



РГСУ

Математика

*Математический анализ.
Дифференцирование функции
одной переменной*

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$.

Приращение аргумента в точке x : Δx

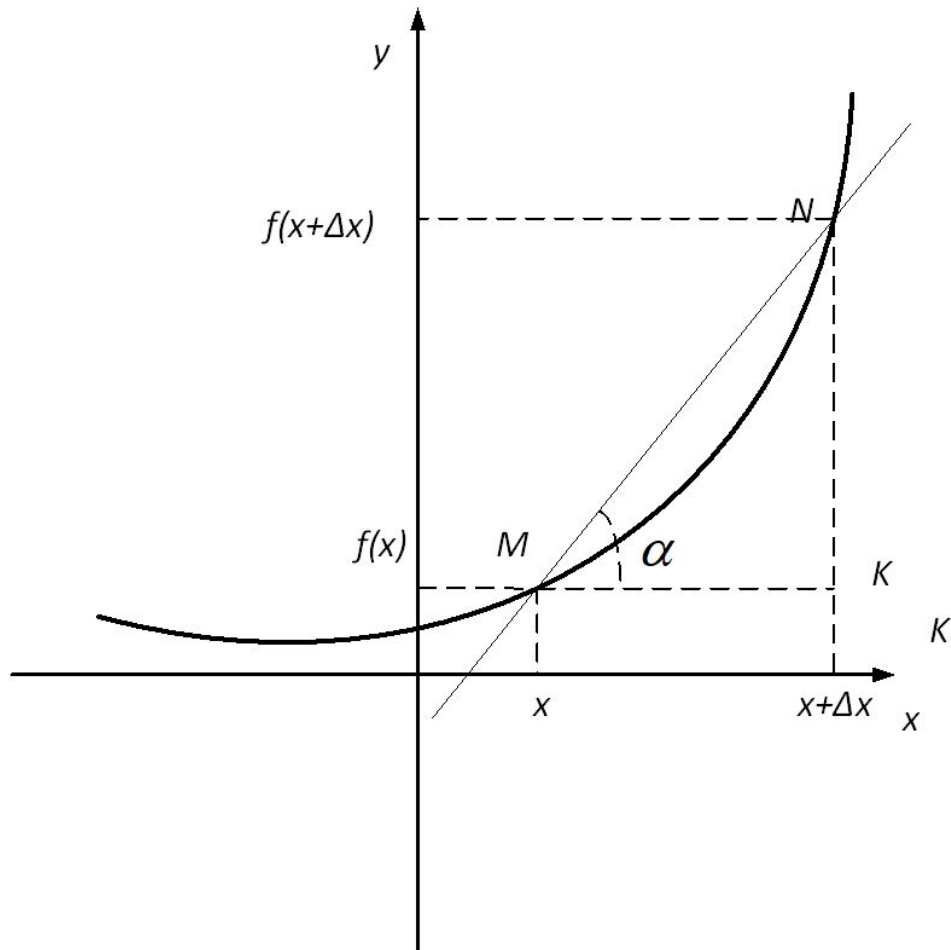
Приращение функции в точке x : $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента в точке x при стремлении Δx к нулю, если этот предел существует, и обозначается

$$y'(x), \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ



Рассмотрим график функции $y = f(x)$

Проведем секущую MN .

$$\triangle MNK : NK = \Delta y, MK = \Delta x$$

α – угол наклона секущей,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{NK}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

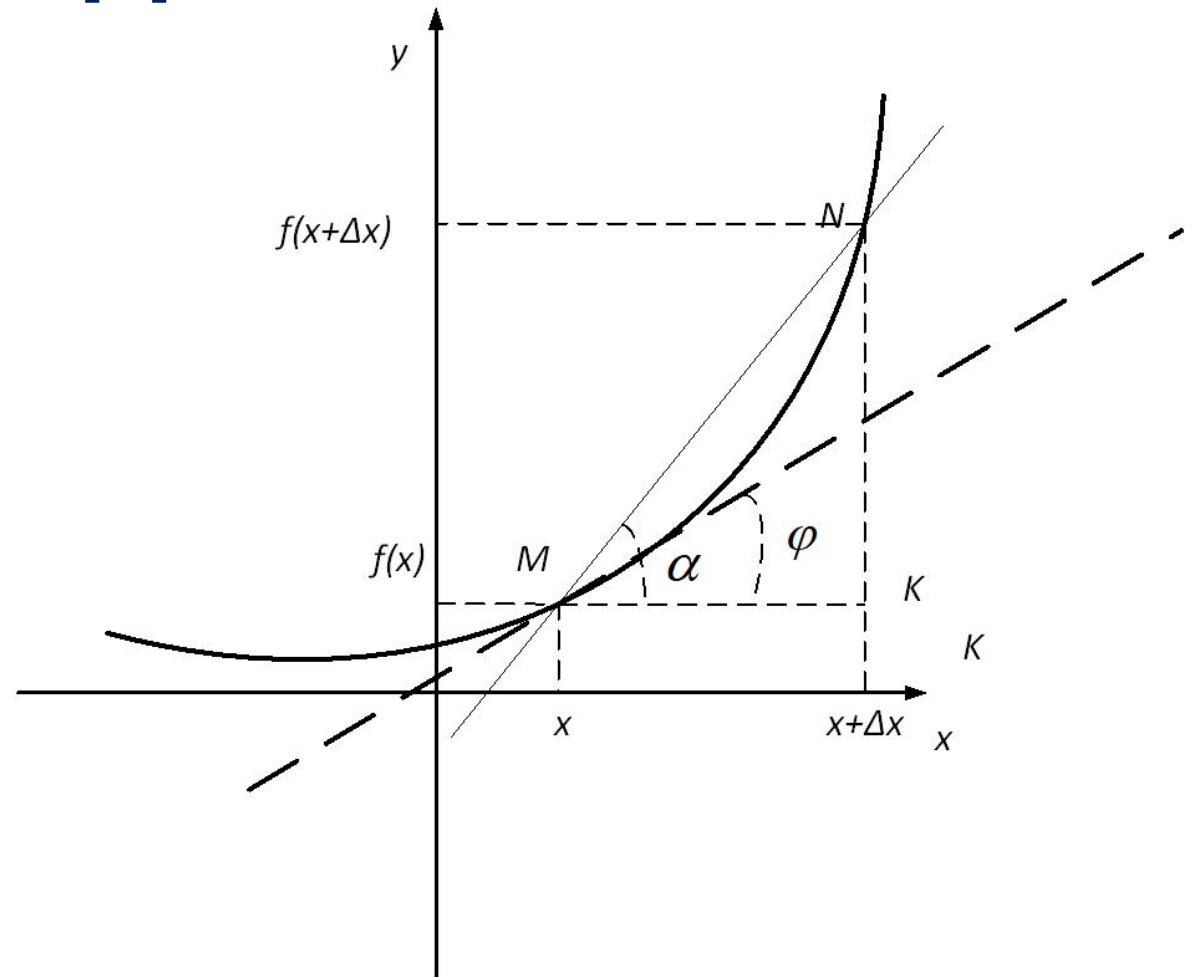
Пусть $\Delta x \rightarrow 0$, тогда $N \rightarrow M$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Если существует предельное положение секущей MN при стремлении точки N к точке M вдоль графика функции $y = f(x)$, то эта прямая называется **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M .

При $N \rightarrow M$ секущая \rightarrow касательная,
 $\alpha \rightarrow \varphi$ - угол наклона касательной:

тогда $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \varphi$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi = f'(x)$



Уравнение касательной

Производная функции равна тангенсу угла наклона касательной в точке x , или **угловому коэффициенту касательной**.

Уравнение касательной в точке x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Определение. Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

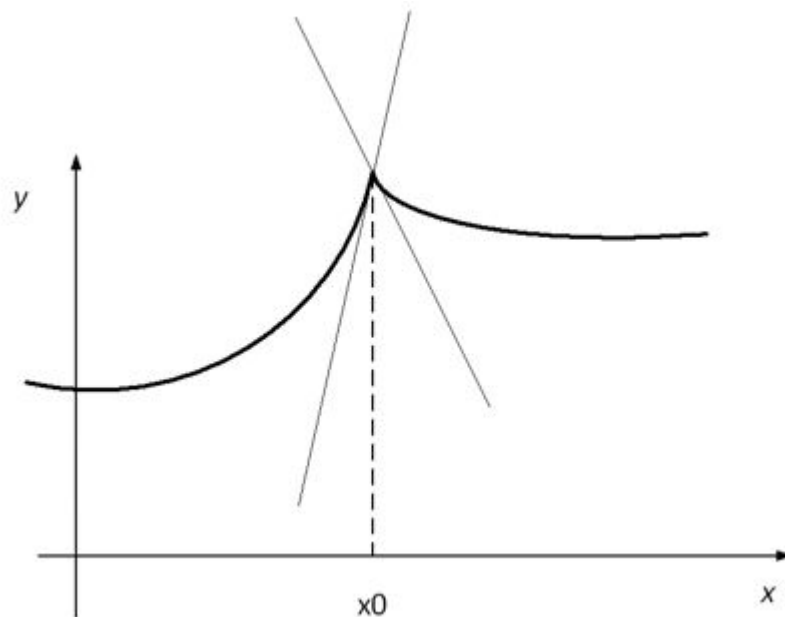
Физический смысл производной. Производная – скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x .

Производная и непрерывность функции

Теорема. Если функция имеет производную в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Производная не существует в точках разрыва.

Функция может быть непрерывной в точке, но не иметь производной в точке.



Односторонние производные

Определение. Правой [левой] производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется

$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \left[f'(x-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right]$$

Теорема. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует правая и левая производная и они равны между собой, т.е.

$$f'(x) = f'(x+0) = f'(x-0)$$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в точке x , то этой точке справедливы равенства:

1. $(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = const;$

2. $(u + v)' = u' + v';$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$ если $v \neq 0, \quad c = const$

5. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2},$ если $v \neq 0;$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

а) Рассмотрим $f(x) = x^2$.

$$\Delta f = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Тогда $(x^2)' = 2x$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

б) Рассмотрим $f(x) = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Тогда $(\sin x)' = \cos x$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

в) Аналогично получим $(\cos x)' = -\sin x$.

г) Тогда, так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то применяя правила дифференцирования, получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Аналогично получим $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $c' = 0$ ($c = const$);

2. Степенные функции: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$;

$$x' = 1 \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

3. Показательные функции: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

$$(e^x)' = e^x$$

4. Логарифмические функции: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$;

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

5. Тригонометрические функции:

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

6. Обратные тригонометрические функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

6. Вычисление сложной функции (Правило цепочки).

Если функция $u = u(x)$ имеет в некоторой точке x

производную

$$u'(x)$$

$$y = f(u)$$

, а функция

$$f'(u)$$

имеет при соответствующем

$$y = f(u(x))$$

значении u

производную, тогда **сложная функция**

имеет в указанной точке x производную, вычисляемую по

формуле:

$$y'(x) = (f(u(x)))'_x = f'(u) \cdot u'(x)$$

Примеры вычисления производных

$$1. \left(u^\alpha(x)\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x) \qquad \left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R;$$

Примеры.

$$\left((3x+11)^7\right)' = 7 \cdot (3x+11)^6 \cdot (3x+11)' = 7 \cdot (3x+11)^6 \cdot 3 = 21(3x+11)^6$$

$$\left(\sqrt{4-3x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-3x}} \cdot (4-3x)' = \frac{1}{2\sqrt{4-3x}} \cdot (-3) = -\frac{3}{2\sqrt{4-3x}}$$

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Примеры вычисления производных

$$2. \quad (\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x) \qquad (\sin x)' = \cos x;$$

Примеры:

$$(\sin(4x - 9))' = \cos(4x - 9) \cdot 4 = 4 \cos(4x - 9)$$

$$(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

Примеры вычисления производных

$$3. (\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Примеры:

$$(\ln(5x - 6))' = \frac{1}{5x - 6} \cdot 5 = \frac{5}{5x - 6}$$

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctgx}$$

Примеры вычисления производных

4. $(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$

Примеры:

$$(\operatorname{arctg} (4x-7))' = \frac{1}{1+(4x-7)^2} \cdot 4 = \frac{4}{1+(4x-7)^2}$$

$$(\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$$

Примеры вычисления производных

5. Если $u(x)$ – сложная функция, тогда вычисление $u'(x)$ производится по правилу вычисления сложной функции.

Примеры:

$$\left(8^{\sin^2 5x}\right)' = 8^{\sin^2 5x} \cdot \ln 8 \cdot 2 \sin 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 5 \cdot 8^{\sin^2 5x} \cdot \ln 8 \cdot \sin 10x$$

Правило дифференцирования степенно-показательной функции

Пусть функция имеет **степенно-показательный** вид:

$$y(x) = a(x)^{\varphi(x)}$$

1) Прологарифмируем функцию $\ln y(x) = \varphi(x) \cdot \ln a(x)$

2) Продифференцируем:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \cdot \ln a(x) + \varphi(x) \cdot \frac{1}{a(x)} a'(x)$$

3) Откуда:

$$y' = a(x)^{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) \cdot \ln a(x) + \varphi(x) \cdot \frac{1}{a(x)} a'(x) \right)$$

Правило дифференцирования степенно-показательной функции

Пример.

$$y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$$

1) Прологарифмируем функцию $\ln y = x^2 \cdot \ln \operatorname{tg} x$

2) Продифференцируем:

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

3) Откуда:

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{x^2} \left(2x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{2x^2}{\sin 2x} \right)$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка.

Пусть функция $f'(x)$ тоже имеет свою производную.

Производная производной называется **второй производной** $f(x)$ или **производной второго порядка**:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Аналогично:

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Дифференцируемость функции

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x называется **дифференцируемой**, если ее приращение в этой точке $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где A – постоянная, а $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Теорема. Для того, чтобы функция была дифференцируемой в точке x , необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке, при этом $A = f'(x)$, т.е. приращение функции представимо в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Теорема. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

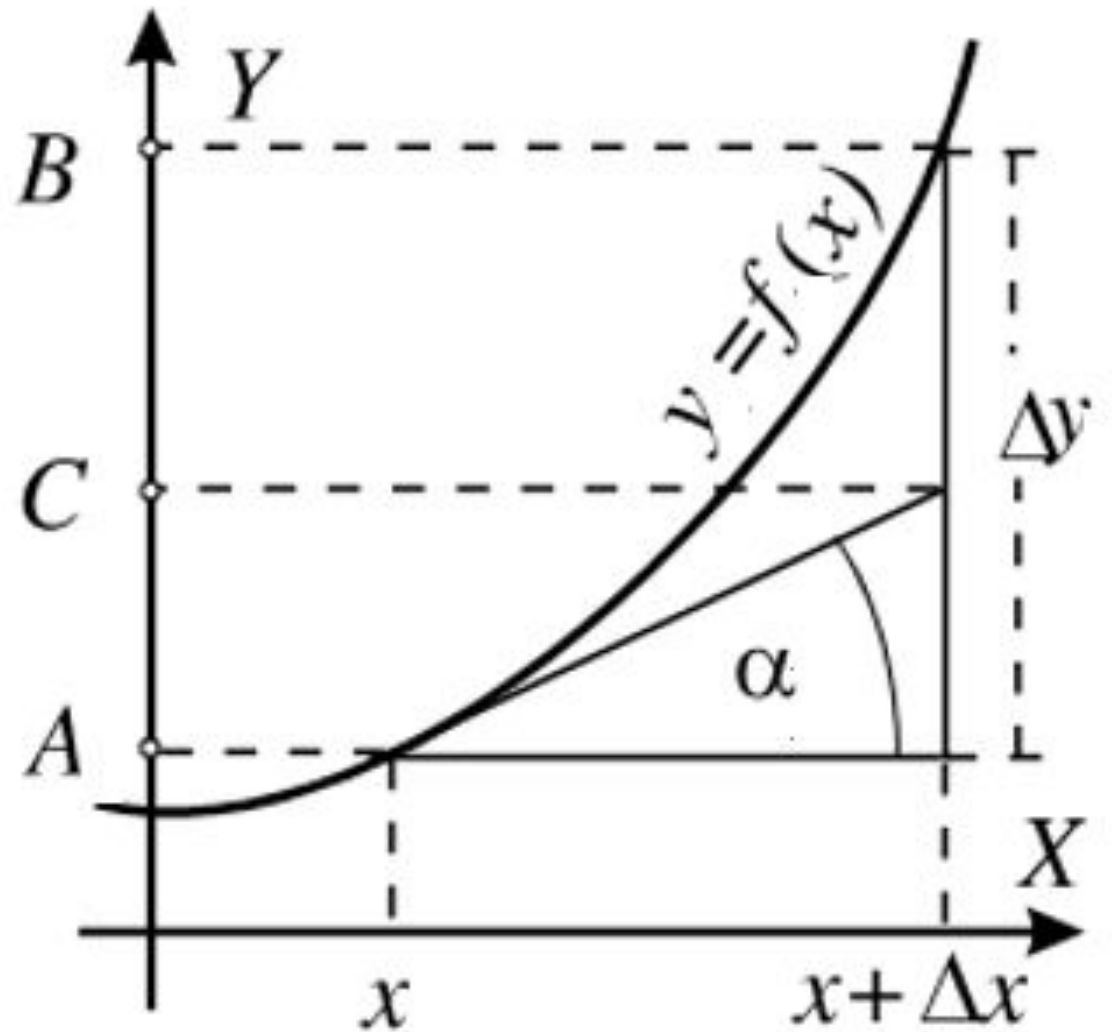
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и проведем касательную к графику в точке x .

$$\Delta y = (C - A) + (B - C)$$

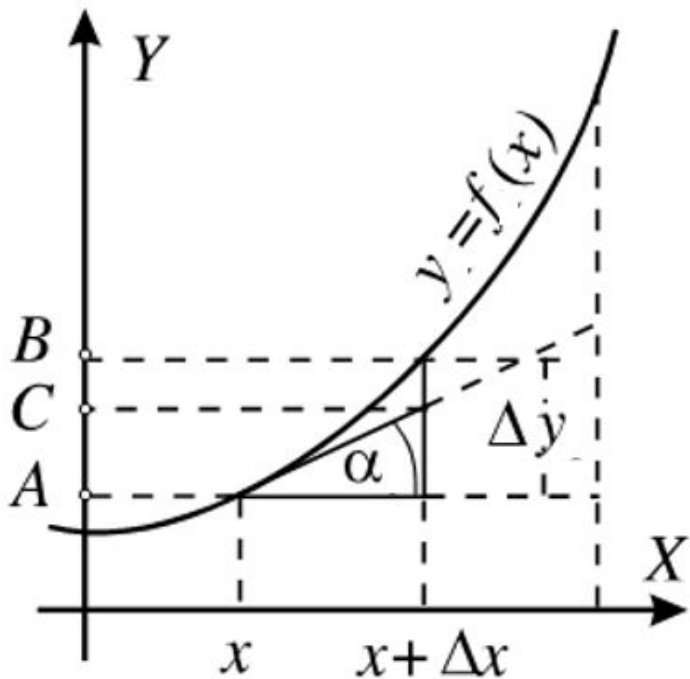
$$C - A = f'(x)\Delta x \quad B - C = o(\Delta x)$$

Тогда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta(\Delta x)$$



ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ



Определение. Главная, линейная относительно Δx часть приращения функции $f'(x)\Delta x$ называется **дифференциалом** и обозначается dy

Обозначим аналогично $dx = \Delta x$

Тогда $dy = f'(x)dx$. $\Delta y = dy + \beta(\Delta x)$

Следствие. Производная функции $f(x)$ равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента x :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Рассмотрим поведение обеих частей при $\Delta x \rightarrow 0$

Видно, что при $\Delta x \rightarrow 0$ функция $\beta(\Delta x)$ убывает быстрее, чем Δx , т.е.

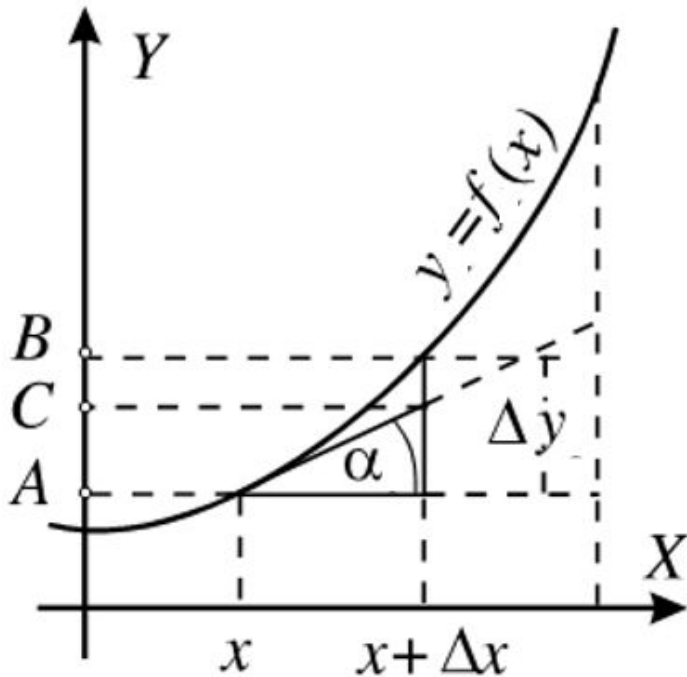
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\beta(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Тем самым,

$$\beta(\Delta x) = o(\Delta x)$$

и

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$



РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Правило Лопиталья

Теорема Лопиталья. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и имеют производные $f'(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a , кроме быть может самой точки a , и пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Тогда, если существует предел отношения производных этих функций, то существует предел отношения самих функций и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Правило Лопитала

Примеры.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

2. Правило Лопитала может применяться несколько раз.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \sin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4 \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Правило Лопитала

3. Применение правила Лопитала к неопределенности $[0 \cdot \infty]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x} \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3\sqrt[3]{x} = 0$$

4. Применение правила Лопитала к неопределенности $[1^\infty]$.

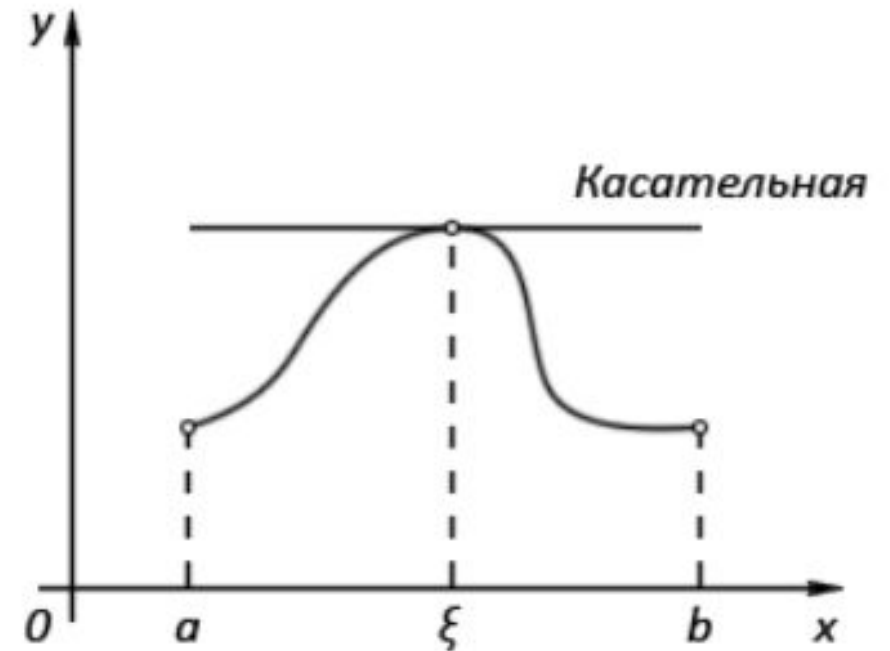
Используем основное логарифмическое тождество $a = e^{\ln a}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(e^{2x} + x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x}} = e^3$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

1. Теорема Ролля.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется хотя одна точка ξ между a и b ($a < \xi < b$) такая что $f'(\xi) = 0$.



Основные теоремы дифференциального исчисления

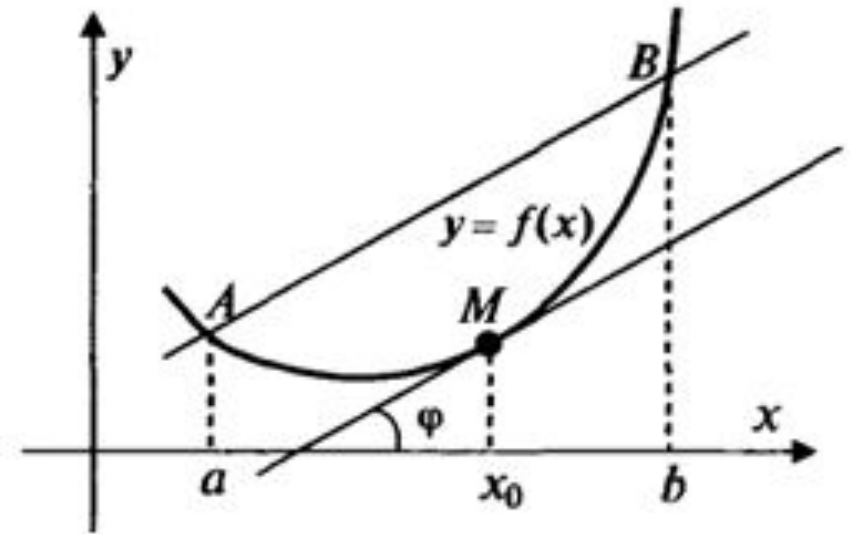
2. Теорема Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[a; b]$.

Тогда найдется хотя одна точка x_0 между a и b ($a < x_0 < b$) такая что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Это формула Лагранжа или формула конечных приращений



Основные теоремы дифференциального исчисления

3. Теорема Коши.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$. Тогда найдется хотя одна точка x_0 между a и b ($a < x_0 < b$) такая что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Это формула Коши или обобщенная формула конечных приращений