РГСУ

Математика

Математический анализ. Дифференцирование функции одной переменной

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

- Рассмотрим функцию $y = f(x)$.

Приращение аргумента в точке x: Δx

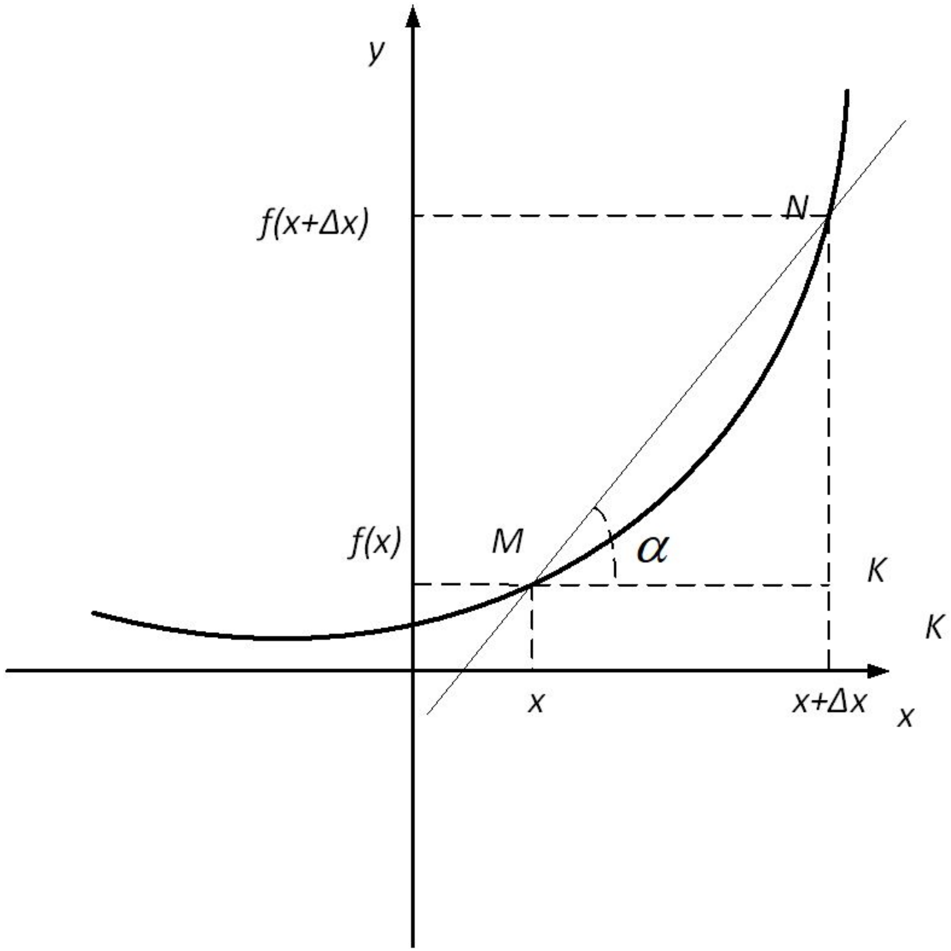
Приращение функции в точке x: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Определение. ***Производной*** функции $y = f(x)$ в точке ***x*** называется конечный предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента в точке ***x*** при стремлении Δx к нулю, если этот предел существует, и обозначается

$$y'(x), \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ



- Рассмотрим график функции $y = f(x)$

Проведем секущую MN.

$$\Delta MNK: \quad NK = \Delta y, \; MK = \Delta x$$

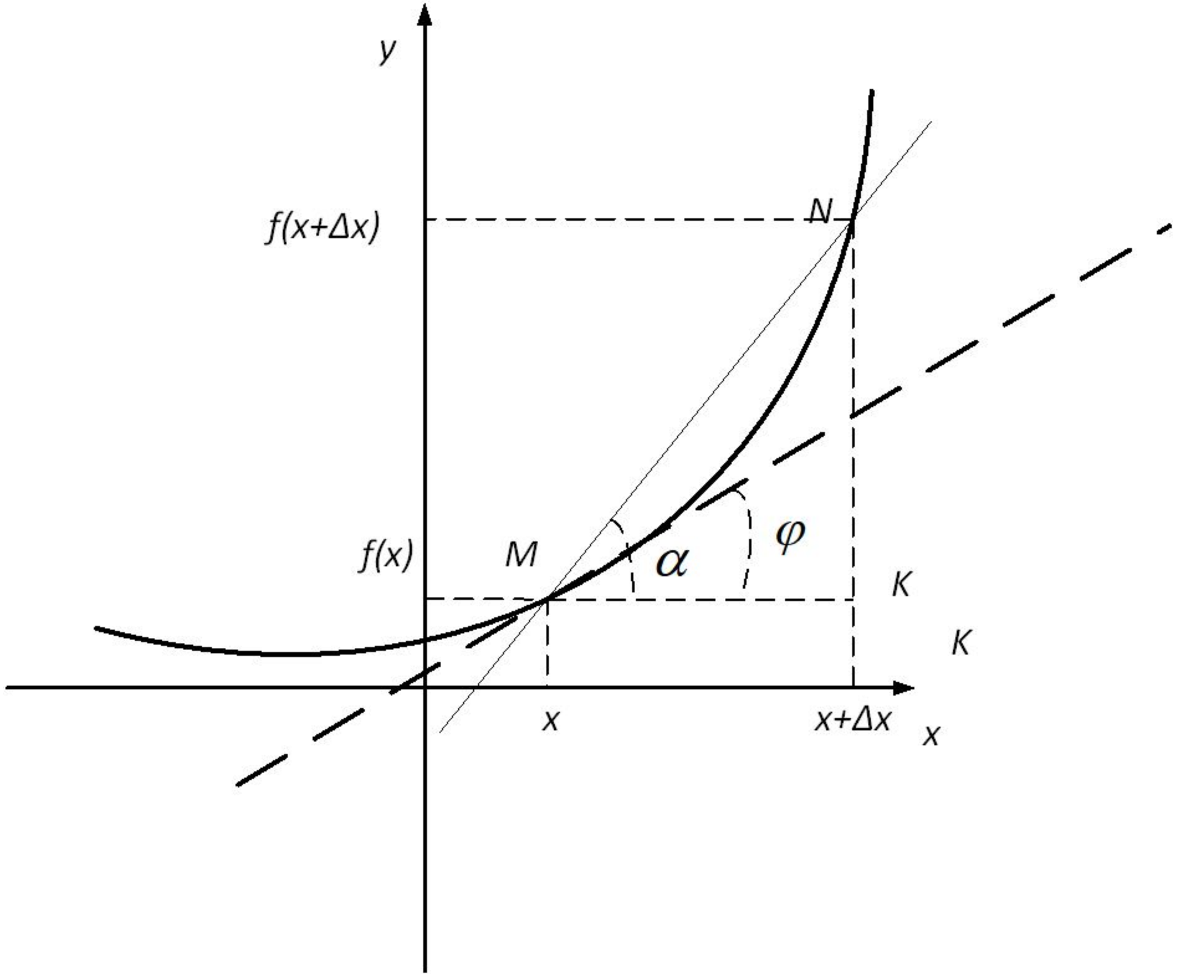
α – угол наклона секущей,

$$tg\alpha = \frac{NK}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда $N \to M$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

- Если существует предельное положение секущей *MN* при стремлении точки *N* к точке *M* вдоль графика функции $y = f(x)$, то это прямая называется **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M.



При $N \to M$ секущая $\to$ касательная,

$\alpha \to \varphi$ - угол наклона касательной:

тогда $tg\alpha \to tg\varphi$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi = f'(x)$

Уравнение касательной

- Производная функции равна тангенсу угла наклона касательной в точке *x*, или **угловому коэффициенту касательной**.

Уравнение касательной в точке x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Определение. Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

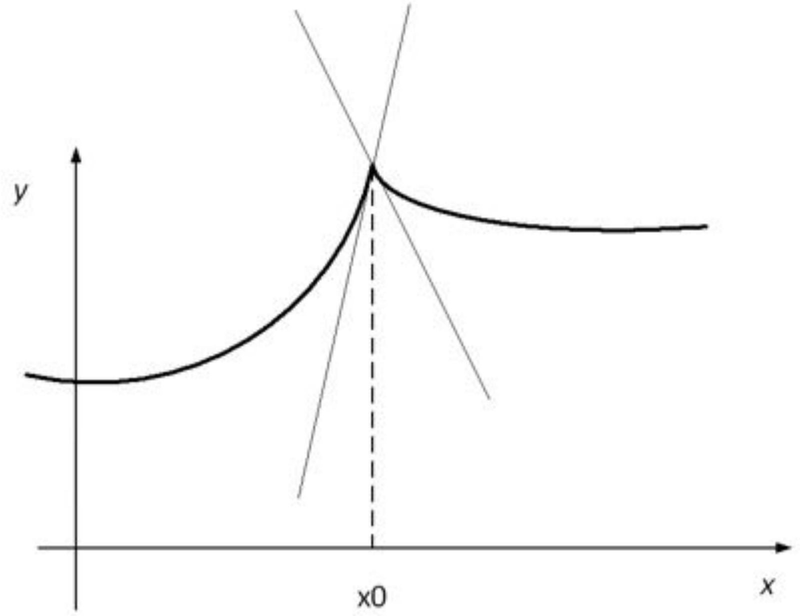
Физический смысл производной. Производная – скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x.

Производная и непрерывность функции

- Теорема. Если функция имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Производная не существует в точках разрыва.

Функция может быть непрерывной в точке, но не иметь производной в точке.



Односторонние производные

- Определение. Правой [левой] производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется

$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad \left[f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right]$$

Теорема. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует правая и левая производная и они равны между собой, т.е.

$$f'(x) = f'(x+0) = f'(x-0)$$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в точке x, то этой точке справедливы равенства:

1. $(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = const;$
2. $(u + v)' = u' + v';$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$ если $v \neq 0, \quad c = const$
5. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2},$ если $v \neq 0;$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

а) Рассмотрим $f(x) = x^2$.

$$\Delta f = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Тогда $\left(x^2\right)' = 2x$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

б) Рассмотрим $f(x) = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Тогда $(\sin x)' = \cos x$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

в)Аналогично получим $(\cos x)' = -\sin x$.

г) Тогда, так как $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то применяя правила дифференцирования, получим

$$(tgx)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Аналогично получим $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $c' = 0 \qquad (c = const);$

2. Степенные функции: $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}, \ \alpha \in R;$

$$x' = 1 \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

3. Показательные функции: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$

$$(e^x)' = e^x$$

4. Логарифмические функции: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

5. Тригонометрические функции:

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

6. Обратные тригонометрические функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

6. **Вычисление сложной функции (Правило цепочки).**

Если функция $u=u(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'(x)$, а функция $y=f(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $f'(u)$, тогда ***сложная функция*** $y=f(u(x))$ имеет в указанной точке x производную, вычисляемую по формуле:

$$y'(x)=\left(f(u(x))\right)'_x=f'(u)\cdot u'(x).$$

Примеры вычисления производных

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \ \alpha \in R;$$

1. $$\left(u^{\alpha}(x)\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$$

Примеры:

$$\left((3x+11)^{7}\right)' = 7 \cdot (3x+11)^{6} \cdot (3x+11)' = 7 \cdot (3x+11)^{6} \cdot 3 = 21(3x+11)^{6}$$

$$\left(\sqrt{4-3x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-3x}} \cdot (4-3x)' = \frac{1}{2\sqrt{4-3x}} \cdot (-3) = -\frac{3}{2\sqrt{4-3x}}$$

$$\left(\sin^{2} x\right)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Примеры вычисления производных

$$(\sin x)' = \cos x;$$

2. $$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$$

Примеры:

$$(\sin(4x-9))' = \cos(4x-9) \cdot 4 = 4\cos(4x-9)$$

$$(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

Примеры вычисления производных

3. $$(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Примеры:

$$(\ln(5x-6))' = \frac{1}{5x-6} \cdot 5 = \frac{5}{5x-6}$$

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx$$

Примеры вычисления производных

$$\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2};$$

4. $$\left(arctg u(x)\right)' = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$$

Примеры:

$$\left(arctg\,(4x-7)\right)' = \frac{1}{1+(4x-7)^2} \cdot 4 = \frac{4}{1+(4x-7)^2}$$

$$\left(arctg\, x^2\right)' = \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$$

Примеры вычисления производных

- 5. Если $u(x)$ – сложная функция, тогда вычисление $u'(x)$ производится по правилу вычисления сложной функции.

Примеры:

$$\left(8^{\sin^2 5x}\right)' = 8^{\sin^2 5x} \cdot \ln 8 \cdot 2\sin 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 == 5 \cdot 8^{\sin^2 5x} \cdot \ln 8 \cdot \sin 10x$$

Правило дифференцирования степенно-показательной функции

Пусть функция имеет **степенно-показательный** вид:

$$y(x) = a(x)^{\varphi(x)}$$

1) Прологарифмируем функцию: $\ln y(x) = \varphi(x) \cdot \ln a(x)$

2) Продифференцируем:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \cdot \ln a(x) + \varphi(x) \cdot \frac{1}{a(x)} a'(x)$$

3) Откуда:

$$y' = a(x)^{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) \cdot \ln a(x) + \varphi(x) \cdot \frac{1}{a(x)} a'(x) \right)$$

Правило дифференцирования степенно-показательной функции

Пример.

$$y = (tgx)^{x^2}$$

1) Прологарифмируем функцию $\ln y = x^2 \cdot \ln tgx$

2) Продифференцируем:

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln tgx + x^2 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

3) Откуда:

$$y' = (tgx)^{x^2} \left(2x \cdot \ln tgx + \frac{2x^2}{\sin 2x} \right)$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

- Пусть $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка.

Пусть функция $f'(x)$ тоже имеет свою производную.

Производная производной называется **второй производной** $f(x)$ или **производной второго порядка**:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Аналогично:

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Дифференцируемость функции

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x называется дифференцируемой, если ее приращение в этой точке $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где А – постоянная, а $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Теорема. Для того, чтобы функция была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке, при этом $A = f'(x)$, т.е. приращение функции представимо в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Теорема. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

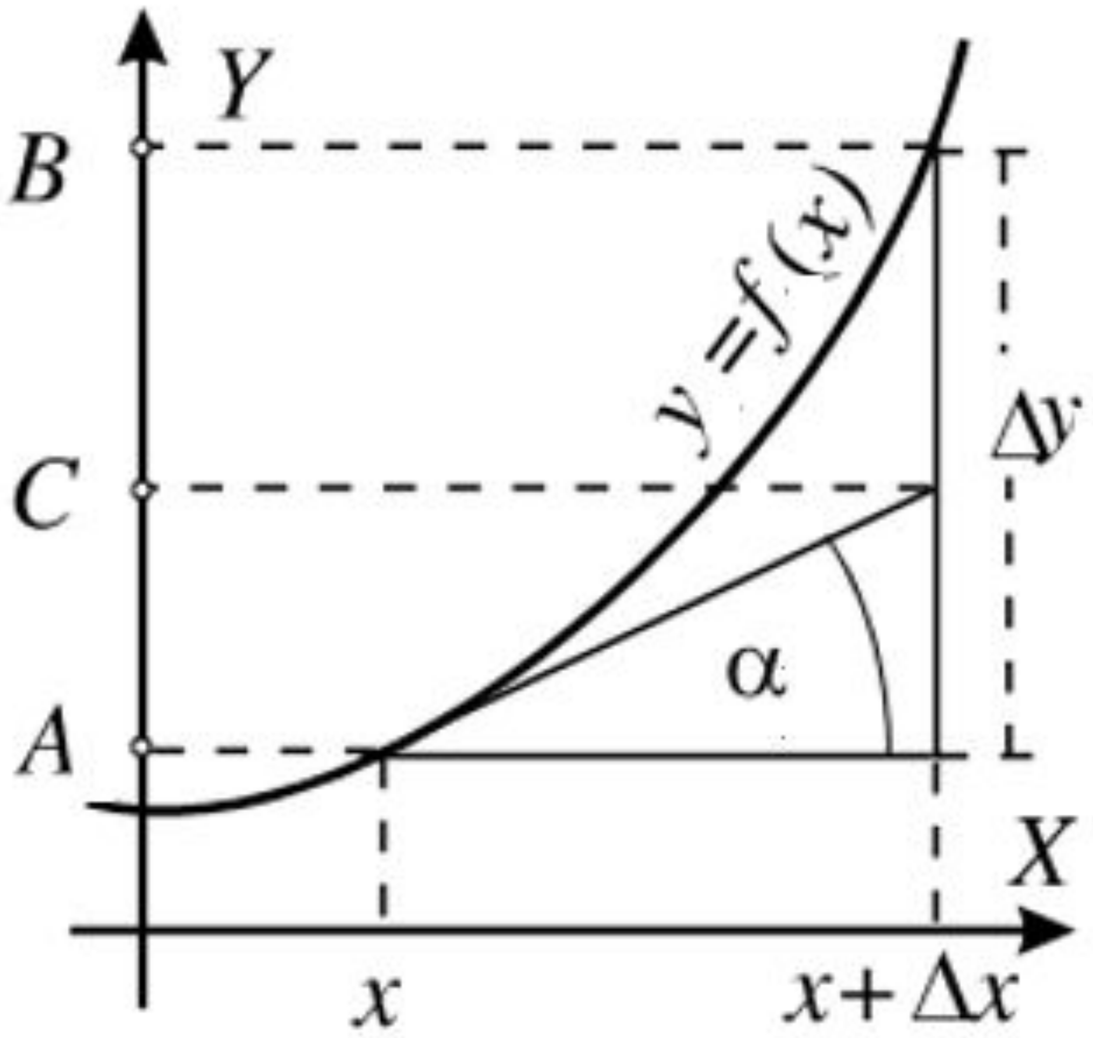
- Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и проведем касательную к графику в точке x.

$$\Delta y = (C - A) + (B - C)$$

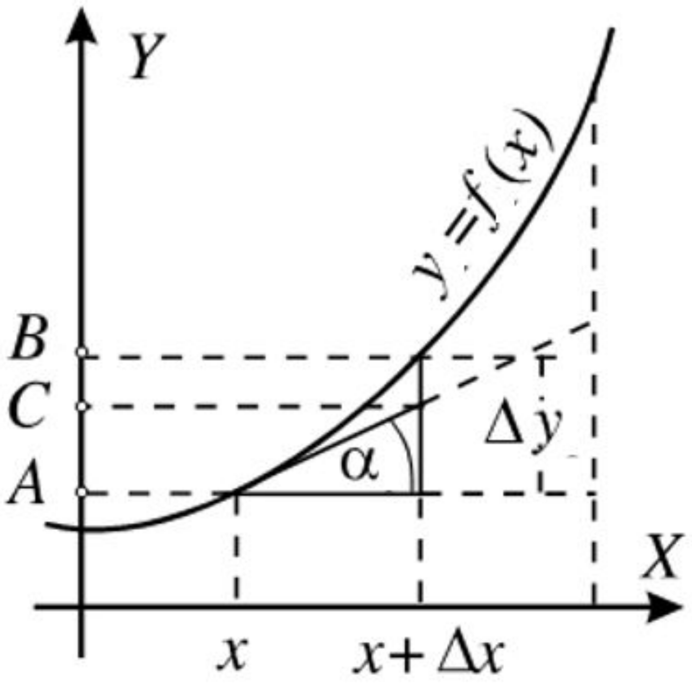
$C - A = f'(x)\Delta x$ $\quad$ $B - C = o(\Delta x)$

Тогда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta(\Delta x)$$



ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ



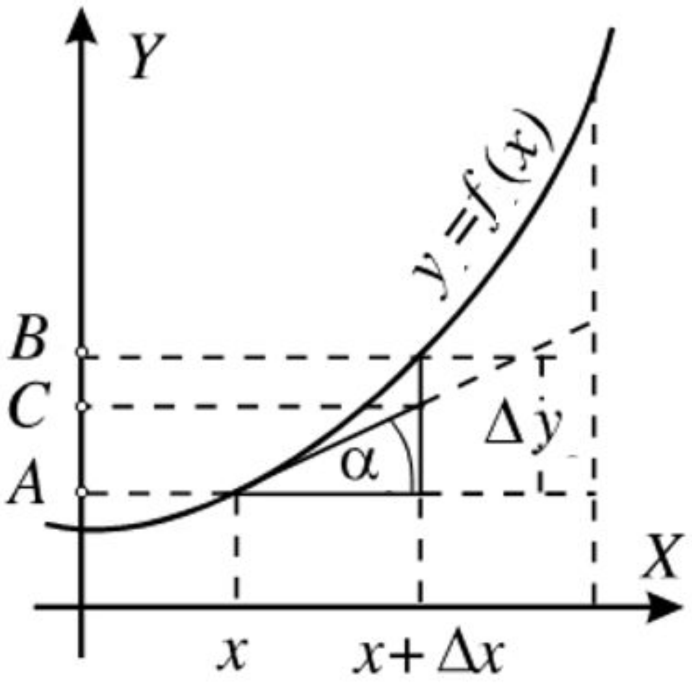
- **Определение.** Главная, линейная относительно Δx часть приращения функции $f'(x)\Delta x$ называется ***дифференциалом*** и обозначается dy

Обозначим аналогично $dx = \Delta x$

Тогда $dy = f'(x)dx$, $\Delta y = dy + \beta(\Delta x)$

Следствие. Производная функции *f*(*x*) равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента *x*: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ



Рассмотрим поведение обоих частей при $\Delta x \to 0$

Видно, что при $\Delta x \to 0$ функция $\beta(\Delta x)$

убывает быстрее, чем Δx, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Тем самым,

$$\beta(\Delta x) = o(\Delta x)$$

и

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ
Правило Лопиталя

Теорема Лопиталя. Пусть функции f(x) и g(x) определены и имеют производные f '(x) и g '(x) ≠ 0 в некоторой окрестности точки a, кроме быть может самой точки a, и пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0; \lim_{x\to a} g(x) = 0$$ или $$\lim_{x\to a} f(x) = \infty; \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Тогда, если существует предел отношения производных этих функций, то существует предел отношения самих функций и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ
Правило Лопиталя

Примеры.

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

2. Правило Лопиталя может применяться несколько раз.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{1}{2}$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ
Правило Лопиталя

3. Применение правила Лопиталя к неопределенности $[0 \cdot \infty]$.

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt[3]{x} \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} 3\sqrt[3]{x} = 0$$

4. Применение правила Лопиталя к неопределенно $[1^{\infty}]$.

Используем основное логарифмическое тождес $a = e^{\ln a}$

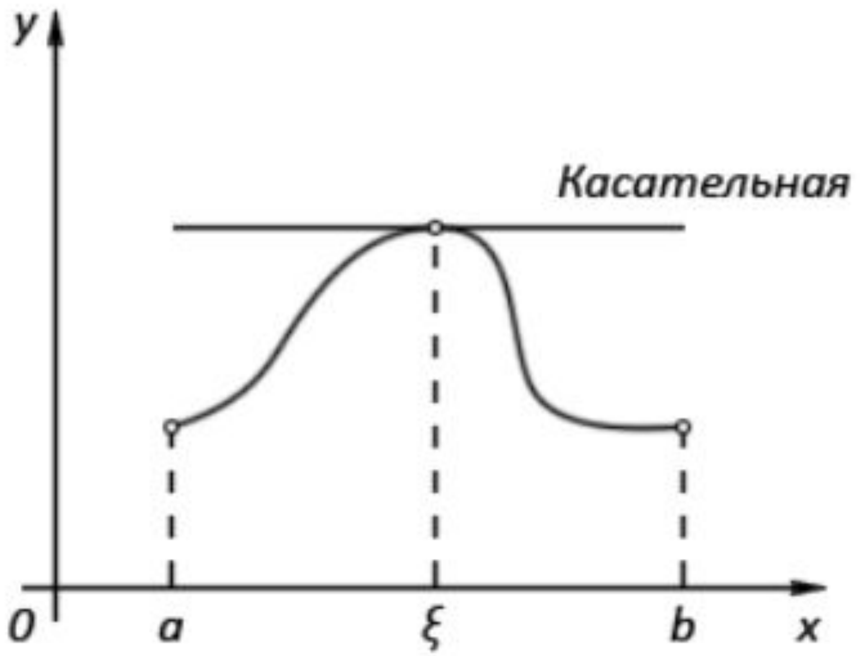
$$\lim_{x\to 0}\left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^{2x}+x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{2x}+x\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+1}{\left(e^{2x}+x\right)}} = e^{3}$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

•

1. Теорема Ролля.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется хотя одна точка ξ между a и b $(a < \xi < b)$ такая что $f'(\xi) = 0$.

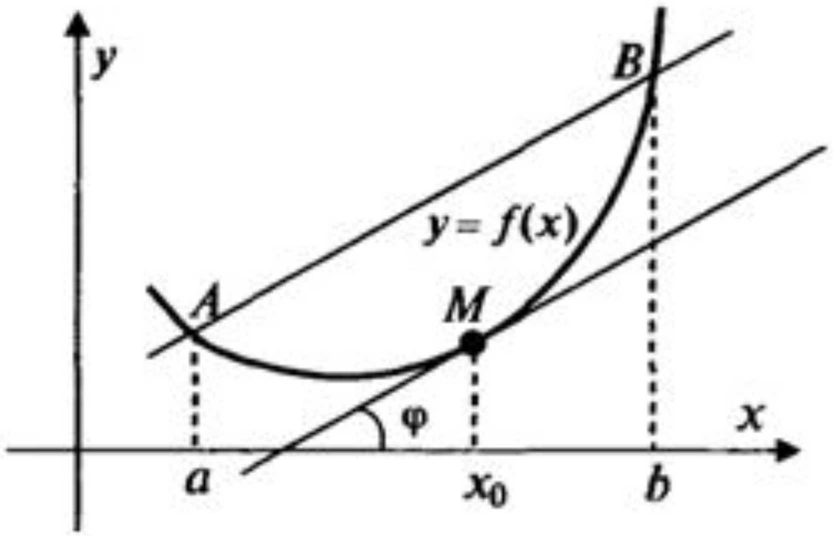


Основные теоремы дифференциального исчисления

• 2. Теорема Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[a; b]$. Тогда найдется хотя одна точка x_0 между a и b $(a < x_0 < b)$ такая что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Это формула Лагранжа или формула конечных приращений

Основные теоремы дифференциального исчисления

•

3. Теорема Коши.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывнs и имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$. Тогда найдется хотя одна точка x_0 между a и b $(a < x_0 < b)$ такая что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Это формула Коши или обобщенная формула конечных приращений