

Наименование темы

- ***ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА.***

Оглавление:

- Введение. Понятие переменного тока.
- 2.1. Получение переменного тока.
- 2.2. Генератор переменного тока.
- 2.3. Параметры синусоиды.
- 2.4. Действующее и среднее значение синусоидального тока.
- 2.5. Среднее значение синусоидального тока.
- 2.6. Представление синусоидальных величин в виде векторов. Векторные диаграммы.
- 2.7. Комплексная плоскость.
- 2.8. Законы Ома и Кирхгофа для цепей синусоидального тока.

Содержание темы

- Широкое применение в электро- и радиоустановках находят периодические эдс, напряжения и токи.
- Периодические величины изменяются по величине и направлению во времени, причём эти изменения повторяются через равные промежутки времени T , называемые периодом.
- Переменный ток – это ток, изменяющийся во времени.
- Синусоидальный ток – ток изменяющийся по закону синуса.

Цель лекции:

- Изучить способ получения переменного тока, понять устройство генератора переменного тока и принцип его работы. Изучить действующее и среднее значение синусоидального тока. Уметь представлять синусоидальные величины в виде векторов. Освоить символический метод расчета, а также законы Ома и Кирхгофа для цепей переменного тока и уметь применять их в расчетах.

После изучения вы сможете

- Представлять синусоидальные величины в виде векторов. Применять в расчетах символический метод расчета, а также законы Ома и Кирхгофа для цепей переменного тока.

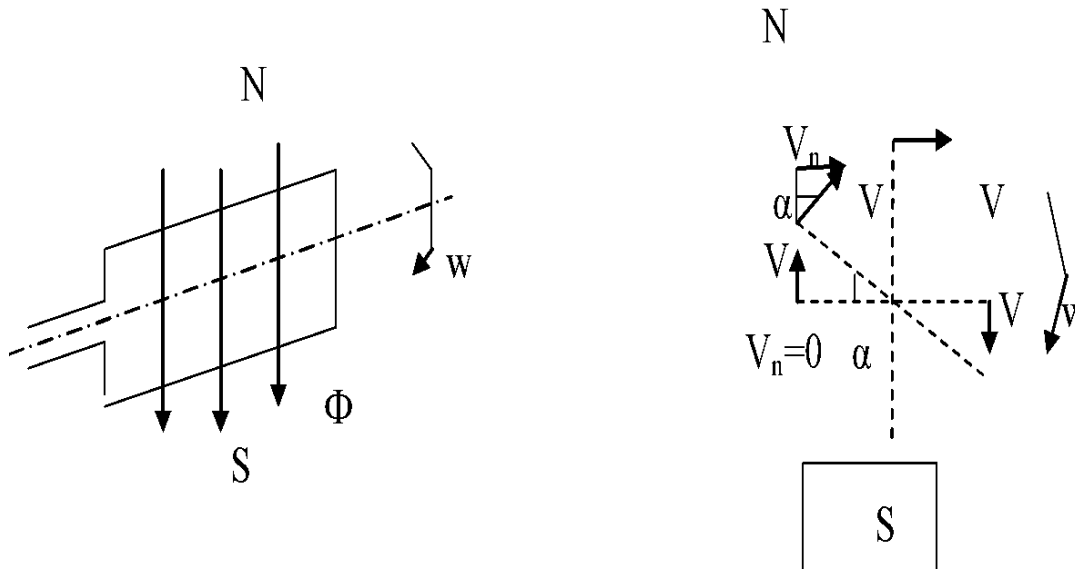
Основное преимущество синусоидального тока

- Основное преимущество такого закона изменения ЭДС и напряжения, заключается в том, что в процессе передачи электроэнергии на большие расстояния и при многократной трансформации (изменении) напряжения. Его временная зависимость остается постоянной, т.е. синусоидальной. Как увидим дальше, передавать электроэнергию экономически выгодно высоким напряжением, а распределять из соображений безопасности низким. Поэтому и приходится его трансформировать.

. Получение переменного синусоидального тока

- Получение переменного тока основано на явлении электромагнитной индукции. Рассмотрим вращение прямоугольного витка с угловой скоростью и помещенного в однородное магнитное поле с потоком Φ .

Принцип получения



Проводник движется с постоянной линейной скоростью V

Получение синусоидальной ЭДС

Когда он пересекает линии магнитного поля тока, в нем индуцируется эдс:

$$e_{\text{пр}} = Bl V_n,$$

где B – магнитная индукция;

l – активная длина проводника;

V_n – составляющая линейной скорости, нормальная к магнитному

поток.

Синусоидальная ЭДС

При перемещении (повороте) рамки на угол $\alpha = \omega t$, $V_n = V \sin \omega t$.

Тогда $e_{\text{пр}} = Blv \sin \omega t$, обозначим $Blv = E_m$ – величина постоянная и запишем:

$$e_{\text{пр}} = E_m \sin \omega t$$

Начальная фаза ЭДС

Если в начальный момент рамка находилась под углом ψ к полю, то через время t она окажется к нему под углом $(\omega t + \psi)$ и наводимая эдс будет равна:

$$e_{np} = E_m \sin(\omega t + \psi)$$

E_m – максимальное значение эдс;

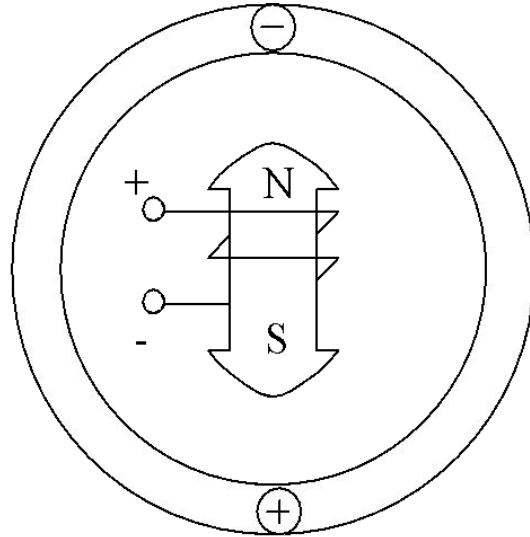
$(\omega t + \psi)$ – фаза эдс;

ψ – начальная фаза эдс.

. Генератор переменного тока

- Переменный ток создают синхронные генераторы. Простейший синхронный генератор состоит из неподвижной части – статора, и вращающейся – ротора.
- Статор имеет форму полого цилиндра, в пазах которого уложены изолированные проводники, образующие обмотку статора.

Устройство генератора синусоидального тока



Ротор в профильном случае представляет собой электромагнит, возбуждаемый постоянным током.

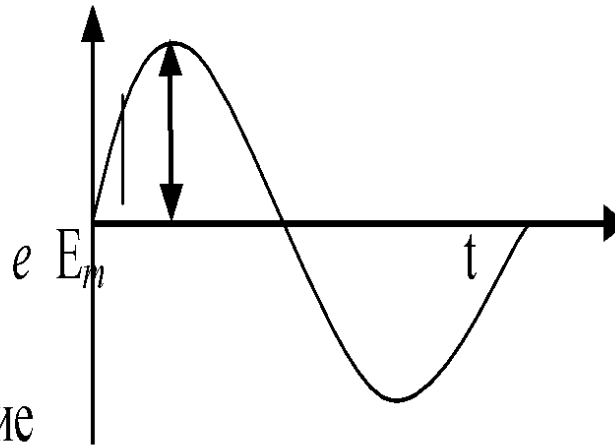
Ток возбуждения в обмотку ротора подается через медные кольца, укрепленные на валу ротора. По кольцам скользят неподвижные щетки, соединенные проводами с возбудителем – небольшим относительно генератора постоянным то

Магнитный поток

- При вращении ротора создается магнитный поток, который пересекает проводники статора и индуцирует в них переменную эдс: $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$.

Параметры синусоиды

Рассмотрим синусоиду E



E_m – максимальное значение

e – мгновенное значение

Период

- Время одного полного оборота ротора называется периодом T [сек].
- Величина, обратная периоду, называется частотой $f = 1/T$ [1/сек] = [Гц] в системе СИ.
- При полном обороте рамки $\alpha = 2\pi$ и $\alpha = \omega T$, т.к. время $t = T$.

Параметры синусоиды

-период

f - частота

$$\alpha = 2\pi$$

$$\omega t = 2\pi$$

$$2\pi = \omega t$$

$$\omega = 2\pi/T$$

$$\omega = 2\pi f$$

ω -угл. частота

$$f = 50 \text{ Гц}$$

$$\omega = 314 \text{ рад/с}$$

n об/мин

$$f = n/60$$

Действующее значение синусоидального тока

- Как постоянный, так и синусоидальный токи используются для совершения какой-либо работы, в процессе которой эл. энергия преобразуется в другие виды энергий (тепловую, механическую и т.д.).
- Для количественной оценки синусоидального тока пользуются действующим значением тока

Определение:

- Действующим значением синусоидального тока называется такое значение постоянного тока, который за период в одном и том же сопротивлении выделяет то же количество теплоты, что и рассматриваемый переменный ток.

Действующее значение

При синусоидальном токе $i = I_m \sin \omega t$ в резисторе R выделится теплота за период T .

$$\tilde{Q} = \int_0^T i^2 R dt,$$

при постоянном токе за это время

$$\bar{Q} = RI^2T \text{ - по закону Джоуля – Ленца}$$

$$\tilde{Q} = \bar{Q} \text{ (приравняем),}$$

$$RI^2T = \int_0^T i^2 R dt$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 d\Gamma} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \text{ отсюда}$$

Решаем интеграл

$$\int_0^T i^2 dt = I_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt = I_m^2 \int_0^T \frac{dt}{2} - I_m^2 \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} dt,$$

т.к. $\int_0^T \cos 2\omega t dt = 0$, то $\int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2 T}{2}$, подставим

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{I_m^2 T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

Действующее значение

- Действующее значение синусоидальной величины меньше максимального в раз.
- Например, если $U_{max}=141\text{В}$, то вольтметр покажет $U=100\text{В}$.
Действующее значение измеряют приборы электромагнитной, электродинамической систем.

Выводы

Действующее значение синусоидальной величины меньше максимального в $\sqrt{2}$ раз.

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}};$$

Среднее значение синусоидального тока

- Под средним значением понимают среднеарифметическое значение синусоиды за пол периода, т.к. за период оно будет равно нулю (положительные и отрицательные полуволны совпадают по форме).

Определение:

Среднее значение синусоидального тока это такое значение постоянного тока, при котором за полпериода переносится такой же Эл.

Заряд, что и при синусоидальном токе. $I_{cp} = \frac{2I_m}{\pi}$

Среднее значение

$$I_{cp} \cdot \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i dt, \text{ где } I_m - \text{среднее значение тока.}$$

$$\int_0^{T/2} i dt = I_m \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = -I_m \cdot \frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = -\frac{TI_m}{2\pi} \cos \left[\frac{2\pi T}{T2} - \right] - \cos 0 = \frac{2TI_m}{2\pi} = \frac{I_m T}{\pi},$$

тогда $I_{cp} = \frac{2I_m}{\pi} = 0,637 I_m$. Аналогично $E_{cp} = \frac{2E_m}{\pi}$, $U_{cp} = \frac{2U_m}{\pi}$. Коэффициент

амплитуды $k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}$. Среднее значение меньше действующего. Это

показывает коэффициент формы $k_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$. Для

несинусоидальных токов k_a и k_ϕ будут другими.

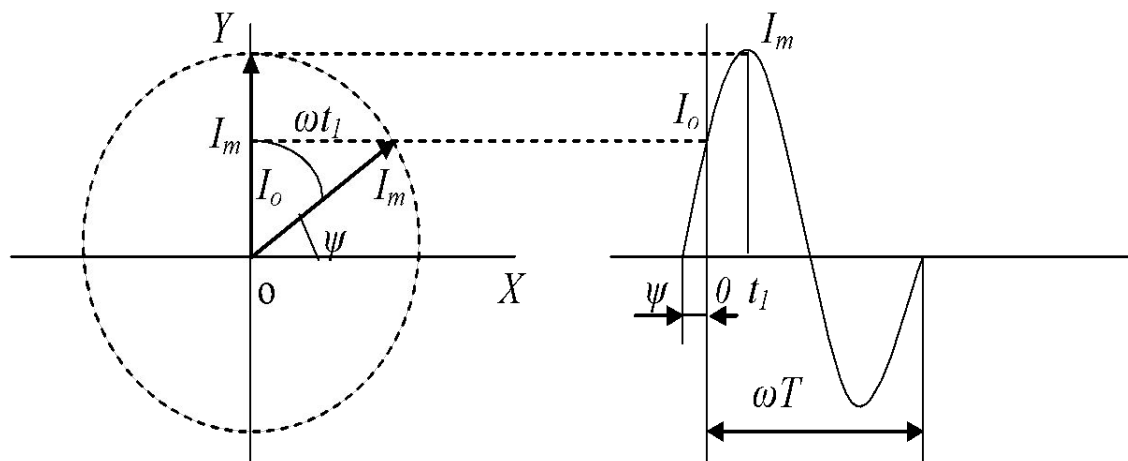
Среднее значение используется для выпрямительных установок.

Представление синусоидальных величин в виде векторов

- При расчете электрических цепей необходимо складывать или вычитать синусоидальные величины.
Графическое сложение двух (или более) таких величин является довольно трудоемкой операцией, а хорошая точность может быть достигнута при сложении очень большого числа мгновенных значений

Связь между вращающимся вектором и синусоидой

Рассмотрим синусоидальную величину и соответствующий ей вращающийся вектор.



Начальная фаза

При $t = 0$ мсн. значение тока I_0 и является проекцией вектора на ось OY (вертикальная ось), ψ = начальной фазе синусоиды, величина вектора равна I_m .

Мгновенные значения синусоиды

При $t = t_1$ $i = I_m$ вектор повернулся на угол ωt_1 . Т.о., проекция на ось ОУ вектора, вращающегося с постоянной скоростью ω и имеющего длину, равную амплитуде тока, изменяются по синусоидальному закону, т.е. представляют собой мгновенные значения синусоиды

Связь между синусоидой и вектором

- Между синусоидой и вектором существует строго однозначная связь и любую синусоидально изменяющуюся величину можно изобразить вращающимся вектором. Начальное положение вращающегося вектора определяется углом, равным начальной фазе синусоиды.

Направление вращения вектора

- Положительное направление вращения вектора принимается против часовой стрелки. Т.к. напряжения и токи имеют одинаковую частоту, то изображающие их вектора вращаются с одинаковой скоростью. Их взаимное расположение в плоскости остается постоянным

Изображение векторов

- Поэтому в практике векторы не вращают, а строят, соблюдая между ними углы (углы сдвига фаз).
(Комплексную плоскость также не рисуют.)

Векторная диаграмма

- Совокупность векторов токов и напряжений, построенных в масштабе соблюдения фаз между ними называются векторной диаграммой

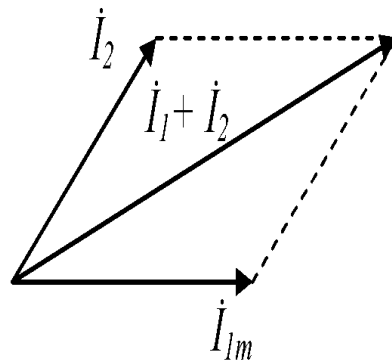
Векторная диаграмма

Принято на векторной диаграмме откладывать не максимальные, а

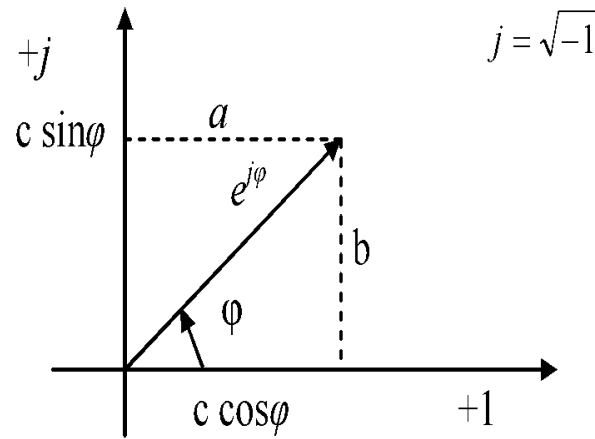
действующие значения синусоиды. $\overset{\boxtimes}{I} = \frac{\overset{\boxtimes}{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = I e^{j\varphi}$

Пример сложения векторов

Пример:



. Комплексная плоскость



$$a+jb$$

$$ce^{j\varphi} = c \cos \varphi + jc \sin \varphi$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = b/a$$

$$\varphi = +\operatorname{arctg}(b/a)$$

$$a = c \cos \varphi$$

$$b = c \sin \varphi$$

Комплексное число

Комплексное число можно изображать на комплексной плоскости либо координатами a и b ($a+jb$), либо вектором $e^{j\alpha} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ (формула Эйлера).

Математические операции над синусоидальными величинами

- Математические операции над синусоидальными величинами можно проводить в комплексной (векторной) форме. Докажем соответствие синусоидальной величины и её изображения на комплексной плоскости

Алгебраическая форма

Примем $c = I_m$, тогда: $I_m e^{j\varphi} = I_m \cos\varphi + j I_m \sin\varphi$.

Величина вектора в I_m раз больше. Положим, что угол изменяется прямо пропорционально времени, т.е. $\varphi = \omega t + \psi$ тогда:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Действительная и мнимая части

$I_m \cos(\omega t + \psi)$ - действительная часть $\operatorname{Re} I_m e^{j(\omega t + \psi)}$;

$I_m \sin(\omega t + \psi)$ мнимая часть $\operatorname{Im} I_m e^{j(\omega t + \psi)}$

Т.о. синусоидально изменяющийся ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ может быть представлен как $\operatorname{Im} I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ или как проекция вращающегося вектора на ось $+j$.

Изображение векторов

Для единообразия принято изображать векторы синусоидально изменяющихся величин для момента времени $\omega t = 0$ ($\varphi = \psi$), тогда $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$
 $= I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m$ – комплексная величина, модуль ее равен I_m , а угол вектора к +1 оси равен начальной фазе ψ . \dot{I}_m – комплексная амплитуда тока i .

$$i = 8 \sin(\omega t + 20^\circ) \text{ A} \rightarrow \dot{I}_m = 8 e^{j20} = 7,52 + 2,74 j.$$

$$\dot{I}_m = 25 e^{-j30} \text{ A} \rightarrow i = 25 \sin(\omega t - 30^\circ)$$

Сложение и вычитание

- Сложение и вычитание комплексных чисел удобнее проводить в алгебраической форме:
- $(a_1+jb_1)+(a_2+jb_2)-(a_3+jb_3) = (a_1+a_2-a_3) + j(b_1+b_2-b_3)$

Пример

Пример: Пусть надо сложить два тока $i = i_1 + i_2$

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1);$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2);$$

представляем в виде вектора

$$\dot{I}_{1m} = I_{1m} e^{j\psi_1}$$

$$\dot{I}_{2m} = I_{2m} e^{j\psi_2}$$

геометрически сложим

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$$

$$I_{1m} \cos\psi_1 + j I_{1m} \sin\psi_1$$

$$I_{2m} \cos\psi_2 + j I_{2m} \sin\psi_2$$

$$+ I_{2m} \cos\psi_2 + j I_{2m} \sin\psi_2$$

$$X + j Y$$

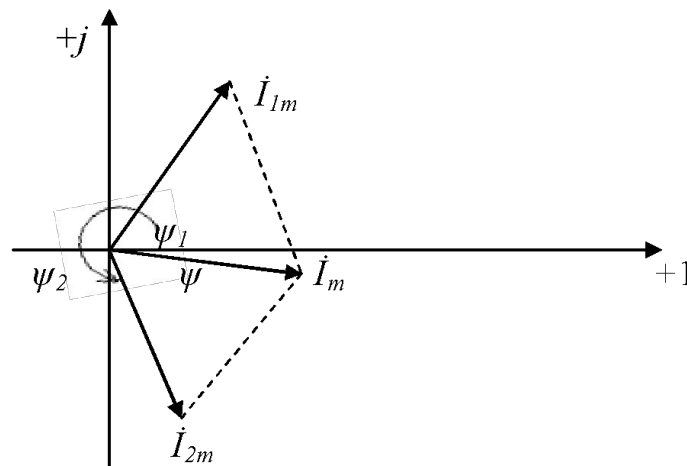
$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$I_{1m} \cos\psi_1 + j I_{1m} \sin\psi_1 + I_{2m} \cos\psi_2 + j I_{2m} \sin\psi_2 = X + j Y$$

В векторной форме

$$\dot{I}_m = \sqrt{x^2 + y^2} e^{j \arctg(\frac{y}{x})}$$

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$$



Деление и умножение

Деление комплексных чисел удобнее проводить в показательной форме:

$$c_3 e^{j\varphi_3} = \frac{c_1 e^{j\varphi_1}}{c_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad c_3 = \frac{c_1}{c_2}; \quad \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$$

Умножение комплексных чисел – в показательной форме:

$$c_4 e^{j\varphi_4} = c_1 e^{j\varphi_1} \cdot c_2 e^{j\varphi_2} = c_1 \cdot c_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Модуль функции $e^{j\alpha} = 1$

$$|e^{j\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

Комплекс действяющего значения $\tilde{F} = \frac{\hat{F}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = I e^{j\varphi}$.

Умножение на j и $-j$

Умножение вектора на j и $-j$ даёт вектор, по модулю равный исходному, но поворачивает его на 90° в сторону опережения/отставания.

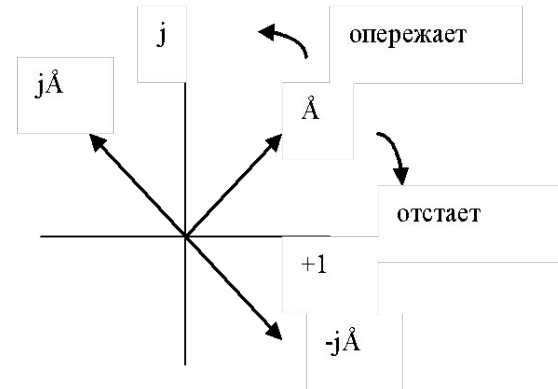
$$\mathring{A} = A * e^{j\varphi a}$$

$$j = 0 + 1j = 1e^{j90^\circ} = e^{j90^\circ}$$

$$-j = 0 - 1j = 1e^{-j90^\circ} = e^{-j90^\circ}$$

$$\mathring{A}j = Ae^{j\varphi a} e^{j90^\circ} = Ae^{j(\varphi a + 90^\circ)}$$

$$-\mathring{A}j = Ae^{j\varphi a} e^{-j90^\circ} = Ae^{j(\varphi a - 90^\circ)}$$



Законы Ома и Кирхгофа для цепи синусоидального тока

- Т.к. синусоидальные напряжения и ток характеризуется мгновенными, максимальными и действующими значениями таким образом для каждого из них существует своя формулировка закона.
- Для максимальных и действующих значений законы Ома и Кирхгофа справедливы в векторной форме:

Законы Кирхгофа

I закон Кирхгофа: $\sum_{k=1}^n I_k = 0$

II закон Кирхгофа: $\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n E_k$; $\dot{U}_k = \dot{I}_k * Z_k$

Комплексное сопротивление

Комплексное сопротивление [Ом]:

$Z = z * e^{j\varphi} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$ (точка не ставится, т.к. Z не изменяется по sin закону)

$\dot{I}_m * Z = \dot{E}_m$, комплексные амплитуды поделим на $\sqrt{2}$:

$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z}$ - закон Ома для цепи синусоидального тока.

Активное и реактивное сопротивление

$Z = R + jX$ R – активное сопротивление, $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ - реактивное.

Закон Ома для участка цепи: $\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z}$ - ток, протекающий через сопротивление Z (полное сопротивление участка цепи), прямо пропорционален напряжению на участке цепи.

Комплексная проводимость [См]:

$$Y = \frac{1}{Z} = g - jb = ye^{-j\varphi} \quad [Ом^{-1}] = [Сум]$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jx} = \frac{R - jx}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb$$

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

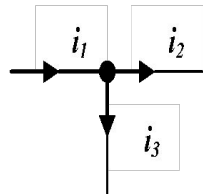
Закон Ома: $\dot{I} = \dot{U}Y$ или $\dot{I} = \dot{U}g - j\dot{U}b = \dot{I}_a + \dot{I}_r$
акт. реакт.

Законы Кирхгофа для мгновенных значений

I закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных значений токов

в узле равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$



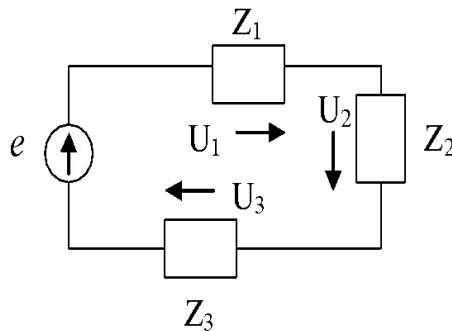
$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

II закон Кирхгофа

II закон Кирхгофа: алгебраическая сумма э.д.с. в замкнутом контуре равна алгебраической сумме мгновенных значений падений напряжения.

$$\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n e_k$$

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$



$$e = u_1 + u_2 + u_3$$

Если $e=0$, то сумма

Информационные источники

- 1. Касаткин А.С., Немцов М.В.. Электротехника. М.: Высш. шк., 1999.
- 2. Иванов И.И., Лукин А.Ф., Соловьев Г.И. Электротехника: Основные положения, примеры и задачи. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература» - СПб.: Издательство «Лань», 1999.
- 3. Атабеков Г.И. Основы теории цепей: Учебник/ Г.И. Атабеков. – 2-е изд., испр.- СПб.: Лань, 2006.- 424с.
- 4. Теоретические основы электротехники: Учеб. Для вузов/ А.И. Горбунов, И.Д. Кабанов, А.В. Кравцов и др. – М.: МГАУ, 1988.
- 5. Электротехника и электроника: учеб.д ля вузов/ М.В. Немцов, М.Л. Немцова. – 2-е изд., стер.- М.: Академия,2009. – 427с.
- 6.. Курс электротехники: учеб. Для вузов/ А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. Шк, 2007.