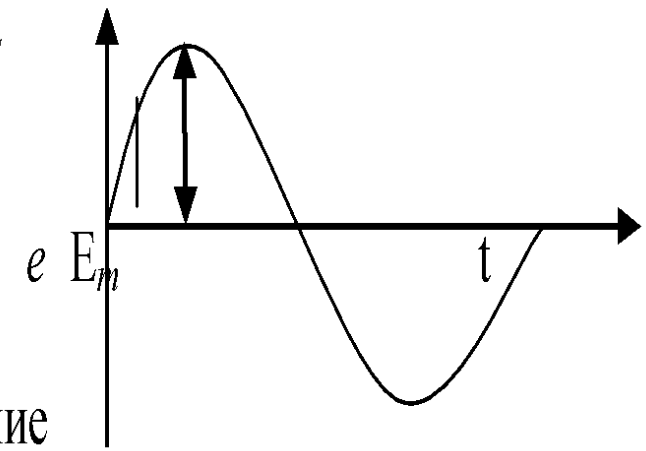
Ток возбуждения в обмотку ротора подается через медные кольца, укрепленные на валу ротора. По кольцам скользят неподвижные щетки, соединенные проводами с возбудителем – небольшим относительно генератора постоянного то

Магнитный поток

- При вращении ротора создается магнитный поток, который пересекает проводники статора и индуктирует в них переменную эдс: $\Phi = \Phi m \cos \omega t$.

Параметры синусоиды

Рассмотрим синусоиду   E



E_m – максимальное значение

e – мгновенное значение

Период

- Время одного полного оборота ротора называется периодом T [сек].
- Величина, обратная периоду, называется частотой $f = 1/T$ [1/сек] = [Гц] в системе СИ.
- При полном обороте рамки $\alpha = 2\pi$ и $\alpha = \omega T$, т.к. время $t = T$.

Параметры синусоиды

-период

f- частота

$\alpha = 2\pi$

$\omega t = T$

$2\pi = \omega t$

$\omega = 2\pi / T$

$\omega = 2\pi f$

ω-угл.частота

f=50Гц

ω=314рад/с

n об/мин

$f = n/60$

Действующее значение синусоидального тока

- Как постоянный, так и синусоидальный токи используются для сКовершения какой-либо работы, в процессе которой эл. энергия преобразуется в другие виды энергий (тепловую, механическую и т.д.).
- Для количественной оценки синусоидального тока пользуются действующим значением тока

Определение:

- Действующим значением синусоидального тока называется такое значение постоянного тока, который за период в одном и том же сопротивлении выделяет то же количество теплоты, что и рассматриваемый переменный ток.

Действующее значение

При синусоидальном токе $i = I_m \sin \omega t$ в резисторе R выделится теплота за период T.

$$\widetilde{Q} = \int_0^T i^2 R dt,$$

при постоянном токе за это время

$\overline{Q} = RI^2 T$ - по закону Джоуля – Ленца

$\widetilde{Q} = \overline{Q}$ (приравняем),

$$RI^2 T = \int_0^T i^2 R dt$$

, отсюда

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dT} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Решаем интеграл

$$\int_0^T i^2 dt = I_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt = I_m^2 \int_0^T \frac{dt}{2} - I_m^2 \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} dt ,$$

т.к. $\int_0^T \cos 2\omega t dt = 0$, то $\int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2 T}{2}$, подставим

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{I_m^2 T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

Действующее значение

- Действующее значение синусоидальной величины меньше максимального в раз.
- Например, если U_{max}=141В, то вольтметр покажет U=100В. Действующее значение измеряют приборы электромагнитной, электродинамической систем.

Выводы

Действующее значение синусоидальной величины меньше максимального в $\sqrt{2}$ раз.

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}};$$

Среднее значение синусоидального тока

- Под средним значением понимают среднеарифметическое значение синусоиды за пол периода, т.к. за период оно будет равно нулю (положительные и отрицательные полуволны совпадают по форме).

Определение:

Среднее значение синусоидального тока это такое значение постоянного тока, при котором за полпериода переносится такой же Эл. Заряд, что и при синусоидальном токе. $I_{cp} = \dfrac{2I_m}{\pi}$

Среднее значение

$I_{cp} \cdot \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i dt$, где I_m - среднее значение тока.

$$\int_0^{T/2} i dt = I_m \int_0^{T/2} \sin\omega t dt = -I_m \cdot \frac{1}{\omega} \cos\omega t \Big|_0^{T/2} = -\frac{TI_m}{2\pi} \cos\left[\frac{2\pi T}{T2} - \right] - \cos 0 = \frac{2TI_m}{2\pi} = \frac{I_m T}{\pi},$$

тогда $I_{cp} = \frac{2I_m}{\pi}$=0,637 I_m. Аналогично $E_{cp} = \frac{2E_m}{\pi}$, $U_{cp} = \frac{2U_m}{\pi}$. Коэффициент амплитуды $k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}$. Среднее значение меньше действующего. Это показывает коэффициент формы $k_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$. Для несинусоидальных токов k_a и k_ϕ будут другими.

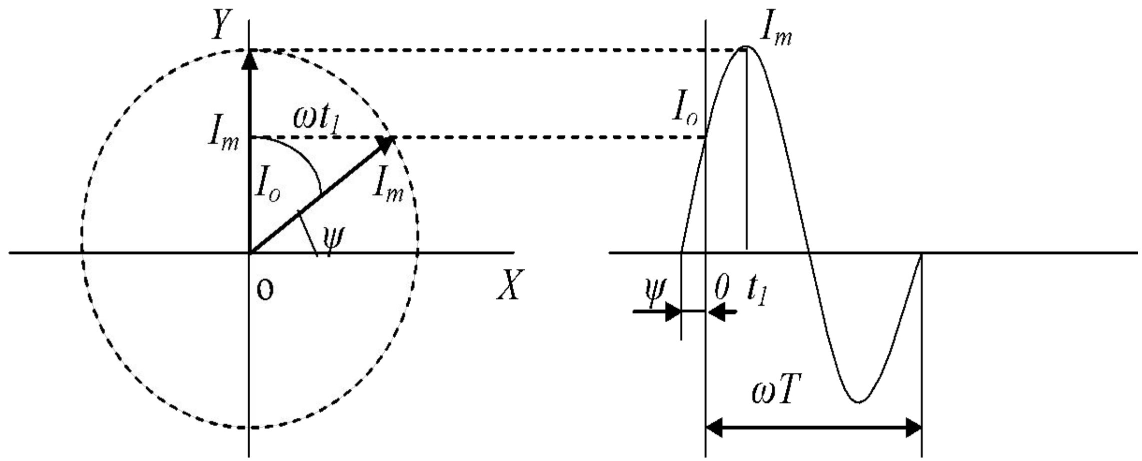
Среднее значение используется для выпрямительных установок.

Представление синусоидальных величин в виде векторов

- При расчете электрических цепей необходимо складывать или вычитать синусоидальные величины. Графическое сложение двух (или более) таких величин является довольно трудоемкой операцией, а хорошая точность может быть достигнута при сложении очень большого числа мгновенных значений

Связь между вращающимся вектором и синусоидой

Рассмотрим синусоидальную величину и соответствующий ей вращающийся вектор.



Начальная фаза

При $t = 0$ мгн. значение тока I_0 и является проекцией вектора на ось ОУ (вертикальная ось), ψ = начальной фазе синусоиды, величина вектора равна I_m.

Мгновенные значения синусоиды

При $t = t_1$ $i = I_m$ вектор повернулся на угол ωt_1. Т.о., проекция на ось ОУ вектора, вращающегося с постоянной скоростью ω и имеющего длину, равную амплитуде тока, изменяются по синусоидальному закону, т.е. представляют собой мгновенные значения синусоиды

Связь между синусоидой и вектором

- Между синусоидой и вектором существует строго однозначная связь и любую синусоидально изменяющуюся величину можно изобразить вращающимся вектором. Начальное положение вращающегося вектора определяется углом, равным <u>начальной фазе</u> синусоиды.

Направление вращения вектора

- Положительное направление вращения вектора принимается против часовой стрелки. Т.к. напряжения и токи имеют одинаковую частоту, то изображающие их вектора вращаются с одинаковой скоростью. Их взаимное расположение в плоскости остается постоянным

Изображение векторов

- Поэтому в практике векторы не вращают, а строят, соблюдая между ними углы (углы сдвига фаз). (Комплексную плоскость также не рисуют.)

Векторная диаграмма

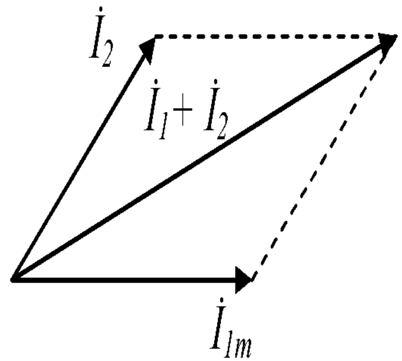
- Совокупность векторов токов и напряжений, построенных в масштабе соблюдения фаз между ними называются векторной диаграммой

Векторная диаграмма

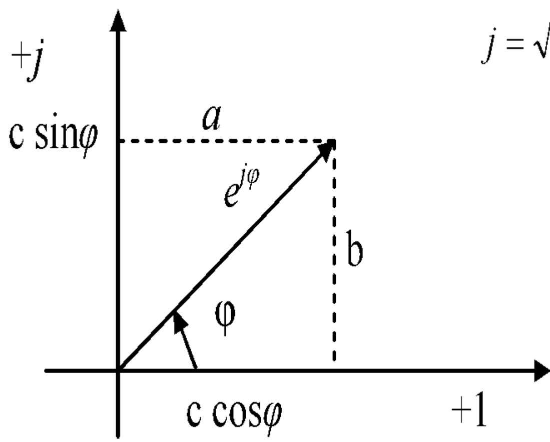
Принято на векторной диаграмме откладывать не максимальные, а действующие значения синусоиды. $\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = Ie^{j\varphi}$

Пример сложения векторов

Пример:



. Комплексная плоскость



$j = \sqrt{-1}$

$a + jb$

$ce^{j\varphi} = c\cos\varphi + jc\sin\varphi$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\mathrm{tg}\varphi = b/a$

$\varphi = +arctg\,(b/a)$

$a = c\cos\varphi$

$b = c\cos\varphi$

Комплексное число

Комплексное число можно изображать на комплексной плоскости либо координатами *a* и *b* *(a+jb)*, либо вектором $e^{j\alpha} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ (формула Эйлера).

Математические операции над синусоидальными величинами

- Математические операции над синусоидальными величинами можно проводить в комплексной (векторной) форме. Докажем соответствие синусоидальной величины и её изображения на комплексной плоскости

Алгебраическая форма

Примем $c = I_m$, тогда: $I_m\, e^{j\varphi} = I_m \cos\varphi + j\, I_m \sin\varphi$.

Величина вектора в I_m раз больше. Положим, что угол изменяется прямо пропорционально времени, т.е. $\varphi = \omega t + \psi$ тогда:

$$I_m\, e^{j(\omega t+\psi)} = I_m \cos(\omega t+\psi) + j\, I_m \sin(\omega t+\psi)$$

Действительная и мнимая части

$I_m\cos(\omega t+\psi)$ - действительная часть Re $I_m\, e^{j(\omega t+\psi)}$;

$I_m\sin(\omega t+\psi)$мнимая часть Im $I_m\, e^{j(\omega t+\psi)}$

Т.о. синусоидально изменяющийся ток $i = I_m\sin(\omega t+\psi)$ может быть представлен как Im $I_m\, e^{j(\omega t+\psi)}$ или как проекция вращающегося вектора на ось $+j$.

Изображение векторов

Для единообразия принято изображать векторы синусоидально изменяющихся величин для момента времени $\omega t = 0$ ($\varphi=\psi$), тогда $I_m\, e^{j(\omega t+\psi)} = I_m\, e^{j\psi} = \dot{I}_m$ – комплексная величина, модуль ее равен I_m , а угол вектора к +1 оси равен начальной фазе ψ . $\dot{I}_m$ - комплексная амплитуда тока i.

$i = 8 \sin(\omega t+20^{o})$ A $\rightarrow \dot{I}_m = 8\, e^{j20} = 7{,}52+2{,}74\, j$.

$\dot{I}_m = 25\, e^{-j30}$ A $\rightarrow i = 25 \sin(\omega t - 30^{o})$

Сложение и вычитание

- Сложение и вычитание комплексных чисел удобнее проводить в алгебраической форме:
- $(a_1+jb_1)+(a_2+jb_2)-(a_3+jb_3) = (a_1+a_2-a_3) + j(b_1+b_2-b_3)$

Пример

Пример: Пусть надо сложить два тока $i = i_1 + i_2$

$i_1 = I_{1m}\sin(\omega t+\psi_1);$ $i_2 = I_{2m}\sin(\omega t+\psi_2);$

$\Downarrow$ *представляем в виде вектора* $\Downarrow$

$\dot{I}_{1m} = I_{1m}\, e^{j\psi}$ $\dot{I}_{2m} = I_{2m}\, e^{j\psi}$

геометрически сложим

$I_{1m}\cos\psi_1 + j\, I_{1m}\sin\psi_1$ $\dot{I}_m = I_m\, e^{j\psi}$ $I_{2m}\cos\psi_2 + j\, I_{2m}$
$\sin\psi_2$

$+$

$I_{2m}\cos\psi_2 + j\, I_{2m}\sin\psi_2$ $\Downarrow$ $i = I_m\sin(\omega t+\psi)$

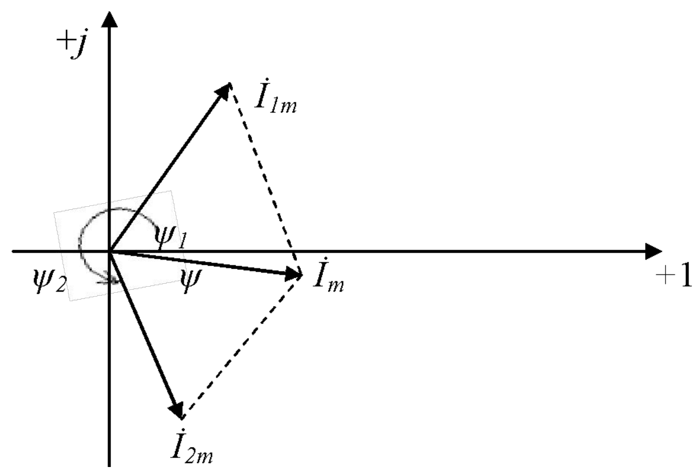
X + j У

$I_{1m}\cos\psi_1 + j\, I_{1m}\sin\psi_1 + I_{2m}\cos\psi_2 + j\, I_{2m}\sin\psi_2 =$ X + j У

В векторной форме

$$\dot{I}_m = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{j\,arctg(\frac{y}{x})}$$

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$$



Деление иумножение

<u>Деление комплексных чисел</u> удобнее проводить в показательной форме:

$$c_3 e^{j\varphi_3} = \frac{c_1 e^{j\varphi_1}}{c_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad c_3 = \frac{c_1}{c_2}; \quad \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$$

<u>Умножение комплексных чисел</u> – в показательной форме:

$$c_4 e^{j\varphi_4} = c_1 e^{j\varphi_1} \cdot c_2 e^{j\varphi_2} = c_1 \cdot c_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Модуль функции $e^{j\alpha} = 1$

$$\left| e^{j\varphi} \right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

Комплекс действующего значения $\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = Ie^{j\varphi}$.

Умножение на j и -j

<u>Умножение вектора на j и –j</u> даёт вектор, по модулю равный исходному, но поворачивает его на 90^0 в сторону опережения/отставания.

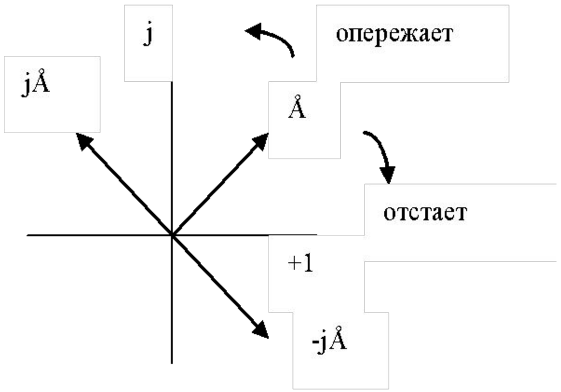
$$\mathring{A} = A * e^{j\varphi a}$$

$$j = 0 + 1j = 1e^{j90^0} = e^{j90^0}$$

$$-j = 0 - 1j = 1e^{-j90^0} = e^{-j90^0}$$

$$\mathring{A}\, j = Ae^{j\varphi a}\, e^{j90^0} = Ae^{j(\varphi a + 90^0)}$$

$$-\mathring{A}\, j = Ae^{j\varphi a}\, e^{-j90^0} = Ae^{j(\varphi a - 90^0)}$$



Законы Ома и Кирхгофа для цепи синусоидального тока

- Т.к. синусоидальные напряжения и ток характеризуется мгновенными, максимальными и действующими значениями таким образом для каждого из них существует своя формулировка закона.
- Для максимальных и действующих значений законы Ома и Кирхгофа справедливы в векторной форме:

Законы Кирхгофа

I закон Кирхгофа: $\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$

II закон Кирхгофа : $\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k$; $\dot{U}_k = \dot{I}_k * Z_k$

Комплексное сопротивление

Комплексное сопротивление [Ом]:

$Z = z * e^{j\varphi} = R + j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}$ (точка не ставится, т.к. Z не изменяется по sin закону)

$\dot{I}_m * Z = \dot{E}_m$, комплексные амплитуды поделим на $\sqrt{2}$:

$\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{Z}$ - закон Ома для цепи синусоидального тока.

Активное и реактивное сопротивление

$Z = R + jX$ R – активное сопротивление, $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ - реактивное.

Закон Ома для участка цепи: $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$ - ток, протекающий через сопротивление Z (полное сопротивление участка цепи), прямо пропорционален напряжению на участке цепи.

Комплексная проводимость [См]:

$$Y = \frac{1}{Z} = g - jb = ye^{-j\varphi} \qquad \left[Ом^{-1}\right] = \left[Сим\right]$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jx} = \frac{R - jx}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb$$

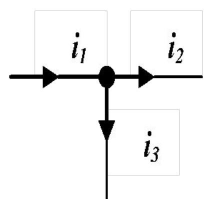
$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

Закон Ома: $\dot{I} = \mathring{U}Y$ или $\dot{I} = \mathring{U}g - j\mathring{U}b = \underset{\text{акт.}}{\dot{I}a} + \underset{\text{реакт.}}{\dot{I}r}$

Законы Кирхгофа для мгновенных значений

<u>I закон Кирхгофа:</u> алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$



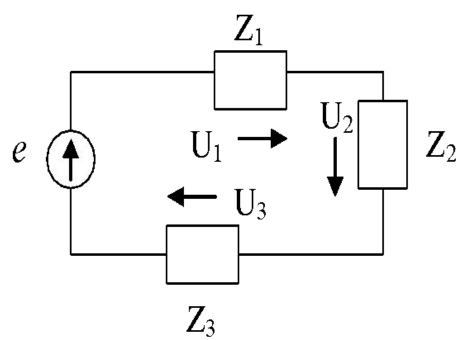
$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

II закон Кирхгофа

II закон Кирхгофа: алгебраическая сумма э.д.с. в замкнутом контуре равна алгебраической сумме мгновенных значений падений напряжения.

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0$$



$$e = u_1 + u_2 + u_3$$

Если e=0, то сумма

Информационные источники

- 1. Касаткин А.С., Немцов М.В.. Электротехника. М.: Высш. шк., 1999.
- 2. Иванов И.И., Лукин А.Ф., Соловьев Г.И. Электротехника: Основные положения, примеры и задачи. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература» - СПб.: Издательство «Лань», 1999.
- 3. Атабеков Г.И. Основы теории цепей: Учебник/ Г.И. Атабеков. – 2-е изд., испр.- СПб.: Лань, 2006.- 424с.
- 4. Теоретические основы электротехники: Учеб. Для вузов/ А.И. Горбунов, И.Д. Кабанов, А.В. Кравцов и др. – М.: МГАУ, 1988.
- 5. Электротехника и электроника: учеб.д ля вузов/ М.В. Немцов, М.Л. Немцова. – 2-е изд., стер.- М.: Академия,2009. – 427с.
- 6.. Курс электротехники: учеб. Для вузов/ А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. Шк, 2007.